Corso di Laurea in Fisica. Geometria. a.a. 2009-10.
Prof. P. Piazza

Soluzione per gli esercizi di preparazione. Parte 2.

L'esercizio **1** è molto semplice. Diamo la soluzione del **2**

Soluzione esercizio 2.

(2.1) Sia A la matrice che definisce T. È subito visto che A ha rango 2 e quindi $\mathrm{Im}(T)$ ha dimensione 2. Notiamo poi che $\underline{v}_1$ è la somma delle prime due colonne di A e che $\underline{v}_2$ è la somma della seconda e terza colonna di A. Ne segue che $\underline{v}_1, \underline{v}_2 \in \mathrm{Im}(T)$; essendo non paralleli ne segue che sono una base di $\mathrm{Im}(T)$.

(2.2) Sia $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$ la fissata base di $\mathrm{Im}(T)$. Per semplificare la notazione, poniamo $T|_W = T'$; sia A' la matrice associata a T' nella base $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$. Per determinare A' basta esprimere

$$T'\underline{v}_1 = \alpha\underline{v}_1 + \beta\underline{v}_2 \qquad T'\underline{v}_2 = \gamma\underline{v}_1 + \delta\underline{v}_2$$

perché allora, per definizione di matrice associata ad un endomorfismo in una fissata base, si avrà:

$$A' = \begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{vmatrix}$$

Si ha

$$T'\underline{v}_1 = T\underline{v}_1 = A\underline{v}_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{vmatrix}$$

e, analogamente, $T'\underline{v}_2 = (1, 3, 2)$. Rimane quindi da esprimere $(2, 3, 1)$ e $(1, 3, 2)$ in funzione di $\underline{v}_1$ $\underline{v}_2$: impostando i due semplici sistemi

$$\begin{cases} 2 = \alpha + 2\beta \\ 3 = 2\alpha + \beta \\ 1 = \alpha - \beta \end{cases} \qquad \begin{cases} 1 = \gamma + 2\delta \\ 3 = 2\gamma + \delta \\ 2 = \gamma - \delta \end{cases}$$

e risolvendo in α, β e γ, δ si trova

$$A' = \begin{vmatrix} 4/3 & 5/3 \\ 1/3 & -1/3 \end{vmatrix}$$

(2.3) Calcolando il polinomio caratteristico $\det(A' - \lambda\,\mathrm{Id})$ si verifica che T' ha gli autovalori *reali* e *distinti* ed è quindi diagonalizzabile.

Soluzione esercizio 3.

(3.1) W ha equazioni $x_1 - x_3 = 0 = x_2 - x_4$.

(3.2) $(U)^\perp$ ha equazioni

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

e ne segue che $(U)^\perp = \mathbb{R}(-1, 1, 1, -1)$. Ne segue che $\underline{h}_2 = \frac{1}{2}(-1, 1, 1, -1)$

(3.3) Immediato.

(3.4) Consideriamo la base *ortogonale* $\mathcal{G} = \{\underline{g}_1, \underline{g}_2, \underline{h}_1 + \underline{h}_2, \underline{h}_1 - \underline{h}_2\}$ e sia $\mathcal{F}$ la base *ortonormale* associata. Denotiamo con $\mathcal{E}$ la base canonica. Dalla definizione di T segue subito che

$$M_{\mathcal{F}}^{\mathcal{F}}(T) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

Sia C la matrice del cambiamento di base, dalla base canonica alla base $\mathcal{F}$: $C = M_{\mathcal{F}}^{\mathcal{E}}(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^4})$; questa è la matrice che ha come j-ma colonna le coordinate di $\underline{f}_j$ nella base $\mathcal{E}$. Si ha $C^{-1} = C^T$ perché le due basi sono ortonormali. Dalla formula magica si ottiene:

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(T) = C \cdot M_{\mathcal{F}}^{\mathcal{F}}(T) \cdot C^T$$

e cioè

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(T) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

(3.5) $\dim \mathrm{Ker}(T) = \dim \mathrm{Im} T = 2$

(3.6) $V = \mathrm{Span}(\underline{e}_1, \underline{e}_3)$. Esaminando la matrice $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(T)$ scopriamo che $T\underline{e}_1 = \underline{e}_3$ e $T\underline{e}_3 = \underline{e}_1$. Ne segue che V è invariante e $T|_V$ è una biezione.