Algebra Lineare. a.a. 2004-05. Gruppo A-H. Prof. P. Piazza
Soluzioni del compito pomeridiano del 6/12/2004

Esercizio 1. Siano V e W due spazi vettoriali e sia $F : V \to W$ un isomorfismo (quindi F è lineare e biettiva). Verificare che F trasforma vettori linearmente indipendenti di V in vettori linearmente indipendenti di W. In particolare F trasforma sottospazi di dimensione k di V in sottospazi di dimensione k di W.

Soluzione. Siano $\underline{v}_1, \dots \underline{v}_k$ vettori linearmente indipendenti di V. Vogliamo mostrare che i vettori $F(\underline{v}_1), \dots, F(\underline{v}_k)$ sono linearmente indipendenti in W. Per linearità di F si ha

$$\alpha_1 F(\underline{v}_1) + \cdots + \alpha_k F(\underline{v}_k) = 0 \Leftrightarrow F(\alpha_1 \underline{v}_1 + \cdots + \alpha_k \underline{v}_k) = 0$$

ovvero se e solo se $\alpha_1 \underline{v}_1 + \cdots + \alpha_k \underline{v}_k \in \ker F$. Ma F è iniettiva per ipotesi, dunque $\ker F = \{0\}$; ne segue $\alpha_1 \underline{v}_1 + \cdots + \alpha_k \underline{v}_k = 0$. Ma i vettori $\underline{v}_i$ sono linearmente indipendenti per ipotesi, dunque dev'essere $\alpha_1 = \cdots = \alpha_k = 0$ come volevamo dimostrare. par Sia ora V_0 un sottospazio di dimensione k di V e sia $W_0 = F(V_0)$ la sua immagine in W. Essendo immagine di un sottospazio mediante un'applicazione lineare, W_0 è un sottospazio di W. Dobbiamo solo dimostrare che W_0 ha dimensione k. Poiché V_0 ha dimensione k, esisterà una base $\{\underline{v}_1, \dots \underline{v}_k\}$ di V_0. Questi vettori sono indipendenti in V e dunque, per la prima parte dell'esercizio, i vettori $F(\underline{v}_1), \dots, F(\underline{v}_k)$ sono indipendenti in W. Inoltre $F(\underline{v}_i) \in F(V_0) = W_0$, dunque i vettori $F(\underline{v}_1), \dots, F(\underline{v}_k)$ sono vettori indipendenti di W_0. Essi sono anche un sistema di generatori per W_0. Infatti se $\underline{w} \in W_0$ allora $\underline{w} = F(\underline{v})$ per qualche $\underline{v} \in V_0$. Poiché $\{\underline{v}_1, \dots \underline{v}_k\}$ è una base di V_0, esistono scalari α_i tali che $\underline{v} = \alpha_1 \underline{v}_1 + \cdots \alpha_k \underline{v}_k$. Ne segue

$$\underline{w} = F(\underline{v}) = \alpha_1 F(\underline{v}_1) + \cdots \alpha_k F(\underline{v}_k)$$

Abbiamo così dimostrato che $\{F(\underline{v}_1), \dots, F(\underline{v}_k)\}$ è un sistema di generatori indipendenti per W_0, ovvero è una base di W_0; essendo costituita da k elementi, si ha $\dim W_0 = k$.

Esercizio 2. Calcolare il prodotto righe per colonne AB, con

$$A = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & -1 & 0 \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 2 & -1 \\ -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Soluzione. Si ha

$$AB = \begin{vmatrix} 8 & 3 \\ 9 & -4 \end{vmatrix}$$

Esercizio 3. Verificare che la matrice

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

è invertibile. Calcolarne l'inversa.
Sia $F = L_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da A. Spiegare perché

L_A è invertibile. Calcolare l'immagine tramite l'applicazione inversa del vettore $(3, -1, 2)$.

Soluzione. Applichiamo il metodo di Gauss per il calcolo della matrice inversa:

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right| \rightarrow \left|\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right| \rightarrow \left|\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right|$$

A sinistra abbiamo ottenuto la matrice identità; ne segue che A è invertibile e la sua inversa è

$$A^{-1} = \left|\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{array}\right|$$

Poiché la matrice A è invertibile, è invetibile anche l'applicazione lineare L_A ad essa associata, e si ha $(L_A)^{-1} = L_{A^{-1}}$. Infine l'immagine inversa del vettore $(3, -1, 2)$ è

$$(L_A)^{-1}(3, -1, 2) = A^{-1} \cdot \left|\begin{array}{c} 3 \\ -1 \\ 2 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{array}\right| \cdot \left|\begin{array}{c} 3 \\ -1 \\ 2 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c} 3 \\ -4 \\ 6 \end{array}\right|$$

Esercizio 4. Sia $V = \mathbb{R}^2$ con base canonica $\{\underline{e}_1 := (1, 0), \underline{e}_2 := (0, 1)\}$ fissata; vi faccio notare che le coordinate di $\underline{x} \in \mathbb{R}^2$ rispetto alla base canonica sono proprio $\underline{x}$. Consideriamo una seconda base di $\mathbb{R}^2$ data da

$$\underline{v}_1 = (1, 1)\,, \quad \underline{v}_2 = (1, -1)$$

e siano (y_1, y_2) le coordinate associate a questa base.
Determinare le formule di cambiamento di coordinate $\underline{x} = B\underline{y}$, $\underline{y} = C\underline{x}$ Che relazione c'è fra B e C ?
Sia U il sottospazio vettoriale di equazione cartesiana $x_1 - 2x_2 = 0$. Determinare l'equazione cartesiana di U nelle coordinate (y_1, y_2).

Soluzione. Sia $\mathcal{B} = \{\underline{e}_1, \underline{e}_2\}$ e sia $\mathcal{B}' = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$. La matrice B del cambiamento di base da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$ è *la matrice che ha come j-ma colonna le coordinate del j-mo vettore* *della base $\mathcal{B}'$ rispetto alla base $\mathcal{B}$.* [1] Nel nostro caso

$$\underline{v}_1 = \underline{e}_1 + \underline{e}_2\,, \quad \underline{v}_2 = \underline{e}_1 - \underline{e}_2$$

e quindi

$$B = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

Ne segue, per quanto visto a lezione (Abate, Sezione 8.1), che

$$\begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} y_1 \\ y_2 \end{vmatrix}$$

da cui segue anche

$$\begin{vmatrix} y_1 \\ y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}^{-1} \cdot \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix}$$

Calcoliamo l'inversa dell matrice $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$ mediante l'algoritmo di Gauss:

$$\left|\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right| \to \left|\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right| \to \left|\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & -1/2 \end{array}\right| \to$$

$$\to \left|\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 & -1/2 \end{array}\right|$$

Abbiamo cioè

$$\begin{vmatrix} y_1 \\ y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix}$$

Per un approccio diretto al problema leggere la nota [2]

---

[1] Ricordiamo che la scelta di una base $\mathcal{B}$ su V definisce un isomorfismo lineare $F_{\mathcal{B}}\colon V \to \mathbb{R}^2$, che manda un vettore v di V nelle sue coordinate rispetto alla base $\mathcal{B}$. Nel nostro caso abbiamo due basi, la base $\mathcal{B}_x = \{\underline{e}_1, \underline{e}_2\}$ e la base $\mathcal{B}_y = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$, ed i due isomorfismi corrispondenti:

$$F_{\mathcal{B}_x} : v \mapsto (x_1, x_2); \qquad F_{\mathcal{B}_y} : v \mapsto (y_1, y_2).$$

Il passaggio dalle coordinate $\underline{x}$ alle coordinate $\underline{y}$ è pertanto dato dall'isomorfismo lineare $\Psi = F_{\mathcal{B}_y} \circ F_{\mathcal{B}_x}^{-1}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, mentre il passaggio dalle coordinate $\underline{y}$ alle coordinate $\underline{x}$ è dato dall'applicazione inversa $\Psi^{-1} = F_{\mathcal{B}_x} \circ F_{\mathcal{B}_y}^{-1}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. La matrice B è la matrice che rappresenta Ψ^{-1} rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^2$: le sue due colonne sono

$$\Psi^{-1}(1,0) = F_{\mathcal{B}_x} \circ F_{\mathcal{B}_y}^{-1}(1,0) \qquad \text{e} \qquad \Psi^{-1}(0,1) = F_{\mathcal{B}_x} \circ F_{\mathcal{B}_y}^{-1}(0,1)$$

Si ha

$$F_{\mathcal{B}_x} \circ F_{\mathcal{B}_y}^{-1}(1,0) = F_{\mathcal{B}_x}(\underline{v}_1) = F_{\mathcal{B}_x}(1,1) = (1,1)$$

e

$$F_{\mathcal{B}_x} \circ F_{\mathcal{B}_y}^{-1}(0,1) = F_{\mathcal{B}_x}(\underline{v}_2) = F_{\mathcal{B}_x}(1,-1) = (1,-1)$$

dunque

$$B = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

Le matrici B e C rappresentano applicazioni inverse l'una dell'altra; si ha pertanto $C = B^{-1}$.

[2] **Soluzione diretta.** Sia $\underline{v}$ un generico vettore di V. Il fatto che x_1, x_2 siano coordinate rispetto alla base $\underline{e}_1, \underline{e}_2$ significa che $\underline{v}$ si scrive come $\underline{v} = x_1\underline{e}_1 + x_2\underline{e}_2$. Analogamente, il fatto che che y_1, y_2 siano coordinate rispetto alla base $\underline{v}_1, \underline{v}_2$ significa che $\underline{v} = y_1\underline{v}_1 + y_2\underline{v}_2$. Troviamo dunque la realazione

$$x_1\underline{e}_1 + x_2\underline{e}_2 = y_1\underline{v}_1 + y_2\underline{v}_2$$

Come già osservato, le matrici B e C sono inverse l'una dell'altra.
Infine, per determinare l'equazione cartesiana di U nelle coordinate y_1, y_2, osserviamo che l'equazione cartesiana di U nelle coordinate x_1, x_2 si scrive

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix} = 0$$

e mediante la sostituzione

$$\begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} y_1 \\ y_2 \end{vmatrix}$$

troviamo l'equazione cartesiana di U nelle coordinate y_1, y_2:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} y_1 \\ y_2 \end{vmatrix} = 0$$

ovvero

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} y_1 \\ y_2 \end{vmatrix} = 0.$$

L'equazione cartesiana di U nelle coordinate y_1, y_2 è pertanto $-y_1 + 3y_2 = 0$.

Esercizio 5. Sia $V = \mathbb{R}^3$. È facile verificare che l'applicazione lineare definita da

$$F(1,1,0) = (1,2,-1)\,, \quad F(0,1,1) = (-1,1,1)\,, \quad F(0,0,1) = (-1,0,1)$$

è ben definita.
Consideriamo la base canonica $\mathcal{E} = \{\underline{e}_1 := (1,0,0), \underline{e}_2 := (0,1,0), \underline{e}_3 := (0,0,1)\}$ in $\mathbb{R}^3$. Determinare la matrice A associata ad F con la seguente scelta di basi

$$\text{base di partenza} = \mathcal{E}\,, \quad \text{base di arrivo} = \mathcal{E}$$

Vi ricordo che A è la matrice che ha come j-ma colonna le coordinate di $F(\underline{e}_j)$ rispetto alla base $\mathcal{E}$.
Studiare iniettività e suriettività di F.

Soluzione. Usiamo la linearità di F. Vogliamo calcolare le coordinate di $F(\underline{e}_1)$, $F(\underline{e}_2)$, $F(\underline{e}_3)$ nella base canonica; queste saranno le colonne della matrice cercata. Esprimiamo allora $\underline{e}_1$ come combinazione lineare degli elementi della nuova base $\{(1,1,0); (0,1,1); (0,0,1)\}$, perché è su questi vettori che sappiamo calcolare F, ed applichiamo la linearità di F. In questo caso l'espressione di $(1,0,0)$ in funzione di $\{\underline{e}'_j\}$ è molto facile a stabilirsi:

$$(1,0,0) = (1,1,0) - (0,1,1) + (0,0,1)$$

Quindi

Scrivendo esplicitamente i vettori $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{v}_1, \underline{v}_2$ come vettori colonna, questa relazione si riscrive come

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} y_1 \\ y_2 \end{vmatrix}$$

ovvero

$$\begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}^{-1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} y_1 \\ y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} y_1 \\ y_2 \end{vmatrix}$$

e

$$\begin{vmatrix} y_1 \\ y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}^{-1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}^{-1} \cdot \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix}$$

e ritroviamo quindi le due relazioni.

$F(1,0,0) = F((1,1,0) - (0,1,1) + (0,0,1)) = F(1,1,0) - F(0,1,1) + F(0,0,1) =$
$(1,2,-1) - (-1,1,1) + (-1,0,1) = (1,1-1)$
e questa è proprio la prima colonna della matrice A, Analogamente
$F(0,1,0) = F((0,1,1) - (0,0,1)) = F(0,1,1) - F(0,0,1) =$
$(-1,1,1) - (-1,0,1) = (0,1,0)$
che è la seconda colonna della matrice A. Notiamo che $F(0,0,1)$ è dato nel testo dell'esercizio.

In definitiva

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Osserviamo che in questo caso era particolarmente semplice scrivere le coordinate dei vettori della base canonica rispetto alla base $\{\underline{e}'_j\}$. In generale bisognerà impostare 3 sistemi 3×3 o, più intelligentemente, scrivere la matrice che dà le coordinate di $\{\underline{e}'_j\}$ rispetto a $\{\underline{e}_i\}$ e poi prenderne l'inversa.

Possiamo ora utilizzare A per rispondere all'ultimo quesito dell'esercizio. Il rango di A è due, come subito si verifica applicando l'eliminazione di Gauss. L'immagine di F è quindi generata da due vettori colonna di A non-proporzionali, ad esempio il primo ed il secondo. In particolare F non è né iniettiva, né suriettiva.

Il nucleo di F è il sottospazio vettoriale soluzione del sistema lineare omogeneo $A\underline{x} = \underline{0}$.Dato che il rango è 2 si ha che $\mathrm{Ker}F$ è un sottospazio di dimensione $3-2=1$.