Matematica II

Corso di Laurea in Statistica Gestionale - a.a. 2015-2016.

Primo compito a casa. Soluzioni.

Esecizio 1.
Seguendo una notazione consolidata scriviamo il numero reale ab^{-1} come

$$\frac{a}{b}$$

Stabilire se le seguenti proprietà dei numeri reali sono vere o false.

(1)
$$\frac{c}{a+b} = \frac{c}{a} + \frac{c}{b}$$

(2)
$$\frac{a^n}{n} = a$$

(3)
$$-x \leq -1 \Rightarrow \quad x < 1$$

(4)
$$\frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{b} = a$$

(5)
$$\frac{a}{c} \geq 1 \Rightarrow a \geq c$$

(6)
$$\sqrt{(-2)^2} = -2$$

(7)
$$\sqrt{a^2 + b^2} = a + b \quad a, b > 0$$

Soluzione.

(1) Falsa. **Non** è vero $(b + c)^{-1} = b^{-1} + c^{-1}$ (la funzione $f(x) = 1/x$ non è lineare).
(2) Falsa. a^n vuol dire $(aaa \cdots a)$ n volte e questa quantità non può certo essere semplificata con il denominatore.
(3) Falsa. Per ottenere x ed 1 dalla disuguaglianza data dobbiamo moltiplicarla per (-1). Ma sappiamo che $\alpha \leq \beta$, $\gamma < 0$ implica che $\gamma\alpha \geq \gamma\beta$. Quindi $-x \leq -1 \;\Rightarrow\; x \geq 1$.
(4) Falsa. L'espressione data è uguale a $(ab^{-1})b^{-1}$ che per la proprietà associativa è uguale a $a(b^{-1}b^{-1})$ che è uguale a ab^{-2}.
(5) Falsa per una ragione già spiegata sopra (se $c < 0$, moltiplicando la disuguaglianza data per c il verso della disuguaglianza si scambia; è invece vero che $\frac{a}{c} \geq 1, c > 0 \Rightarrow a \geq c$).
(6) Falsa. In generale $\sqrt{x^2} = |x|$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.
(7) Falsa. La radice quadrata non è una funzione lineare.

Esercizio 2. Esprimere nella forma $a + bi$ i seguenti numeri complessi:

$$\frac{(2+3i)}{(1+\sqrt{2}i)}\,, \quad 4(-2+5i)^{-1} \quad (1-3i)(4+i)^{-1}\,.$$

Soluzione. Basta applicare la definizione di inverso e svolgere i calcoli. Si ottiengono in ordine i numeri complessi:

$$(2+3\sqrt{2})+(3-2\sqrt{2})i\,, \quad -\frac{8}{29}-(\frac{20}{29})i\,, \quad \frac{1}{17}-(\frac{13}{17})i\,.$$

Esercizio 3. Per quali $x \in \mathbb{R}$ è reale il numero complesso

$$\frac{(x-2+xi)}{(x-3-5i)}\,.$$

Soluzione. Basta applicare la definizione di inverso, svolgere i conti e trovare parte reale e parte immaginaria del numero dato. Poi si impone che la parte imaginaria sia uguale a zero. Si ottiene un'equazione di secondo grado in x che è, esplicitamente, $x^2 + 2x - 10 = 0$. Le radici di questa equazione, e cioè $-1 \pm \sqrt{11}$, sono i valori cercati.

Esecizio 4. Determinare, se esistono, le soluzioni delle equazioni

$$|x+10| = 3\,, \quad |x+5| = -2\,, \quad x = 4-3|x|\,.$$

Soluzione. La seconda equazione non ha soluzione perché il valore assoluto è sempre maggiore o uguale a 0.. Determiniamo le soluzioni dell'equazione $x = 4 - 3|x|$. Per definizione $|x| = x$ se $x \geq 0$ e $|x| = -x$ se $x < 0$. Ne segue che l'equazione può essere riscritta come segue

$$x = 4-3x \;\text{ se }\; x \geq 0\,, \quad x = 4+3x \;\text{ se }\; x < 0$$

La prima equazione ha soluzione $x = 1$ che è una soluzione accettabile dato che $1 > 0$.
La seconda equazione ha soluzione $x = -2$ che è anche accettabile dato che $-2 < 0$.
Conclusione: le soluzioni dell'equazione $x = 4 - 3|x|$sono $x = 1$, $x = -2$.
Determiniamo infine le soluzioni dell'equazione $|x+10| = 3$. Per definizione $|x+10|$ è uguale a $x + 10$ se $x \geq -10$ ed è uguale a $-x - 10$ se $x < -10$. Nel primo caso otteniamo $x + 10 = 3$ e quindi $x = -7$ che è accettabile perché $-7 < -10$. Nel secondo caso otteniamo $-x - 10 = 3$ e cioè $x = -13$ che è anche accettabile perché $-13 < -10$. Conclusione: le soluzioni dell'equazione $|x + 10| = 3$ sono $x = -7$ e $x = -13$.

Esecizio 5. Determinare per quali $x \in \mathbb{R}$ è verificata la disequazione

$$|x^2 + 3x - 4| < 2.$$

Soluzione. Utilizzeremo la notazione compatta per gli intervalli nei numeri reali: se $a < b$ denotiamo

$$(a,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}\,, \quad [a,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$$
$$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$$
$$(a,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}\,, \quad [a,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$$

e analogamente per $(-\infty, a)$ e $(-\infty, a]$.

Riscriviamo esplicitamente la disequazione utilizzando la definizione di modulo. Per definizione

$$|x^2+3x-4| = \begin{cases} x^2+3x-4 & \text{se } x^2+3x-4 \geq 0 \\ -(x^2+3x-4) & \text{se } x^2+3x-4 < 0 \end{cases}$$

Quindi

$$|x^2+3x-4| < 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+3x-4 \geq 0 \\ x^2+3x-4 < 2 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} x^2+3x-4 < 0 \\ -(x^2+3x-4) < 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+3x-4 \geq 0 \\ x^2+3x-4 < 2 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} x^2+3x-4 < 0 \\ -x^2-3x+4 < 2 \end{cases}$$

Cerchiamo le soluzioni del primo sistema che riscriviamo come

$$\begin{cases} x^2 + 3x - 4 \geq 0 \\ x^2 + 3x - 6 < 0 \end{cases}$$

L'equazione $x^2 + 3x - 4 = 0$ ha il $\Delta = 25 > 0$; le sue soluzioni reali sono $x_2 = -4$, $x_1 = 1$. Dato che il coefficiente di x^2 è 1, quindi positivo, concludiamo che $x^2 + 3x - 4 \geq 0$ per $x \in (-\infty, -4] \cup [1, +\infty)$ (valori esterni).
L'equazione $x^2 + 3x - 6 = 0$ ha il $\Delta = 33 > 0$; le sue soluzioni reali sono

$$\frac{-3 \pm \sqrt{33}}{2}.$$

Dato che il coefficiente di x^2 è 1, quindi positivo, concludiamo che $x^2 + 3x - 6 < 0$ quando

$$x \in (\frac{-3 - \sqrt{33}}{2}, \frac{-3 + \sqrt{33}}{2}) \quad \text{(valori interni)}\,.$$

Notare che utilizziamo qui le parentesi tonde, visto che vogliamo escludere gli estremi dell'intervallo. [1] Osserviamo poi che

$$\frac{-3 - \sqrt{33}}{2} \simeq -4,3722\,, \qquad \frac{-3 + \sqrt{33}}{2} \simeq 1,3722\,,$$

e quindi

$$\frac{-3 - \sqrt{33}}{2} < -4 < 1 < \frac{-3 + \sqrt{33}}{2}\,.$$

Concludiamo che queste due disequazioni sono *simultaneamente* soddisfatte per

$$x \in (\frac{-3 - \sqrt{33}}{2}, -4] \cup [-1, \frac{-3 + \sqrt{33}}{2})\,.$$

Queste sono quindi le soluzioni del primo sistema.
Passiamo al secondo sistema che riscriviamo nella forma:

$$\begin{cases} x^2 + 3x - 4 < 0 \\ x^2 + 3x - 2 > 0 \end{cases}$$

Per quanto visto sopra sappiamo che la prima disequazione $x^2 + 3x - 4 < 0$ è soddisfatta da $x \in (-4, 1)$ (ora dobbiamo prendere i valori interni ed escludere gli estremi). L'equazione $x^2 + 3x - 2 = 0$ ha soluzioni

$$\frac{-3 \pm \sqrt{17}}{2}$$

e quindi $x^2 + 3x - 2 > 0$ per

$$x \in (-\infty, \frac{-3 - \sqrt{17}}{2}) \cup (\frac{-3 + \sqrt{17}}{2}, +\infty)\,.$$

Osserviamo che

$$\frac{-3 - \sqrt{17}}{2} \simeq -3,5615\,, \qquad \frac{-3 + \sqrt{17}}{2} \simeq 0,5615$$

e quindi

$$-4 < \frac{-3 - \sqrt{17}}{2} < \frac{-3 + \sqrt{17}}{2} < 1$$

Le soluzioni simultanee delle due disequazioni, e cioè del secondo sistema, sono date da

$$x \in (-4, \frac{-3 - \sqrt{17}}{2}) \cup (\frac{-3 + \sqrt{17}}{2}, 1)\,.$$

Riassumendo: la disequazione $|x^2 + 3x - 4| < 2$ è soddisfatta da

$$x \in (\frac{-3 - \sqrt{33}}{2}, -4] \cup [-1, \frac{-3 + \sqrt{33}}{2}) \ \text{ oppure } \ x \in (-4, \frac{-3 - \sqrt{17}}{2}) \cup (\frac{-3 + \sqrt{17}}{2}, 1)$$

e quindi (pensateci un attimo)

$$x \in (\frac{-3 - \sqrt{33}}{2}, \frac{-3 - \sqrt{17}}{2})) \cup [-1, \frac{-3 + \sqrt{33}}{2})\,.$$

---

[1] infatti in quei 2 punti l'espressione $x^2 + 3x - 6$ si annulla; noi vogliamo invece che sia strettamente minore di zero.

La soluzione dell'esercizio è completa.

Esecizio 6. Determinare per quali $x \in \mathbb{R}$ è verificata la disequazione:

$$\frac{x^2 + 3x - 4}{x - 6} \geq 0\,.$$

Soluzione. Una frazione è maggiore o uguale a zero quando numeratore e denominatore sono entrambi positivi oppure entrambi negativi (ma ovviamente il denominatore non si deve annullare) Quindi

$$\frac{x^2 + 3x - 4}{x - 6} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 3x - 4 \geq 0 \\ (x - 6) > 0 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} x^2 + 3x - 4 \leq 0 \\ (x - 6) < 0 \end{cases}$$

Studiamo allora il segno del numeratore e del denominatore. Per il numeratore: la disequazione $x^2 + 3x - 4 \geq 0$ l' abbiamo già risolta; sappiamo che essa è soddisfatta per $x \in (-\infty, -4] \cup [1, +\infty)$. Quindi il numeratore è ≥ 0 in $(-\infty, -4] \cup [1, +\infty)$ ed è invece < 0 in $(-4, 1)$. Il denominatore è strettamente positivo per $x \in (6, \infty)$, si annulla per $x = 6$ (valore che va quindi escluso perché 0 non è ammesso al denominatore) ed è strettamente negativo per $x < 6$.
Conclusione: $\frac{x^2+3x-4}{x-6} \geq 0$ per $x \in [-4, 1] \cup (6, \infty)$.

Esecizio 7. Determinare estremo superiore ed inferiore degli insiemi

$$A_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid x = (-1)^n \frac{2n - 1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$$

$$A_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid x = (-1)^n \frac{2n + 1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$$

dove, seguendo il libro, $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$.
Soluzione. Riscriviamo A_1 come $\{x \in \mathbb{R} \mid x = (-1)^n(2 - (1/n)), n \in \mathbb{N}\}$. Per $n = 2k$ otteniamo $(-1)^n = 1$ e quindi abbiamo numeri sempre più vicini a 2 ma strettamente più piccoli di 2. Si ha quindi che 2 è un maggiorante e che esso è il più piccolo dei maggioranti; infatti se $a < 2$ allora per k abbastanza grande

$$2 - \frac{1}{2k} > a$$

e quindi a non è un maggiorante. Conclusione $\sup(A_1) = 2$. Analogamente, ragionando con n dispari, otteniamo che $\inf(A_1) = -2$.
Per A_2, con ragionamento analogo, si ottiene $\sup(A_2) = 5/2$ e $\inf(A_2) = -3$.