Algebra Lineare a.a. 2004-2005. Gruppo A-H. Prof. P. Piazza
Soluzioni per il compito a casa del 7/12/04.

Soluzione esercizio 1. Il testo dell'esercizio fornisce l'informazione

$$T\underline{v}_1 = \underline{u}_1 - \underline{u}_2\,, \qquad T\underline{v}_2 = \underline{u}_1 + 3\underline{u}_2\,;$$

questo vuol dire che il testo dell'esercizio fornisce la matrice richiesta in **1.1**, e cioè la matrice, chiamiamola A_1, associata a T con la scelta di basi:

$$\text{base partenza} = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}\,, \quad \text{base arrivo} = \{\underline{u}_1, \underline{u}_2\}.$$

Vi ricordo infatti che la matrice A_1 è la matrice che ha come j-ma colonna le coordinate di $T\underline{v}_j$ rispetto alla base $\underline{u}_1, \underline{u}_2$. Quindi

$$A_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}.$$

Si tratta ora di utilizzare la formula (8.4) nel libro di testo per trovare le matrici richieste in **1.2, 1.3, 1.4.**

Cominciamo con **1.2** e sia A_2 la matrice cercata. Sia $I = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ la matrice identità 2×2. La formula (8.4) del libro di Abate (pag 163) ci dice che

$$A_2 = D^{-1} A_1 I = D^{-1} A_1$$

dove D è la matrice che ha come prima colonna le coordinate di $\underline{v}_1$ rispetto a $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2\}$ e come seconda colonna le coordinate di $\underline{v}_2$ rispetto a $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2\}$.

È bene riassumere schematicamente la situazione.

Schematicamente abbiamo

$$A_1 \text{ associata alla scelta } \{\underline{v}_1, \underline{v}_2\} \quad \{\underline{u}_1, \underline{u}_2\}$$
$$\mathbf{A_2} \text{ associata alla scelta } \{\underline{\mathbf{v}}_\mathbf{1}, \underline{\mathbf{v}}_\mathbf{2}\} \quad \{\underline{\mathbf{v}}_\mathbf{1}, \underline{\mathbf{v}}_\mathbf{2}\}$$
$$\left|\ \underline{\mathbf{v}}_\mathbf{1} \quad \underline{\mathbf{v}}_\mathbf{2}\ \right| = \left|\ \underline{v}_1 \quad \underline{v}_2\ \right| I\,, \qquad \left|\ \underline{\mathbf{v}}_\mathbf{1} \quad \underline{\mathbf{v}}_\mathbf{2}\ \right| = \left|\ \underline{u}_1 \quad \underline{u}_2\ \right| D$$
$$\mathbf{A_2} = D^{-1} A_1 I$$

Per determinare D^{-1} possiamo determinare prima D e poi calcolare la sua inversa. Notiamo tuttavia che D non è nota, perché non conosciamo le coordinate di $\underline{v}_1$ e $\underline{v}_2$ rispetto a $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2\}$ [1]. Tanto vale calcolare D^{-1} direttamente: vi ricordo che D^{-1} è la matrice tale che

$$\left|\ \underline{u}_1 \quad \underline{u}_2\ \right| = \left|\ \underline{\mathbf{v}}_\mathbf{1} \quad \underline{\mathbf{v}}_\mathbf{2}\ \right| D^{-1}$$

e cioè la matrice che ha come prima colonna le coordinate di $\underline{u}_1 = (1,1)$ rispetto alla base $\underline{v}_1, \underline{v}_2$ e come seconda colonna le coordinate di $\underline{u}_2 = (1,0)$ rispetto alla base $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$. Impostando il sistemino $(1,1) = \alpha(1,2) + \beta(-1,1)$ e risolvendo scopriamo che

$$(1,1) = \frac{2}{3}(1,2) + (-\frac{1}{3})(-1,1)$$

Analogamente

$$(1,0) = \frac{1}{3}(1,2) + (-\frac{2}{3})(-1,1)$$

[1] D è la matrice che ha come prima colonna le coordinate di $\underline{v}_1$ rispetto alla base $\underline{u}_1, \underline{u}_2$ e come seconda colonna le coordinate di $\underline{v}_2$ rispetto alla base $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2\}$

Ne segue che

$$D^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{vmatrix}$$

e quindi in definitiva

$$A_2 = \begin{vmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1/3 & 5/3 \\ 1/3 & -7/3 \end{vmatrix}$$

Passiamo a **1.3.** Sia A_3 la matrice cercata. È chiaro dalla soluzione di **1.2** che conviene determinare A_3 sulla base di A_2 perché in tale maniera una delle matrici che compaiono nella formula pag (8.4) del libro di testo sarà l'identità. Ciò sarà chiaro dallo schemino che segue. Schematicamente abbiamo infatti

$$A_2 \text{ associata alla scelta } \{\underline{v}_1, \underline{v}_2\} \quad \{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$$

$$\mathbf{A_3} \text{ associata alla scelta } \{\underline{\mathbf{u}}_\mathbf{1}, \underline{\mathbf{u}}_\mathbf{2}\} \quad \{\underline{\mathbf{v}}_\mathbf{1}, \underline{\mathbf{v}}_\mathbf{2}\}$$

$$\begin{vmatrix} \underline{\mathbf{u}}_\mathbf{1} & \underline{\mathbf{u}}_\mathbf{2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \underline{v}_1 & \underline{v}_2 \end{vmatrix} D^{-1}, \quad \begin{vmatrix} \underline{\mathbf{v}}_\mathbf{1} & \underline{\mathbf{v}}_\mathbf{2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \underline{v}_1 & \underline{v}_2 \end{vmatrix} I$$

$$\mathbf{A_3} = I^{-1} A_2 D^{-1} = A_2 D^{-1}$$

A questo punto basta fare il prodotto.

Consideriamo **1.4.** e sia A_4 la matrice cercata. In questo caso conviene determinarla utilizzando A_1 oppure A_3. Facciamolo con A_1. Schematicamente abbiamo allora

$$A_1 \text{ associata alla scelta } \{\underline{v}_1, \underline{v}_2\} \quad \{\underline{u}_1, \underline{u}_2\}$$

$$A_4 \text{ associata alla scelta } \{\underline{\mathbf{u}}_\mathbf{1}, \underline{\mathbf{u}}_\mathbf{2}\} \quad \{\underline{\mathbf{u}}_\mathbf{1}, \underline{\mathbf{u}}_\mathbf{2}\}$$

$$\begin{vmatrix} \underline{\mathbf{u}}_\mathbf{1} & \underline{\mathbf{u}}_\mathbf{2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \underline{v}_1 & \underline{v}_2 \end{vmatrix} D^{-1}, \quad \begin{vmatrix} \underline{\mathbf{u}}_\mathbf{1} & \underline{\mathbf{u}}_\mathbf{2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \underline{u}_1 & \underline{u}_2 \end{vmatrix} I$$

$$\mathbf{A_4} = I^{-1} A_1 D^{-1} = A_1 D^{-1}$$

e di nuovo basta ora fare il prodotto.

Nuova soluzione esercizio 5 del 6/12/05.[2]

Faremo di nuovo uso della formula (8.4) del libro. In questo caso $V = W (= \mathbb{R}3)$. Consideriamo la base

$$\underline{e}'_1 = (1,1,0) \quad \underline{e}'_2 = (0,1,1), \quad \underline{e}'_3 = (0,0,1)$$

I dati del problema forniscono immediatamente la matrice A associata ad F rispetto alla seguente scelta di basi:

$$\text{base di partenza} = \{\underline{e}'_1, \underline{e}'_2, \underline{e}'_3\}, \quad \text{base di arrivo} = \text{base canonica}.$$

Vi ricordo infatti che tale matrice è, per definizione, la matrice che ha come j-ma colonna le coordinate, nella base di arrivo, del vettore $F(\underline{e}'_j)$. Ma questa è proprio l'informazione che ci viene data dal testo del problema. Quindi

$$A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Vogliamo ora determinare la matrice A' associata ad F rispetto alla scelta di basi

$$\text{base di partenza} = \text{base canonica}, \quad \text{base di arrivo} = \text{base canonica}.$$

[2]Questa soluzione è stata illustrata a lezione il 7/12/04. Una prima soluzione è stata data nelle soluzioni al compito pomeridiano del 6/12/04.

Lo schema è il seguente. Sia I_3 la matrice identità 3×3.

$$A \text{ associata a } \{\underline{e}'_1, \underline{e}'_2, \underline{e}'_3\}, \qquad \{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}.$$

$$\mathbf{A}' \text{ associata a } \{\underline{\mathbf{e_1}}, \underline{\mathbf{e_2}}, \underline{\mathbf{e_3}}\}, \qquad \{\underline{\mathbf{e_1}}, \underline{\mathbf{e_2}}, \underline{\mathbf{e_3}}\}.$$

$$\left| \, \underline{\mathbf{e_1}} \quad \underline{\mathbf{e_2}} \quad \underline{\mathbf{e_3}} \, \right| = \left| \, \underline{e}'_1 \quad \underline{e}'_2 \quad \underline{e}'_3 \, \right| B, \qquad \left| \, \underline{\mathbf{e_1}} \quad \underline{\mathbf{e_2}} \quad \underline{\mathbf{e_3}} \, \right| = \left| \, \underline{e}_1 \quad \underline{e}_2 \quad \underline{e}_3 \, \right| I_3$$

$$\mathbf{A}' = I_3^{-1} \, A \, B = A \, B$$

La matrice B è al momento sconosciuta; d'altra parte essa è l'inversa della matrice B' che ha come colonne le coordinate dei vettori $\{\underline{e}'_1, \underline{e}'_2, \underline{e}'_3\}$ nella base $\{\underline{\mathbf{e_1}}, \underline{\mathbf{e_2}}, \underline{\mathbf{e_3}}\}$ (che è la base canonica). Quest'ultima matrice è invece nota perché è data nel testo del problema

$$B' = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Quindi

$$B = (B')^{-1} = \left(\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \right)^{-1}$$

da cui, calcolando l'inversa,

$$B = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Concludendo

$$\mathbf{A}' = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$