Corso di Laurea in Fisica. Geometria. a.a. 2009-10.
Prof. P. Piazza
Esercizi di preparazione all'esame ed all'esonero. Parte 2

Sia V uno spazio vettoriale reale (o più in generale su un campo $\mathbb{K}$) e sia $F : V \to V$ un endomorfismo, $F \in \mathrm{End}(V)$; sia W un sottospazio di V. Diremo che W è *un sottospazio invariante* per F (o *rispetto a* F) se $F(W) \subseteq W$. Se W è un sottospazio invariante, possiamo definire *la restrizione* di F a W: $F|_W \in \mathrm{End}(W)$. Questa è l'applicazione lineare $W \to W$ che associa a $\underline{w} \in W$ il vettore $F(\underline{w})$ (essendo W invariante ne segue che $F(\underline{w}) \in W$). [1]

Esercizio 1 (molto facile). Verificare che se $\underline{v}$ è un autovettore di F allora $\mathbb{R}\underline{v}$ è una retta invariante. Verificare che, viceversa, se $r \subset V$ è una retta invariante per $F \in \mathrm{End}(V)$ allora r è generata da un autovettore per F. Verificare che ogni autospazio è un sottospazio invariante. Verificare che $\mathrm{Im}(F)$ è un sottospazio invariante.

Esercizio 2. Spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$. Sia $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l' operatore lineare definito dalla matrice

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

(2.1) Verificare che i vettori $\underline{v}_1 = (1, 2, 1)$, $\underline{v}_2 = (2, 1, -1)$ costituiscono una base di $\mathrm{Im}T$.

(2.2) *Sia W, per definizione, il sottospazio* $\mathrm{Im}(T)$: $W := \mathrm{Im}T$. Sappiamo (Esercizio 1) che W è un sottospazio invariante per T. Consideriamo la restrizione di T al sottospazio invariante W. Denotiamo come al solito questa restrizione con $T|_W$. Determinare la matrice associata a $T|_W$ nella base $\underline{v}_1, \underline{v}_2$ di W.

(2.3) Stabilire se $T|_W : W \longrightarrow W$ è diagonalizzabile.

Esercizio 3 (risolto in classe il 22/1/10). Spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^4$ con base canonica $\underline{e} = \{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3, \underline{e}_4\}$ fissata. Prodotto scalare canonico $< \, , \, >$.
Sia W il sottospazio 2-dimensionale di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori

$$\underline{g}_1 = (1, 0, 1, 0) \qquad \underline{g}_2 = (0, 1, 0, 1).$$

Si consideri il vettore

$$\underline{h}_1 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}).$$

Sia U il sottospazio generato dai vettori $\underline{g}_1, \underline{g}_2, \underline{h}_1$.
(3.1). Determinare equazioni cartesiane per il sottospazio W.
(3.2). Sia $\underline{h}_2$ l'unico vettore generatore di $U^\perp$ verificante le due condizioni

$$||\underline{h}_2|| = 1 \qquad < \underline{h}_2, \underline{e}_2 >> 0.$$

Determinare le coordinate di $\underline{h}_2$.

---

[1] Ad esempio, sia $V = \mathbb{R}^3$ e sia R_θ è l'operatore di rotazione di un angolo $\theta \in (0, \pi)$ attorno ad un asse $\mathbb{R}\underline{v}$. R_θ è un'applicazione lineare ed è chiaro geometricamente che il piano ortogonale a $\mathbb{R}\underline{v}$, e cioè il piano vettoriale $W = (\mathbb{R}\underline{v})^\perp$, è invariante per R_θ. Fate una figura nel caso $\underline{v} = (0, 0, 1)$. La restrizione di R_θ a questo piano invariante W è l'operatore di rotazione di un angolo θ in W. Notate che in questo caso il piano $(\mathbb{R}\underline{v})^\perp$ è invariante per R_θ ma in $(\mathbb{R}\underline{v})^\perp$ non ci sono rette invarianti o, equivalentemente, non ci sono autovettori. Fate una figura e convincetevi di tutto ciò ragionando geometricamente. In particolare, la restrizione di R_θ a $(\mathbb{R}\underline{v})^\perp$ non è diagonalizzabile.

(3.3). Verificare che $\underline{h}_1, \underline{h}_2$ costituiscono una base ortogonale di $W^\perp$.
(3.4). Sia $T : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ l'operatore lineare definito come segue

(i) W e $W^\perp$ sono sottospazi invarianti per T.

(ii) $T|_W=$ proiezione ortogonale sul vettore $\underline{g}_1$

(iii) $T|_{W^\perp}$ ha la retta $\mathbb{R}(\underline{h}_1+\underline{h}_2)$ come nucleo e la retta $\mathbb{R}(\underline{h}_2-\underline{h}_1)$ come autospazio associato all'autovalore $\lambda = -1$.
Determinate la matrice associata a T nella base canonica.
(3.5). Determinare la dimensione dell'immagine e del nucleo di T. Dire se T è un'isometria.
(3.6). Verificare che il sottospazio V di equazioni

$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

è invariante per T. Dire se T ristretto a V è iniettivo.