Algebra Lineare. a.a. 2004-05. Gruppo A-H. Prof. P. Piazza
Soluzioni compito pomeridiano del 8/11/04.

Esercizio 1. *Sia $V = \mathbb{R}^3$. Consideriamo i sottospazi*

$$U = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - x_2 - x_3 = 0\}, \quad W = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + 2x_2 + x_3 = 0\}.$$

Decidere se $\mathbb{R}^3 = U \oplus V$.

Soluzione. Diamo la soluzione più breve. Sappiamo che se $A \in M_{mn}(\mathbb{R})$ allora $n = \dim \mathrm{Ker}A + \mathrm{rg}A$, dove il nucleo di A,

$$\mathrm{Ker}A \equiv \mathrm{Ker}L_A = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n \mid L_A\underline{x} = \underline{0}\},$$

altri non è che *il sottospazio* di $\mathbb{R}^n$ costituito dalle soluzioni del sistema lineare *omogeneo* $A\underline{x} = \underline{0}$. Questo vuol dire che $\dim \mathrm{Ker}A = n - \mathrm{rgA}$. In parole, *la dimensione del sottospazio di $\mathbb{R}^n$ costituito dalle soluzioni di un sistema lineare omogeneo $A\underline{x} = \underline{0}$ è data dal numero delle incognite meno il rango della matrice dei coefficienti del sistema.*

Nel nostro caso U è l'insieme delle soluzioni di un sistema di **1** equazione in **3** incognite: $U = \mathrm{Ker}A$ con $A = |1 \ -1 \ -1| \in M_{13}(\mathbb{R})$. Ma allora $\dim U = 3 - \mathrm{rg}A$. Dato che ovviamente $\mathrm{rgA} = 1$ [1] si ha $\dim U = 3 - 1 = 2$. Conclusione: $\dim U = 2$. Analogamente $\dim W = 2$. Ma allora, per Grassmann,

$$\dim(U \cap W) = 2 + 2 - \dim(U + W) = 4 - \dim(U + W).$$

Ora, $U + W$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$ ed ha quindi dimensione ≤ 3. Ma allora $\dim(U \cap W) \geq 1$. In ogni caso $(U \cap W) \neq \underline{0}$ e $\mathbb{R}^3$ non è somma diretta.

Osservazione 1. Ovviamente avremmo potuto calcolare l'intersezione di U e di W che è costituita dai vettori $\underline{x}$ di $\mathbb{R}^3$ che soddisfano sia $x_1 - x_2 - x_3 = 0$ che $x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$; $U \cap W$ è quindi uguale al sottospazio delle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \tag{1}$$

Avremmo potuto risolvere esplicitamente il sistema ed avremmo trovato che $U \cap W = \mathrm{Span}((1, -2, 3))$.

In generale se U è un sottospazio di $\mathbb{R}^n$ dato come insieme delle soluzioni di un sistema omogeneo $A\underline{x} = \underline{0}$ e se W è un secondo sottospazio di $\mathbb{R}^n$ dato come insieme delle soluzioni di un sistema omogeneo $B\underline{x} = \underline{0}$, allora $U \cap W$, che sappiamo essere un sottospazio, è dato dalle soluzioni del sistema omogeneo $C\underline{x} = \underline{0}$ con $C = \begin{vmatrix} A \\ B \end{vmatrix}$.

Osservazione 2. Notiamo anche che senza risolvere il sistema, ma osservando che $U \cap W$ è dato dalle soluzioni di (1), avremmo potuto subito concludere che $\dim(U \cap W) = 1$. Infatti:

$$\dim(U \cap W) = 3 - \mathrm{rg} \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

Ma la matrice A in questa formula ha rango 2 (infatti $\mathrm{rg}A \leq \min\{2, 3\} = 2$ e le prime due colonne sono linearmente indipendenti perché non-proporzionali, quindi $\mathrm{rg}A = 2$). Conclusione: $\dim(U \cap W) = 3 - 2 = 1$.

Esercizio 2. *Come l'esercizio 1 ma con $U = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - x_2 - x_3 = 0\}$ e $W = \mathrm{Span}((1, 1, 1))$.*

[1] perché $\mathrm{rg}A$ =max numero di colonne lin. indip. = max numero di righe lin. indip.

Soluzione. Sappiamo che U ha dimensione 2. È ovvio che W ha dimensione 1. Inoltre $W = \{(\alpha, \alpha, \alpha), \alpha \in \mathbb{R}\}$. Ma allora è subito visto che $U \cap W = \{\underline{0}\}$. Ne segue che $\dim(U \cap W) = 0$. Ma allora, per Grassmann, $\dim(U+W) = 2+1-0 = 3$. Ne segue che $U+W \subset \mathbb{R}^3$ e $\dim(U+W) = 3$; ma allora $U+W = \mathbb{R}^3$. Conclusione: in questo caso $\mathbb{R}^3 = U \oplus W$ perché $U+W = \mathbb{R}^3$ e $U \cap W = \{\underline{0}\}$.

Esercizio 3. *Dire se l'applicazione lineare $L_A : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definita dalla matrice*

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

è iniettiva. Dire se è biettiva. Determinare l'immagine tramite L_A del vettore $(1,2,1)$. Determinare l'immagine tramite L_A dei vettori della base canonica.

Soluzione. L_A è iniettiva se e solo se $\mathrm{Ker} L_A = \{\underline{0}\}$. Occorre allora calcolare

$$\mathrm{Ker} L_A = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 \mid L_A \underline{x} = \underline{0}\} = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \}$$

Utilizzando Gauss è facile vedere che $\mathrm{Ker} L_A = \{\underline{0}\}$. Ne segue che L_A è iniettiva. Per il teorema della dimensione (andiamo da $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}^3$) è anche suriettiva. Ne segue che L_A è biettiva. L'immagine di $(1,2,1)$ è data sostituendo nella definizione di L_A,

$$L_A \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 + 3x_2 - x_3 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 \\ 2x_1 - x_2 \end{vmatrix},$$

i valori 1,2 e 1 al posto di x_1, x_2 e x_3 rispettivamente. Otteniamo il vettore $(6,3,0)$. L'immagine del j-mo vettore della base canonica è la j-ma colonna della matrice A.

Esercizio 4. *Sia $L_A : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita dalla matrice*

$$A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 5 \end{vmatrix}.$$

Scrivere l'espressione di L_A in coordinate: $L_A \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} = \dots$

Determinare la dimensione del nucleo di L_A. Determinare una base per lo spazio immagine.

Soluzione.

$$L_A \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 - x_2 + x_3 \\ 2x_1 - 3x_3 \\ -2x_2 + 5x_3 \end{vmatrix}$$

Per determinare la dimensione del nucleo possiamo procedere in 2 modi:

(i) calcoliamo esplicitamente $\mathrm{Ker} L_A$ (risolvendo quindi il sistema omogeneo $A\underline{x} = \underline{0}$) e ne troviamo una base. Il numero di elementi in questa base è per definizione la dimensione di $\mathrm{Ker} A$.

(ii) troviamo una base per lo spazio immagine, cioè per lo spazio generato dalle colonne di A. Il numero di elementi in questa base è per definizione la dimensione di $\mathrm{Im}\, L_A$ e si ha $\dim \mathrm{Ker} A = 3 - \dim \mathrm{Im}\, L_A \equiv 3 - \mathrm{rg} A$.

Applichiamo il secondo metodo, che risolve anche la seconda parte dell'esercizio. Le prime due colonne sono ovviamente linearmente indipendenti. Dobbiamo quindi

decidere se tutte e tre le colonne sono o meno linearmente indipendenti. Questo lo sappiamo fare; si scopre che non lo sono. Ne segue che una base di $\operatorname{Im} L_A$ è costituita dalle prime due colonne. In particolare $\dim \operatorname{Im} L_A = 2$ e $\dim \operatorname{Ker} L_A = 3 - 2 = 1$.

Esercizio 5. *Spiegare perché esiste ed è unica l'applicazione lineare $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che*

$$F(1,1,1) = (2,3,2), \quad F(0,1,1) = (1,3,2), \quad F(0,1,-1) = (1,1,-2).$$

(Per ragioni tipografiche scriveremo spesso i vettori di $\mathbb{R}^n$ per righe.) Determinare l'immagine tramite F degli elementi della base canonica: $\underline{e}_1 = (1,0,0)$, $\underline{e}_2 = (0,1,0)$, $\underline{e}_3 = (0,0,1)$. (Suggerimento: esprimere i vettori della base canonica come combinazioni lineari dei vettori $(1,1,1)$, $(0,1,1)$, $(0,1,-1)$ e applicare la linearità.)
Soluzione. Basta verificare che i vettori

$$\underline{v}_1 = (1,1,1), \quad \underline{v}_2 = (0,1,1), \quad \underline{v}_3(0,1,-1)$$

sono una base di $\mathbb{R}^3$ perché allora possiamo applicare la Proposizione 5.2 del libro di Abate. Si verifica con il solito metodo già visto varie volte che i tre vettori sono linearmente indipendenti. Sono quindi una base in $\mathbb{R}^3$.

Per determinare $F(1,0,0)$, $F(0,1,0)$, $F(0,0,1)$ dobbiamo espimere questi vettori in funzione di $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$ e $\underline{v}_3$ e poi applicare la linearità. Si ha $(1,0,0) = \underline{v}_1 - \underline{v}_2$, $(0,1,0) = \frac{1}{2}(\underline{v}_2 + \underline{v}_3)$, $(0,0,1) = \frac{1}{2}(\underline{v}_2 - \underline{v}_3)$ e quindi

$$F(1,0,0) = F(\underline{v}_1 - \underline{v}_2) = F(\underline{v}_1) - F(\underline{v}_2) = (2,3,2) - (1,3,2) = (1,0,0)$$

$$F(0,1,0) = F(\frac{1}{2}(\underline{v}_2 + \underline{v}_3)) = \frac{1}{2}((1,3,2) + (1,1,-2)) = (1,2,0)$$

$$F(0,0,1) = F(\frac{1}{2}(\underline{v}_2 \underline{v}_3)) = \frac{1}{2}((1,3,2) - (1,1,-2)) = (0,1,2)$$

Esercizio 6. Abbiamo svolto questo esercizio in dettaglio a lezione.

Esercizio 7. *Si consideri il sistema omogeneo di 4 equazioni in 5 incognite*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 - x_3 - x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 3x_5 = 0 \end{cases}$$

Sia Σ_0 l'insieme delle soluzioni. Esprimere Σ_0 come nucleo di un'applicazione lineare L_A.
Applicare il metodo di Gauss e determinare un sistema omogeneo a scala, $S\underline{x} = \underline{0}$, equivalente al sistema dato.
Determinare $k \in \mathbb{N}$ e k vettori in $\mathbb{R}^5$ in modo tale che $\Sigma_0 = \operatorname{Span}(\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_k)$. Determinare una base di Σ_0.
Soluzione. È chiaro che $\Sigma_0 = \operatorname{Ker} L_A$ con

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 5 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

Applicando il metodo di Gauss sappiamo che $A\underline{x} = \underline{0}$ è equivalente al sistema $S\underline{x} = \underline{0}$ con

$$S = \begin{vmatrix} \mathbf{1} & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{2} & 1/2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

I pivots di questa matrice a scala sono $p_1 = 1$ nella colonna $j_1 = 1$, $p_2 = 1$ nella colonna $j_2 = 2$ e $p_3 = 2$ nella colonna $j_3 = 3$. Da quanto visto a lezione (Lemma 6.1 e Corollario 6.2) il rango di S è 3 ed una base per $\operatorname{Im} S$ è costituita dalle colonne $S^{j_1}, S^{j_2}, S^{j_3}$, cioè dalle colonne S^1, S^2, S^3 . Inoltre (Teorema 6.3):

(i) $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} S$ (equivalentemente, il sistema $A\underline{x} = \underline{0}$ è equivalente a $S\underline{x} = \underline{0}$)

(ii) $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} S (= 3)$

(iii) le colonne $A^{j_1}, A^{j_2}, A^{j_3}$, cioè le colonne A^1, A^2, A^3, costituiscono una base per $\operatorname{Im} A$.

Tornando all'esercizio: $\Sigma_0 = \operatorname{Ker} A$ è ottenuto trovando $\operatorname{Ker} S$ che è l'insieme delle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \mathbf{x_1} + \mathbf{x_2} + 2\mathbf{x_3} + x_5 = 0 \\ \mathbf{x_2} + \mathbf{x_3} - \frac{1}{4}x_4 = 0 \\ 2\mathbf{x_3} + \frac{1}{2}x_4 + 2x_5 = 0 \end{cases}$$

con variabili dipendenti x_1, x_2, x_3 e variabili libere x_4 e x_5. Risolvendo all'indietro il sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -x_5 \\ x_2 + x_3 = \frac{1}{4}x_4 \\ 2x_3 = -\frac{1}{2}x_4 - 2x_5 \end{cases}$$

otteniamo (controllate i conti)

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{4}x_4 \\ x_2 = \frac{1}{4}x_4 + x_5 \\ x_3 = -\frac{1}{4}x_4 - x_5 \end{cases}$$

che è ovviamente equivalente a

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{4}x_4 \\ x_2 = \frac{1}{4}x_4 + x_5 \\ x_3 = -\frac{1}{4}x_4 - x_5 \\ x_4 = x_4 \\ x_5 = x_5 \end{cases}$$

Quindi

$$\operatorname{Ker} S = \left\{ \begin{vmatrix} \frac{1}{4}x_4 \\ \frac{1}{4}x_4 + x_5 \\ -\frac{1}{4}x_4 - x_5 \\ x_4 \\ x_5 \end{vmatrix} , \quad x_4, x_5 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \frac{x_4}{4} \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 4 \\ 0 \end{vmatrix} + x_5 \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} , \quad x_4, x_5 \in \mathbb{R} \right\}$$

Conclusione:

$$\Sigma_0 = \operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} S = \operatorname{Span}((1, 1, -1, 4, 0), (0, 1, -1, 0, 1))$$

ed è chiaro che questi due vettori sono una base per Σ_0.

Esercizio 8. *Si consideri il sistema non-omogeneo di 4 equazioni in 5 incognite*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5 = 1 \\ x_1 - x_2 + x_4 + x_5 = 2 \\ x_1 - x_3 - x_5 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 3x_5 = 1 \end{cases}$$

8.0 *Applicare il metodo di Gauss e determinare un sistema a scala, $S\underline{x} = \underline{c}$, equivalente al sistema dato.*
8.1 *Verificare che il sistema a scala $S\underline{x} = \underline{c}$ è compatibile. (Otteniamo quindi la compatibiltà del sistema iniziale.)*
8.2 *Sia Σ l'insieme delle soluzioni del sistema iniziale. Scrivere Σ nella forma*

$$\Sigma = \mathrm{Span}(\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_\ell) + \underline{v}_0$$

per un opportuno $\ell \in \mathbb{N}$ e per opportuni vettori $\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_\ell, \underline{v}_0$ in $\mathbb{R}^5$. (Suggerimento: utilizzare l'esercizio precedente ....)
Soluzione Applicando Gauss a

$$A = \left| \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 & 0 & 3 & 1 \end{array} \right.$$

otteniamo

$$\left| \begin{array}{ccccc|c} \mathbf{1} & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & 1 & -1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & \mathbf{2} & 1/2 & 2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right.$$

Sia S la matrice 4×5 a sinistra (la stessa dell'esercizio precedente); sia

$$\underline{c} = (1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)\,.$$

Allora $S\underline{x} = \underline{c}$ è un sistema compatibile (per il Corollario 6.2). Per il teorema 6.3 (i) sappiamo che il nostro sistema non-omogeneo è equivalente al sistema $S\underline{x} = \underline{c}$; ne segue che il nostro sistema è compatibile e le sue soluzioni sono date dalle soluzioni di $S\underline{x} = \underline{c}$. Procedendo come nell'esercizio precedente, ma tenendo conto dei termini noti, otteniamo

$$\Sigma = \underline{v}_0 + \mathrm{Span}((1, 1, -1, 4, 0), (0, 1, -1, 0, 1))$$

con

$$\underline{v}_0 = (\frac{5}{4}, -\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, 0, 0)\,.$$

Osservate che abbiamo verificato esplicitamente il Teorema di struttura: Σ è espresso come somma di una soluzione particolare del sistema, $\underline{v}_0$, e di tutte le soluzioni del sistema *omogeneo* associato.

Soluzione esercizi per casa

Esercizio 1. W ha dimensione $5-1=4$. Sia $\underline{u}$ un vettore di $\mathbb{R}^5$ non appartenente a W; basta prendere un vettore che non soddisfa l'equazione che definisce W, ad esempio $\underline{u} = (1, 1, 1, 1, 1)$. Allora $\mathrm{Span}(\underline{u}) = \{(\alpha, \alpha, \alpha, \alpha, \alpha), \alpha \in \mathbb{R}\}$ ha dimensione 1 ed ha intersezione banale con W: $U \cap W = \{\underline{0}\}$. Per Grassmann $\dim(U + W) = 4 + 1 - 0 = 5$; ma allora $U + W = \mathbb{R}^5$. Conclusione $\mathbb{R}^5 = W \oplus U$. Se scegliamo $U' = \mathrm{Span}(\underline{u}')$ con $\underline{u}' \notin W$ e $\underline{u}' \neq \underline{u}$ allora $\mathbb{R}^5 = W \oplus U'$ ma $U \neq U'$.

Esercizio 2. È chiaro che rgA = B = 2; quindi $\dim U = \dim W = 4 - 2 = 2$. L'intersezione ha dimensione $4 - \mathrm{rg}C$ con C uguale alla matrice 4×4 ottenuta considerando $\begin{vmatrix} A \\ B \end{vmatrix}$. Applicando Gauss vediamo che $\mathrm{rg}C = 4$. Ne segue che $U \cap W = \{\underline{0}\}$; per Grassmann $\dim(U + W) = 4$. Ne segue che $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$

Esercizio 3. $W = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^5 \,|\, \mathbf{x_1} = x_3 - x_4 - x_5\}$. Variabile dipendente: x_1. Variabili libere x_2, x_3, x_4, x_5. Quindi

$$W = \left\{ \begin{vmatrix} x_3 - x_4 - x_5 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{vmatrix}, x_2, x_3, x_4, x_5 \in \mathbb{R} \right\}$$

Ne segue che

$$W = \mathrm{Span}\left(\begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} \right)$$