1) $\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2 = -\mathbf{v}_2 \wedge \mathbf{v}_1$ (pr.a' *anticommutativa* o *alternante*);

2) $(a\mathbf{v}_1) \wedge \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 \wedge (a\mathbf{v}_2) = a(\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2)$ (pr.a' *associativa con la moltiplicazione per uno scalare* a);

3) $(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) \wedge \mathbf{w} = \mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{w} + \mathbf{v}_2 \wedge \mathbf{w}$, $\mathbf{w} \wedge (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = \mathbf{w} \wedge \mathbf{v}_1 + \mathbf{w} \wedge \mathbf{v}_2$ (pr.a' *distributiva rispetto all'addizione vettoriale*).

Le 1),2) sono immediate tenuto conto delle 2°,30.3.1,30.3.2 (con riguardo allo spazio).

Per stabilire la 3) (e basta provare una delle due relazioni, poiche' l'una segue dall'altra tenuto conto di 1), premettiamo due osservazioni.

Consideriamo il prodotto $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ essendo $\mathbf{u}$ un versore $(u=1)$, e pensiamo i vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}$, $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ applicati in O. Si ha allora ovviamente:

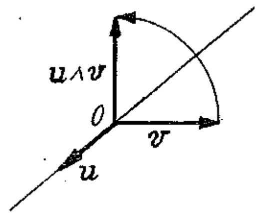

Fig. 5

(6.2.1) Se $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$, il vettore $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ si ottiene (fig. 5) facendo rotare $\mathbf{v}$ di un angolo retto intorno alla retta orientata per O di versore $\mathbf{u}$, nel verso di rotazione positivo associato alla orientazione dello spazio (si ricordi 2°, n. 31.2, e si tenga conto che le terne $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u} \wedge \mathbf{v})$, $(\mathbf{v}, \mathbf{u} \wedge \mathbf{v}, \mathbf{u})$ sono equiverse).

Se $\mathbf{v}$ non e' ortogonale ad $\mathbf{u}$, possiamo decomporre $\mathbf{v}$ in un vettore $\mathbf{v}' \perp \mathbf{u}$ e in un vettore $a\mathbf{u} \| \mathbf{u}$ $(\mathbf{v} = \mathbf{v}' + a\mathbf{u})$, come si ha subito dalla fig. 6. Tenuto conto che l'area del parallelogramma costruito su $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ uguaglia quella del parallelogramma (rettangolo) costruito su $\mathbf{u}, \mathbf{v}'$ e che le due coppie di vettori sono equiverse sul piano, si ha:

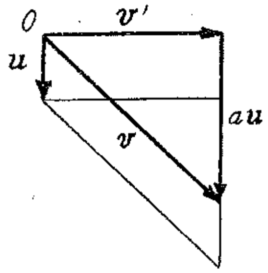

Fig. 6

(6.2.2) $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \mathbf{u} \wedge (\mathbf{v}' + a\mathbf{u}) = \mathbf{u} \wedge \mathbf{v}'$.

Cio' posto, per provare la 2^a delle 3), poniamo $\mathbf{w} = b\mathbf{u}$ ove $\mathbf{u}$ e' un versore parallelo a $\mathbf{w}$ e b uno scalare. Bastera' dimostrare la relazione che si ottiene sostituendo $\mathbf{u}$ a $\mathbf{w}$, giacche' si passa poi al caso generale tenendo conto di 2).

Si ha:

$$\mathbf{u}\wedge(\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2)=\mathbf{u}\wedge(\mathbf{v}'_1+a_1\mathbf{u}+\mathbf{v}'_2+a_2\mathbf{u})$$
$$=\mathbf{u}\wedge[(\mathbf{v}'_1+\mathbf{v}'_2)+(a_1+a_2)\mathbf{u}],$$

dove a_1, a_2 sono scalari, $\mathbf{v}'_1\perp\mathbf{u}$, $\mathbf{v}'_2\perp\mathbf{u}$ e quindi anche $(\mathbf{v}'_1+\mathbf{v}'_2)\perp\mathbf{u}$.

Tenuto conto di 6.2.1 i vettori $\mathbf{u}\wedge\mathbf{v}'_1$; $\mathbf{u}\wedge\mathbf{v}'_2$, $\mathbf{u}\wedge(\mathbf{v}'_1+\mathbf{v}'_2)$ si ottengono risp. da $\mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2, \mathbf{v}'_1+\mathbf{v}'_2$ con la stessa rotazione di un angolo retto intorno alla retta orientata di versore $\mathbf{u}$, quindi:

$$\mathbf{u}\wedge(\mathbf{v}'_1+\mathbf{v}'_2)=\mathbf{u}\wedge\mathbf{v}'_1+\mathbf{u}\wedge\mathbf{v}'_2.$$

Avuto riguardo a 6.2.2 si ha percio':

$$\mathbf{u}\wedge(\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2)=\mathbf{u}\wedge(\mathbf{v}'_1+\mathbf{v}'_2)$$
$$=\mathbf{u}\wedge\mathbf{v}'_1+\mathbf{u}\wedge\mathbf{v}'_2$$
$$=\mathbf{u}\wedge(\mathbf{v}'_1+a_1\mathbf{u})+\mathbf{u}\wedge(\mathbf{v}'_2+a_2\mathbf{u})$$
$$=\mathbf{u}\wedge\mathbf{v}_1+\mathbf{u}\wedge\mathbf{v}_2.$$

Le proprieta' dimostrate consentono, anche per l'operazione di prodotto vettoriale, il calcolo agevole e non dissimile dal calcolo algebrico ordinario, fatta eccezione per la proprieta' anticommutativa 1), alla quale occorre porre particolare attenzione.

6.3. Vogliamo esprimere il prodotto vettoriale mediante le coordinate dei vettori.

Osserviamo in primo luogo che per i versori $\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}$ del riferimento *RC* sussistono le relazioni seguenti, immediata conseguenza della definizione di prodotto vettoriale e del fatto che le terne ordinate di vettori $(\mathbf{ijk})$, $(\mathbf{jki})$, $(\mathbf{kij})$ sono equiverse (2°, n.31.1):

In primo luogo si pone come al n.30.2 la definizione di riferimenti dello spazio $RA(O\mathbf{ijk})$, $RA(O'\mathbf{i}'\mathbf{j}'\mathbf{k}')$ equiversi o contraversi, ovvero di terne ordinate di vettori indipendenti $(\mathbf{ijk})$, $(\mathbf{i}'\mathbf{j}'\mathbf{k}')$ equiverse o contraverse, a seconda che sia positivo o negativo il segno del determinante della matrice $(a_k^{k'})$ $(k,k'=1,2,3)$ della corrispondente trasformazione di coordinate (o del corrispondente cambiamento di base).

Una orientazione dello spazio si definisce allora *associando allo spazio una classe o l'altra di riferimenti $RA(O\mathbf{ijk})$ tra loro equiversi.*

Inalterate restano le proposizioni 30.3.1, 30.3.2 (e le loro dimostrazioni), *se riferite allo spazio.*

Cosi' p.es. ne segue che il riferimento $RA(O\mathbf{ijk})$ e' equiverso a $RA(O,-\mathbf{i},-\mathbf{j},\mathbf{k})$ e contraverso a $RA(O,-\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k})$, $RA(O,-\mathbf{i},-\mathbf{j},-\mathbf{k})$.

Dalla proposizione 30.3.2 segue ora altresi' che *eseguendo sui versori di un riferimento $RA(O\mathbf{ijk})$ una permutazione pari o dispari si ottiene un riferimento risp. equiverso o contraverso.* Si tratta di una immediata conseguenza del fatto che una permutazione di classe pari o dispari puo' ottenersi con un numero di scambi risp. pari o dispari. Percio' $RA(O\mathbf{ijk})$ e' equiverso a $RA(O\mathbf{jki})$, $RA(O\mathbf{kij})$ e contraverso a $RA(O\mathbf{kji})$, $RA(O\mathbf{ikj})$, $RA(O\mathbf{jik})$.

Anche inalterata resta la proposizione 30.3.3 *se riferita allo spazio.*

*Qualche avvertenza occorre pero' per quanto concerne il trasporto allo spazio della necessita' della condizione espressa da 30.3.3. Si comincera' col far variare, senza degenerazione, il riferimento $RA(O\mathbf{ij})$ portandolo nel riferimento $RA(O\mathbf{i}''\mathbf{j}'')$ giacente sullo stesso piano di $RA(O\mathbf{i}'\mathbf{j}')$, in guisa inoltre, come e' sempre possibile in base al n.30.5, che $RA(O\mathbf{i}'\mathbf{j}')$ e $RA(O\mathbf{i}''\mathbf{j}'')$ siano equiversi su tal piano. Tenuto conto della proposizione 30.3.3 stessa per il caso del piano, si puo' anzi far si' che risulti $\mathbf{i}''=\mathbf{i}'$, $\mathbf{j}''=\mathbf{j}'$. Simultaneamente si sara' fatto variare il versore $\mathbf{k}$ portandolo in $\mathbf{k}''$ in modo che i versori della terna variabile si conservino sempre indipendenti. Si riconosce allora (analogamente al caso del piano) che **k**', **k**" devono trovarsi di necessita' da una stessa parte del piano $Oi'j'$. E' allora possibile far variare ancora **k**" portandolo a coincidere con **k**' senza degenerazione della terna.*

31.2. Le considerazioni del n.30.4 possono anch'esse estendersi allo spazio se pure in modo meno immediato. Vi accenniamo rapidamente.

Fissato un riferimento $RA(O$**ijk**$)$, si consideri l'asse z orientato e il *fascio di semipiani* di asse z (cioe' l'insieme dei semipiani aventi per origine l'asse z). Si consideri in tale fascio il verso di rotazione che da', per intersezione col piano xy, il verso di rotazione positivo ivi definito da $RA(O$**ij**$)$ (n. 30.4).

Il riferimento $RA(O$**ijk**$)$ puo' associarsi cosi' ad un **verso di rotazione intorno ad un asse orientato** (cfr.fig.18), che si dice *positivo* rispetto al riferimento.

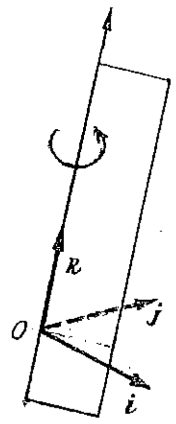

Fig. 18

Facendo variare nello spazio con continuita' il riferimento RA, si ottengono versi di rotazione intorno ad assi orientati che si dicono *concordi* con quello di partenza. Quindi si ha che *un'orientazione dello spazio puo' anche assegnarsi mediante una classe di versi di rotazione concordi intorno ad assi orientati.*

Cambiando il verso di rotazione intorno all'asse, oppure cambiando il verso dell'asse di rotazione, si ottengono ovviamente versi di rotazione intorno ad assi orientati *discordi* rispetto a quelli assegnati, cioe' associabili a riferimenti contraversi col riferimento RA.

31.3. Per estendere allo spazio quanto detto al n.30.5 per il piano, occorrerebbe considerare lo spazio immerso in uno spazio di dimensione superiore.