Matematica II

Corso di Laurea in Statistica Gestionale - a.a. 2015-2016.

Terzo compito a casa. Soluzioni.

Esercizio 1. *Sia* $a \neq 1$. *Calcolare*

$$\log_a(1)\,, \quad \log_a(a)\,, \quad \log_a(a^2)\,, \quad \log_a(\sqrt{a})\,.$$

Soluzione. Ricordiamo che $\log_a(x)$ è l'esponente che bisogna dare ad a per ottenere x. Dato che vale sempre $a^{\mathbf{0}} = 1$ concludiamo che $\log_a(1) = 0$. Analogamente, dato che $a^1 = a$ concludiamo che $\log_a(a) = 1$. Infine $\log_a(a^2) = 2$ dato che 2 è l'esponente che occorre dare ad a per ottenere a^2. È anche chiaro a questo punto che $\log_a(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}$.

Esercizio 2. *Scrivere un' uguaglianza che colleghi tra loro le seguenti quantità :*

$$\log_{10}(\frac{54}{11})\,, \quad \log_{10}(2)\,, \quad \log_{10}(3)\,, \quad \log_{10}(11).$$

Soluzione. Ricordiamo che $\forall a \neq 1$

$$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)\,, \quad \log_a(\frac{x}{y}) = \log_a(x) - \log_a(y)\,, \quad \log_a(x^b) = b\log_a(x)\,.$$

Scriviamo $54 = 2 \cdot 3^3$. Ma allora

$$\log_{10}(\frac{54}{11}) = \log_{10}(54) - \log_{10}(11) = \log_{10}(2 \cdot 3^3) - \log_{10}(11) = \log_{10}(2) + 3\log_{10}(3) - \log_{10}(11).$$

Conclusione: $\log_{10}(\frac{54}{11}) = \log_{10}(2) + 3\log_{10}(3) - \log_{10}(11)$.

Esercizio 3. *Calcolare*

$$\log_2(\frac{1}{16})\,, \quad 2^{\log_2(512)}\,, \quad \log_{\sqrt{2}}(\sqrt[5]{\frac{1}{2}})$$

Soluzione. Dato che $\frac{1}{16} = 2^{-4}$ si ha, chiaramente, $\log_2(\frac{1}{16}) = -4$; infatti -4 è l'esponente che occorre dare a 2 per ottenere $\frac{1}{16}$. Dato che per la definizione stessa di logaritmo si ha

$$\forall x \in (0, \infty) \quad a^{\log_a(x)} = x$$

è chiaro che $2^{\log_2(512)} = 512$.
Per calcolare

$$\log_{\sqrt{2}}(\sqrt[5]{\frac{1}{2}})$$

osserviamo preliminarmente che

$$\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}\,, \quad \sqrt[5]{\frac{1}{2}} = ((2^{-1}))^{\frac{1}{5}} = 2^{-\frac{1}{5}}$$

Ci domandiamo qual è l'esponente che bisogna dare a $2^{\frac{1}{2}}$ per ottenere $2^{-\frac{1}{5}}$; tale esponente è $-\frac{2}{5}$. Infatti

$$(2^{\frac{1}{2}})^{-\frac{2}{5}} = 2^{\frac{1}{2}\cdot(-\frac{2}{5})} = 2^{-\frac{1}{5}}\,.$$

Esercizio 4. *Determinare* $x \in (0, +\infty)$ *tale che* $\log_4(x) = 2$. *Ripetere l'esercizio per* $\log_7(x) = -2$.
Soluzione. Basta applicare la definizione: $\log_4(x)$ è l'esponente che occorre dare a 4 per ottenere x: quindi $4^{\log_4(x)} = x$; ma ci viene data l'informazione che $\log_4(x) = 2$ e concludiamo allora che $x = 4^2 = 16$. Analogamente: $7^{\log_7(x)} = x$ e dato che ci viene data l'informazione che $\log_7(x) = -2$ concludiamo che $x = 7^{-2} = 1/7^2 = 1/49$.

Esecizio 5. Determinare l'insieme di definizione della funzione

$$f(x) = \log_{10}\left(1 - |\frac{x}{2-3x}|\right).$$

Soluzione. Per definizione di logaritmo dobbiamo determinare gli $x \in \mathbb{R}$ tali che

$$1 - |\frac{x}{2-3x}| > 0\,,$$

e cioè tali che $|2-3x| > |x|$. L'ultima disequazione si esplicita in 4 sistemini; quindi $|2-3x| > |x| \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ 2-3x \geq 0 \\ 2-3x \geq x \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} x < 0 \\ 2-3x \geq 0 \\ 2-3x \geq -x \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} x < 0 \\ 2-3x < 0 \\ -(2-3x) \geq -x \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} x \geq 0 \\ 2-3x \geq 0 \\ 2-3x \geq x \end{cases}$$

dove utilizziamo *o* invece di *oppure*. Risolvendo si ottiene

$$|2-3x| > |x| \quad \Leftrightarrow \quad x \in (-\infty, \frac{1}{2}) \cup (1, +\infty).$$

Riassumendo

$$\mathrm{Dom}\left(\log_{10}(1 - |\frac{x}{2-3x}|)\right) = (-\infty, \frac{1}{2}) \cup (1, +\infty).$$