Matematica II

Corso di Laurea in Statistica Gestionale - a.a. 2015-2016.

Soluzioni dell'esercizio 4.5.

- Per calcolare
$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$$
basta moltiplicare e dividere per $\sqrt{x}+1$; si ottiene
$$=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}\,\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x-1}\frac{1}{\sqrt{x}+1}=\frac{1}{2}$$
- Per calcolare
$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+4x+1}-x$$
basta moltiplicare e dividere per $\sqrt{x^2+4x+1}+x$; si ottiene
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^2+4x+1)-x^2}{\sqrt{x^2+4x+1}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x+1}{\sqrt{x^2+4x+1}+x}$$
che possiamo riscrivere come
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{\frac{x^2+4x+1}{16x^2+1+8x}}+\frac{x}{4x+1}}$$
Si ottiene
$$\frac{1}{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}=2$$
- Per calcolare il limite
$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2}{x^2-1}\right)^{x^2}$$
lo riscriviamo come
$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{(-1)}{x^2}\right)^{x^2}}\,.$$
Sappiamo che
$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{(-1)}{x^2}\right)^{x^2}=e^{-1}$$
e quindi
$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{(-1)}{x^2}\right)^{x^2}}=\frac{1}{\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{(-1)}{x^2}\right)^{x^2}}=\frac{1}{e^{-1}}=e\,.$$
- Per calcolare il limite
$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2}$$
lo riscriviamo come
$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{x^2}}\,.$$

Si ha:

$$\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{x^2} = \left(1+\frac{(-2)}{x^2+1}\right)^{x^2+1} \frac{1}{\left(1+\frac{(-2)}{x^2+1}\right)}$$

che converge a e^{-2} (il secondo fattore a destra dell'uguaglianza va a 1). Quindi

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{x^2}} = \frac{1}{e^{-2}} = e^2\,.$$

• Per calcolare il limite

$$\lim_{x\to+\infty} x\log\frac{x-1}{x+1}$$

osserviamo che per note proprietà dei logaritmi esso è uguale a

$$\lim_{x\to+\infty} \log\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x$$

Ma

$$\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x = \left(1+\frac{(-2)}{(x+1)}\right)^{x+1} \frac{1}{\left(1+\frac{(-2)}{(x+1)}\right)}$$

e prendendo il logaritmo ad ambo i membri otteniamo

$$\log\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x = \log\left(1+\frac{(-2)}{(x+1)}\right)^{x+1} - \log\left(1+\frac{(-2)}{(x+1)}\right)$$

Passando al limite, utilizzando questa uguaglianza e la continuità del logaritmo otteniamo:

$$\lim_{x\to+\infty} x\log\frac{x-1}{x+1} = \log e^{-2} - \log 1 = -2-0 = -2$$

• Per calcolare il limite

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\log 2x}{\log x}\right)^{\log x}$$

utilizziamo prima di tutto le proprietà dei logaritmi e lo riscriviamo come

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\log 2}{\log x}+1\right)^{\log x}$$

Sappiamo che

$$a_n \to +\infty \Rightarrow (1+\frac{\alpha}{a_n})^{a_n} \to e^{\alpha}$$

Ma allora il nostro limite è uguale a $e^{\log 2}$ che è uguale a 2.