Corso di Laurea in Fisica. Geometria. a.a. 2009-10.
Prof. P. Piazza

Esercizi di preparazione all'esame ed all'esonero. Parte 1

Esercizio 1. Consideriamo $\mathcal{V}_O^3$ che è uno spazio vettoriale metrico. Fissiamo una base ortonormale $\{\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}\}$ e consideriamo le coordinate associate. Scriviamo un vettore tramite le sue coordinate.
Determinare le coordinate dei vettori $\underline{v}$ di lunghezza uguale a 2 ed ortogonali sia a $\underline{f} = (1, -1, 2)$ che a $\underline{g} = (0, 1, -1)$.
Potete utilizzare il prodotto *vettoriale*.

Esercizio 2. Consideriamo nuovamente $\mathcal{V}_O^3 \equiv V$, con base ortonormale $\{\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}\}$.
(i) Determinare le coordinate dei vettori $\underline{v} \in V$ che sono complanari a $\underline{f} = (1, -2, 0)$ e $\underline{g} = (2, 0, 1)$, hanno lunghezza uguale a $\sqrt{6}$ e sono ortogonali a $(3, -1, -1)$.
(ii) Detto $\underline{v}_1$ il vettore determinato in (i) che forma un angolo ottuso con $\underline{j}$, determinare le coordinate del vettore proiezione ortogonale di $\underline{v}_1$ su $\mathbb{R}\underline{f}$.

Esercizio 3. Sia V uno spazio vettoriale reale. Fissiamo una base $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$. Consideriamo una matrice *simmetrica* A. Consideriamo l'applicazione $b_A : V \times V \to \mathbb{R}$ definita da

$$b_A(\underline{u}, \underline{w}) = |y_1, \dots, y_n| \, A \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{vmatrix} = \underline{y}^T A \, \underline{x} \tag{1}$$

se $\underline{u} = x_1\underline{v}_1 + \cdots + x_n\underline{v}_n$ e $\underline{w} = y_1\underline{v}_1 + \cdots + y_n\underline{v}_n$. Verificare che abbiamo definito in questo modo una forma bilineare simmetrica e che la matrice associata a $b_A(\, , \,)$ nella base fissata $\mathcal{B}$ è proprio A.
Notiamo che in questo modo possiamo introdurre un prodotto scalare in V fissando $A = I_n$, la matrice identità (quindi: introduciamo un prodotto scalare stipulando che i vettori della fissata base siano ortonormali).

Esercizio 4 (risolto in classe il 20/1/10). Sia

$$A = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{vmatrix}.$$

4.1 Dimostrare che l'applicazione lineare $F_A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definita da A è diagonalizzabile.
4.2 Determinare una matrice B tale che $\Delta := B^{-1}AB$ sia diagonale.
4.3 Calcolare A^{1223}.
Suggerimento: Δ^{1223} è facilmente calcolabile. Come sono collegati A^{1123} e Δ^{1223} ? Utilizzare **4.2**.

Esercizio 5 (risolto in classe il 20/1/10). Due delle matrici

$$
\begin{aligned}
A_1 &= \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \\
A_2 &= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} \\
A_3 &= \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\
A_4 &= \begin{vmatrix} 5/2 & 1/8 \\ 2 & 5/2 \end{vmatrix} \\
A_5 &= \begin{vmatrix} 3/2 & 1 \\ -1 & -1/2 \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

sono *simili*[1]: dire quali e giustificare la risposta.
Suggerimento: utilizzare il polinomio caratteristico.

Esercizio 6 (risolto in classe il 20/1/10). Dimostrare la seguente:
Proposizione. Sia $F : V \to V$ lineare e siano $\{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$ gli autovalori distinti di F. Allora

$$V_{\lambda_1}(F) + \cdots + V_{\lambda_k}(F) = V_{\lambda_1}(F) \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_k}(F).$$

Suggerimento: basta verificare che la decomposizione è unica....
Utilizzate l'Oss. 13.6

Esercizio 7 (risolto in classe il 20/1/10). Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione n e sia $F : V \to V$ lineare. Facciamo le seguenti ipotesi su F:
(i) Le radici di $P_F(T)$ sono 1 e 0 con $m_a(0) = k$ e $m_a(1) = n - k$.
(ii) $m_g(0) = m_a(0)$ e $m_g(1) = m_a(1)$.
Dimostrare che sotto queste ipotesi F è l'operatore di proiezione su $V_1(F)$ parallelamente a $V_0(F) = \mathrm{Ker}(F)$.

Verificare che se invece: (i) le radici di $P_F(T)$ sono 1 e (-1) con $m_a(1) = k$ e $m_a(-1) = n - k$. (ii) $m_g(1) = m_a(1)$, $m_g(-1) = m_a(-1)$ *allora* F è la simmetria rispetto a $V_1(F)$ parallelamente a $V_{(-1)}(F)$.

[1] vi ricordo che due matrici A e A' sono simili se esiste una matrice invertibile B tale che $A' = B^{-1}AB$. Osservazione: se A e A' sono simili e se A' e A'' sono simili allora A e A'' sono anche simili:

$$A'' = C^{-1}A'C = C^{-1}B^{-1}ABC = (BC)^{-1}A(BC)$$