Matematica II

Corso di Laurea in Statistica Gestionale - a.a. 2015-2016.

Commenti sui compiti a casa del 8/5/2016 e del 15/5/2016

Gli esercizi del 8/5 erano tutti presi dal libro di esercizi (Marcellini-Sbordone, Esercitazioni di Matematica, Volume 1, parte seconda).
Più precisamente:

Esercizio 1. $\longrightarrow$ p. 29, esercizio 1.70
Esercizio 2. $\longrightarrow$ p. 98, esercizio 2.104
Esercizio 3. $\longrightarrow$ p. 138: 4.11; p. 140: 4.31; p. 141: 4.37; p 142: 4.39; p. 151: 4.70 (a), (c); p. 154: 4.85; p. 158: 4.97 (a); p. 165 : 106
Esercizio 4. $\longrightarrow$ p. 226: 6.21; p. 228: 6.23; p. 236: 6. 46, 6.48

Per quel che concerne il compito del 15/5:

Esercizio 1. Determinare la soluzione generale dell'equazione differenziale:

$$y' + y = (1 - x)$$

Soluzione. Basta applicare la formula risolutiva con $a(x) = -1$ e $b(x) = 1 - x$. Si ottiene la soluzione generale $2 - x + Ce^{-x}$, $C \in \mathbb{R}$.

Esercizio 2. Determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = \frac{x}{y^4} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Soluzione. È un'equazione del primo ordine a variabili separabili. Risolvendo con il noto metodo ed imponendo la condizione iniziale si ottiene l'unica soluzione

$$y(x) = \left(\frac{5}{2}x^2 + 1\right)^{\frac{1}{5}} .$$

Esercizio 3. Per ogni $n \in \mathbb{N}$, , sia y_n l'unica soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = -y^{n+1} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Verificare che $y_n(1)$ converge ad 1 per $n \to +\infty$.
Soluzione. Trattasi di un'altra equazione a variabili separabili. Applicando il noto metodo e la condizione iniziale si ottiene l'unica soluzione

$$y_n(x) = (nx + 1)^{-\frac{1}{n}} .$$

Da qui è chiaro che $y_n(1)$ converge ad 1 per $n \to +\infty$.

Esercizio 5. Consideriamo l'equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti costanti:

$$y'' - 8y' - 9y = 0$$

Determinare l'insieme delle soluzioni.
Soluzione. L'equazione caratteristica ha soluzioni $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -9$. Quindi la soluzione generale è

$$Ce^{-x} + De^{9x}, \quad C, D \in \mathbb{R}\,.$$

Esercizio 6. Consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - 8y' - 9y = 0 \\ y(0) = 1\,, \quad y'(0) = t \end{cases}$$

Determinare la (unica) soluzione y_t per ogni fissato t. Determinare per quali t si ha che $\lim_{x\to+\infty} y_t(x) = 0$.
Soluzione. Sappiamo già che la soluzione generale è

$$Ce^{-x} + De^{9x}, \quad C, D \in \mathbb{R}\,.$$

Imponendo le condizioni iniziali per un fissato t otteniamo l'unica soluzione

$$y_t(x) = \frac{9-t}{10}e^{-x} + \frac{t+1}{10}e^{9x}$$

e si ha che $\lim_{x\to+\infty} y_t(x) = 0$ se e solo se $t = -1$