g è derivabile per $x > 0$ e la sua derivata può essere calcolata utilizzando la formula (5.41):

$$g'(x) = \int_1^{x^2} \cos(xy)\,dy + 2x\,\frac{\sin(x \cdot x^2)}{x^2} = \left[\frac{\sin(xy)}{x}\right]_{y=1}^{y=x^2} + 2\,\frac{\sin(x^3)}{x}$$
$$= \frac{3\sin(x^3) - \sin(x)}{x}\,.$$

✂ 5.7 Simmetrie e integrali multipli

Sia $S\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un'applicazione lineare, cioè tale che $S(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) = \alpha\,S(\mathbf{x}) + \beta\,S(\mathbf{y})$ per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (si veda il Paragrafo 7.10.1 del primo volume). Diremo che S è una **simmetria** se $S(S(\mathbf{x})) = \mathbf{x}$ per ogni $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Siamo interessati a vedere come la presenza di simmetrie possa semplificare il calcolo degli integrali doppi. Considereremo quindi solo le simmetrie nel piano, cioè le applicazioni lineari $S\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tali che

$$S(S(x,y)) = (x,y), \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2\,,$$

anche se quanto diremo si può estendere con facilità agli integrali tripli.

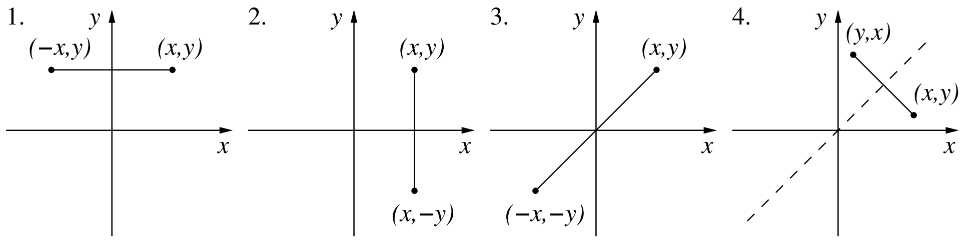

Figura 5.17: Simmetrie 1.–4.

Vediamo subito le simmetrie che vengono utilizzate più spesso per il calcolo degli integrali doppi (si veda la Figura 5.17):

1. $S(x,y) = (-x,y)$ (riflessione rispetto all'asse y);
2. $S(x,y) = (x,-y)$ (riflessione rispetto all'asse x);
3. $S(x,y) = (-x,-y)$ (simmetria rispetto all'origine);
4. $S(x,y) = (y,x)$ (riflessione rispetto alla bisettrice $y = x$).

Definizione 5.23. Sia $D \subset \mathbb{R}^2$ e sia S una simmetria. Diremo che D è simmetrico rispetto alla simmetria S, o più semplicemente che D è S-simmetrico, se

$$(x, y) \in D \iff S(x, y) \in D\,.$$

Esempio 5.24. Il quadrato $D = [-1, 1] \times [-1, 1]$ è simmetrico rispetto a tutte le simmetrie elencate sopra. Verifichiamo, per esempio, che D è S-simmetrico per $S(x, y) = (y, x)$ (riflessione rispetto alla bisettrice). Abbiamo che

$$S(x, y) \in D \iff (y, x) \in D \iff |y| \leq 1,\ |x| \leq 1 \iff (x, y) \in D\,.$$

Il quadrato $[0, 1] \times [0, 1]$ è invece simmetrico solo rispetto alla riflessione rispetto alla bisettrice, mentre il quadrato $[0, 1] \times [1, 2]$ non è simmetrico rispetto a nessuna delle quattro simmetrie elencate sopra.

Definizione 5.25. Sia S una simmetria e sia $D \subset \mathbb{R}^2$ un insieme S-simmetrico. Diremo che una funzione $f : D \to \mathbb{R}$ è

- S-pari, se $f(S(x, y)) = f(x, y)$ per ogni $(x, y) \in D$;
- S-dispari, se $f(S(x, y)) = -f(x, y)$ per ogni $(x, y) \in D$.

Esempio 5.26. Sia $D \subset \mathbb{R}^2$ il triangolo di vertici $(-1, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$ (si veda la Figura 5.15 a pag. 211) e sia $f(x, y) = x^2 y \sin x$. Il dominio D è S-simmetrico rispetto a $S(x, y) = (-x, y)$; inoltre la funzione f è S-dispari, in quanto

$$f(S(x, y)) = f(-x, y) = (-x)^2 y \sin(-x) = -x^2 y \sin x = -f(x, y)\,.$$

L'importanza delle simmetrie nel calcolo degli integrali multipli diventa evidente nel seguente teorema.

Teorema 5.27. *Sia $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una simmetria e sia $D \subset \mathbb{R}^2$ un dominio S-simmetrico. Se $f : D \to \mathbb{R}$ è una funzione continua S-dispari, allora* $\iint_D f(x, y)\, dx\, dy = 0$.

Esempio 5.28. Calcolare l'integrale doppio della funzione

$$f(x,y) = (x^2 + y^2)\arctan(x+y)$$

nel dominio $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + 3y^2 \leq 1\}$.
L'ellisse D è un dominio normale sia rispetto all'asse x che rispetto all'asse y, e la funzione f è continua in D. Osserviamo che f è S-dispari per la simmetria rispetto all'origine $S(x,y) = (-x,-y)$; infatti

$$\begin{aligned} f(S(x,y)) &= f(-x,-y) = [(-x)^2 + (-y)^2]\arctan(-x-y) \\ &= -(x^2+y^2)\arctan(x+y) = -f(x,y) \end{aligned}$$

(nel penultimo passaggio abbiamo utilizzato il fatto che l'arcotangente è una funzione dispari). Rispetto a tale simmetria, il dominio D è S–simmetrico. Infatti

$$\begin{aligned} S(x,y) \in D &\iff (-x,-y) \in D \iff (-x)^2 + 3(-y)^2 \leq 1 \\ &\iff x^2 + 3y^2 \leq 1 \iff (x,y) \in D\,. \end{aligned}$$

Di conseguenza, per il Teorema 5.27 l'integrale richiesto è nullo.
Osserviamo che il dominio D gode anche di altre simmetrie, ma la funzione f risulta dispari solo rispetto alla simmetria usata sopra.

Esempio 5.29. Calcolare l'integrale doppio della funzione

$$f(x,y) = 3 + x\log(1 + x^2 + y^4)$$

nel rettangolo $D = [-1,1] \times [0,3]$.
La funzione f non è S–dispari rispetto a nessuna delle simmetrie viste prima. Tuttavia, se scriviamo

$$f(x,y) = 3 + g(x,y), \qquad \text{con } g(x,y) = x\log(1 + x^2 + y^4),$$

abbiamo che g è una funzione S-dispari rispetto alla simmetria $S(x,y) = (-x,y)$ (riflessione rispetto all'asse y). Inoltre si verifica immediatamente che D è S-simmetrico. Di conseguenza $\iint_D g(x,y)\,dx\,dy = 0$, da cui si ricava

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_D 3\,dx\,dy + \iint_D g(x,y)\,dx\,dy = 3 \cdot \text{area}(D) = 18\,.$$
