Paolo Piazza

Corso di Laurea Specialistica

Teoria di Hodge

a.a. 2004-05

Riassunto delle lezioni e guida alla letteratura

Contents

1. Funzioni olomorfe di più variabili.

Definizione di funzione olomorfa in un dominio U di $\mathbb{C}^n$.
Gli operatori $\frac{\partial}{\partial z_k}$, $\frac{\partial}{\partial \overline{z}_k}$.
Equazioni di Cauchy-Riemann.
Enunciato e dimostrazione della formula di Cauchy per funzioni olomorfe di più variabili .
Abbiamo utilizzato tale formula per enunciare l'importante risultato:
f è olomorfa se e solo se è analitica complessa.
Abbiamo tratto importanti conclusioni da questo fatto: ad esempio se f è olomorfa in un dominio U di $\mathbb{C}^n$, allora f è derivabile infinite volte rispetto ad ogni z_j e le sue derivate sono anche olomorfe. Abbiamo anche ottenuto il pricipio di identità delle funzioni olomorfe: se due funzioni olomorfe in U (connesso) coincidono in un intorno di un punto, allora le due funzioni coincidono su tutto U.
Abbiamo enunciato il teorema di estensione di Hartogs.
Abbiamo dato la definizione di applicazione olomorfa $U \to \mathbb{C}^m$.
Formula di derivazione (complessa) per funzioni composte. La composizione di applicazioni olomorfe è olomorfa.
Jacobiano reale $J_{\mathbb{R}}(f)$ e complesso $J_{\mathbb{C}}(f)$ di un'applicazione olomorfa $f : U \subset \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$:

$$J_{\mathbb{R}}(f) = B^{-1} \begin{pmatrix} J_{\mathbb{C}}(f) & 0 \\ 0 & \overline{J_{\mathbb{C}}(f)} \end{pmatrix} B\,,$$

con $B \in GL(2n, \mathbb{C})$[1].
Corollario: le applicazioni olomorfe mantengono l'orientazione:
$\det J_{\mathbb{R}}(f) = \det J_{\mathbb{C}}(f)\overline{\det J_{\mathbb{C}}(f)} = |\det J_{\mathbb{C}}(f)| \geq 0$.
Teorema della funzione inversa per funzioni olomorfe.
Teorema della funzione implicita per funzioni olomorfe.

Referenze bibliografiche. [Ko] pp 1 - 12; 24-27. Per gli ultimi due punti si veda anche [GH] pp 18, 19.

2. Varietà complesse

Definizione di varietà complessa. [Ko]
Strutture complesse. [Ko]
Sottovarietà. [Ko] [GH]
Definizione varie usando le carte complesse (funzioni olomorfe su varietà etc...) [Ko]
Esempi: spazio proiettivo; grassmanniane, sottovarietà algebriche proiettive. [We]
Non esistono sottovarietà complesse compatte di $\mathbb{C}^n$. [We]
Azioni libere propriamente discontinue. Tori. Varietà di Hopf. [Ko]

Referenze bibliografiche. Le citazioni rimandano più precisamente a [Ko] pp 28-35; [W] capitolo 1, sezione 1 ; [Ko] pp 43-50.

3. Fibrati vettoriali

Definizione di fibrato vettoriale reale/complesso di rango k.
Fibrato olomorfo.
Funzioni di transizione.

[1] B è la matrice di cambiamento di coordinate, dalle $x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n$ alle $z_1, \ldots, z_n, \overline{z}_1, \ldots, \overline{z}_n$

Definizione alternativa in termini di funzioni di transizione.
Morfismi di fibrati.
Operazioni elementari (somma, prodotto tensoriale, etc)
Fibrato indotto (pull-back).
Esempi: fibrato tangente, fibrato universale sulla grassmanniana.
Enunciato teorema di classificazione.
Sezioni. Spazio delle sezioni C^∞: $C^\infty(M, E)$. Descrizione locale. Sezioni linearmente indipendenti. Basi locali.
Il fibrato universale sullo spazio proiettivo non è banale.
Metriche riemanniane ed hermitiane. Descrizione locale.
Sottofibrato. Fibrato quoziente.
Esempio: fibrato tangente olomorfo $T'M$ ad una varietà complessa M. Fibrato antiolomorfo $T''M$. Decomposizione $(T_{\mathbb{R}}M) \otimes \mathbb{C} := T_{\mathbb{C}}M = T'M \oplus T''M$. Forme differenziali come sezioni. Forme di tipo (p, q). $d = \partial + \overline{\partial}$. Definizione di coomologia di Dolbeault.

Referenze bibliografiche. Il materiale fondazionale sui fibrati vettoriali è reperibile in [We] [GH] ed in molti altri libri. Potete anche consultare [P01] [P02]. Il fibrato tangente è discusso in [We]. Per una trattazione completa ed elementare del fibrato tangente si consulti [Wa]. Il teorema di classificazione è discusso in [A]; si veda [P02] per uno sketch della dimostrazione. Per l'ultimo punto (fibrato tangente olomorfo etc ...) si veda ad esempio [GH].

4. Connessioni

Definizione di connessione.
Derivata covariante di una sezione lungo un campo di vettori.
Lo spazio delle connessioni su $E \to M$ è uno spazio affine su $C^\infty(M, \mathrm{End}(E) \otimes T^*M)$.
Descrizione locale. Matrice locale di 1-forme. Formule di collegamento.
Esempi: connessione indotta per proiezione ortogonale sul fibrato tangente ad una sottovarietà di $\mathbb{R}^n$ [2]. Connessione sul fibrato universale sulla grassmanniana.
Trasporto parallelo.
Se $f_0, f_1 : N \to M$ sono omotope e l'omotopia è C^∞ allora $f_0^*E \simeq f_1^*E$ per ogni fibrato E su M.
Corollario: un fibrato con base M contraibile ad un punto è banale.

Referenze bibliografiche. Potete consultare [P01], pp 11-16.

5. Operatori pseudodifferenziali (teoria locale).

5.1. Trasformata di Fourier.

Denotiamo con $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ un multi-indice. Poniamo

$$|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n\,, \quad \alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_n! \quad \text{e} \quad x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}.$$

Utilizzeremo la notazione

$$D^\alpha = (\frac{1}{\sqrt{-1}})^{|\alpha|} \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}\,.$$

[2] Attenzione: nell'esempio 1 pag 15 di [P01] d denota la connessione banale su $X \times \mathbb{R}^N$ e non il differenziale in $\mathbb{R}^N$; l'esempio va bene come è scritto e non necessita alcuna modifica.

Sia $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset C^\infty(\mathbb{R}^n)$ lo spazio delle funzioni a decrescenza rapida; è un'algebra commutativa rispetto al prodotto dato dalla convoluzione di due funzioni

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy = (g * f)(x).$$

Vi ricordo anche che $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ è uno spazio di Fréchet con seminorme definite da

$$p_{\alpha,\beta}(f) = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\beta D^\alpha f|$$

e che $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ è denso in $L^2(\mathbb{R}^n)$.
Sia $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$; la sua trasformata di Fourier, $\mathcal{F}(f) \equiv \hat{f}$, è la funzione

$$\hat{f}(\xi) := \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i<x,\xi>} f(x)dx \tag{1}$$

È immediato verificare che $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$; otteniamo in questo modo un'applicazione lineare

$$\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Teorema 1. *La trasformata di Fourier $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ è un isomorfismo di spazi di Fréchet con inversa data da*

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i<x,\xi>} \hat{f}(\xi)d\xi \tag{2}$$

Per ogni multi-indice α

$$\xi^\alpha \hat{f} = \widehat{(D_x^\alpha f)}\,, \quad D_\xi^\alpha \hat{f} = (-1)^{|\alpha|}\widehat{(x^\alpha f)} \tag{3}$$

Inoltre

$$\widehat{f * g} = \hat{f}\hat{g}\,, \quad \widehat{fg} = \hat{f} * \hat{g} \tag{4}$$

Vale, infine, la formula di Plancharel:

$$(f,g)_{L^2} = (\hat{f},\hat{g})_{L^2} \tag{5}$$

$\mathcal{F}$ si estende quindi ad un isomorfismo di $L^2(\mathbb{R}^n)$ che è una isometria.

5.2. **Spazi di Sobolev.**

Sia $s \in \mathbb{R}$; la norma di Sobolev di ordine s di una funzione $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ è data da

$$\|f\|_s^2 := \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|)^{2s} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi\ .$$

Si ottiene una norma equivalente sostituendo al posto di $(1+|\xi|)^{2s}$ l' espressione $(1+|\xi|^2)^s$. Se $s = k \in \mathbb{N}$ allora possiamo ulteriormente sostituire a $(1+|\xi|^2)^s$ l'espressione $\sum_{|\alpha|\leq k} |\xi^\alpha|^2$. Utilizzando quest'ultima espressione e le proprietà della trasformata di Fourier scopriamo che una norma equivalente a quella data, sempre nel caso $s = k \in \mathbb{N}$, è

$$\|f\|_k^2 = \sum_{|\alpha|\leq k} \int_{\mathbb{R}^n} |D_x^\alpha f|^2 dx\,.$$

La norma C^k di una funzione $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ è data da

$$\|f\|_{C^k} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \sum_{|\alpha|\leq k} |D^\alpha f|^2\,.$$

Definizione 1. *Lo spazio di Sobolev di ordine s è il completamento di $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ rispetto alla norma $\| \, \|_s$.*

Gli spazi di Sobolev sono spazi L^2 ma con una misura diversa da quella di Lebesgue. Notazioni equivalenti per questi spazi di Hilbert sono le seguenti: $L^2_s(\mathbb{R}^n)$ oppure $W^{s,2}(\mathbb{R}^n)$.
I seguenti risultati, dimostrati in dettaglio a lezione, riassumono alcune proprietà fondamentali degli spazi di Sobolev.

Lemma 1. *(Lemma di Sobolev.) Sia $k \in \mathbb{N}$ e sia $s > k + n/2$. Se $f \in H_s(\mathbb{R}^n)$ allora $f \in C^k(\mathbb{R}^n)$ e $\|f\|_{C^k} \leq C\|f\|_s$.*

Se $s > t$ allora $(1 + |\xi|^2)^s \geq (1 + |\xi|^t)^2$ e quindi $\|f\|_s \geq \|f\|_t$. Ne segue che $H_s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H_t(\mathbb{R}^n)$.

Lemma 2. *(Lemma di Rellich.) Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ con supporto contenuto in un compatto $K \subset \mathbb{R}^n$. Sia $s > t$ e supponiamo che $\exists C \mid \ \|f_n\|_s \leq C \ \forall n$. Allora esiste una sottosuccessione $\{f_{n_k}\}$ che converge in $H_t(\mathbb{R}^n)$.*

In parole: se $s > t$, una successione limitata in $H_s(\mathbb{R}^n)$ e con supporto uniformemente contenuto in un compatto K ammette una sottosucessione convergente in $H_t(\mathbb{R}^n)$.

Consideriamo, infine, l'applicazione $\mathcal{S} \times \mathcal{S} \longrightarrow \mathbb{C}$ definita da

$$f, g \longrightarrow |(f, g)_{L^2}|.$$

Abbiamo dimostrato che quest'applicazione si estende ad un'applicazione bilineare

$$H_s(\mathbb{R}^n) \times H_{-s}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{C}$$

che identifica $H_{-s}(\mathbb{R}^n)$ con il duale di $H_s(\mathbb{R}^n)$.

5.3. **Introduzione agli operatori pseudodifferenziali.**

Sia $P = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(x) D^\alpha_x$, $a_\alpha \in C^\infty_c(\mathbb{R}^n)$, un operatore differenziale di ordine k. Il *simbolo* di P è la funzione $\sigma(P) \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ definita da

$$\sigma(P)(x, \xi) = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(x) \xi^\alpha$$

Per semplificare la notazione spesso scriveremo semplicemente $p(x, \xi)$ al posto di $\sigma(P)(x, \xi)$. Il *simbolo principale* di P è la funzione

$$\sigma_{\text{pr}}(P)(x, \xi) = \sum_{|\alpha| = k} a_\alpha(x) \xi^\alpha.$$

Possiamo fare uso delle proprietà della trasformata di Fourier viste nella lezione precedente e scrivere $\forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$(6) \qquad (Pf)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i<x,\xi>} p(x, \xi) \hat{f}(\xi) \frac{d\xi}{(2\pi)^{n/2}} .$$

Sappiamo dal teorema fondamentale del calcolo che l'inverso di un operatore differenziale (invertibile) non è più un operatore differenziale; la nozione di *operatore pseudodifferenziale* permette di definire un'algebra di operatori che contiene gli operatori differenziali e, se definiti, i loro inversi, le loro potenze complesse etc. L'idea, molto semplice, è quella di sostituire al posto delle funzione $p(x, \xi)$ che compare in (6), e che è ovviamente una funzione polinomiale in ξ, una funzione più generale ma con specifiche proprietà asintotiche in ξ; per analogia con il caso differenziale una tale funzione è detta un *simbolo*. La trattazione che segue tende a minimizzare l'uso delle distribuzioni ed è particolarmente adatta all'estensione che ne daremo alle varietà *compatte.*

5.4. **Spazio dei simboli. Definizione di operatore pseudodifferenziale di ordine m.**

Definizione 2. *Lo spazio dei simboli di ordine m, $S^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ è definito come lo spazio vettoriale delle funzioni $p(x,\xi) \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ verificanti le seguenti proprietà*

- *$p(x,\xi)$ ha x-supporto compatto uniformemente in ξ.*
- *$\forall \alpha, \beta \; \exists \, C_{\alpha,\beta}$ tale che*

$$|D_x^\alpha D_\xi^\beta p(x,\xi)| \leq C_{\alpha,\beta}(1+|\xi|)^{m-|\beta|} \tag{7}$$

Notazione. Poniamo

$$S^{-\infty}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n) := \cap_m S^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n) \quad \text{e} \quad S^{\infty}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n) := \cup_m S^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n).$$

Scriveremo spesso S^m al posto di $S^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$.

Definizione 3. *L'operatore pseudodifferenziale associato al simbolo $p(x,\xi) \in S^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ è l'operatore $p(x,D)$ definito dalla formula*

$$(p(x,D)f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i<x,\xi>} p(x,\xi) \hat{f}(\xi) \frac{d\xi}{(2\pi)^{n/2}} \; ; \; f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \tag{8}$$

Non è difficile verificare, ed è un esercizio del terzo compito a casa, che $p(x,D)$ manda $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Denotiamo con $\Psi^m(\mathbb{R}^n)$, o più semplicemente con Ψ^m, lo spazio vettoriale di tutti gli operatori pseudodifferenziali di ordine m. Se $P \in \Psi^m$ denoteremo il simbolo di P con $\sigma(P)$ oppure con p. Abbiamo dimostrato a lezione il seguente importante risultato:

Teorema 2. *Se $P \in \Psi^m(\mathbb{R}^n)$ allora $\forall s \in \mathbb{R}$ l'operatore P si estende ad un operatore continuo $P : H_s(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H_{s-m}(\mathbb{R}^n)$.*

Se necessario denoteremo con P_s quest'estensione. Se $P \in \Psi^{-m}$, $m > 0$ allora $P : H_s(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H_{s+m}(\mathbb{R}^n)$. Tenendo presente il Lemma di Sobolev, questo vuol dire che operatori di ordine negativo regolarizzano. In particolare se $P = p(x,D)$ con $p(x,\xi) \in S^{-\infty}$, allora $P : H_s \to H_t \; \forall s,t$. Per il Lemma di Sobolev $P : H_s \to C^\infty \; \forall s$. Un tale operatore è detto **infinitamente regolarizzante** o anche semplicemente regolarizzante.
Diremo che due simboli p e q sono *equivalenti*, e scriveremo $p \sim q$, se $p - q \in S^{-\infty}$. Diremo che due operatori P e Q sono *equivalenti*, e scriveremo $P \sim Q$, se $P - Q$ è un operatore regolarizzante.

Definizione 4. *Sia e sia $p \in S^\infty$. Diremo che p ha sviluppo asintotico uguale a $\sum p_j$ e scriveremo $p \sim \sum p_j$ se $\forall d \in \mathbb{N} \; \exists k(d)$ tale che $\forall k \geq k(d)$*

$$p - \sum_{j \leq k} p_j \; \in \; S^{-d}.$$

In parole, a patto di prendere k abbastanza grande, la differenza $p - \sum_{j \leq k} p_j$ definisce un operatore di ordine arbitrariamente negativo e quindi un operatore arbitrariamente regolarizzante. Il seguente importante lemma ci permetterà di costruire operatori pseudodifferenziali con specifiche proprietà

Lemma 3. *(Completezza Asintotica). Sia $p_j \in S^{d_j}$, $d_j \to -\infty$. Allora esiste $p \in S^\infty$ tale che $p \sim \sum p_j$.*

5.5. **Lemma di Kuranishi e sue conseguenze. Pseudolocalità.**
Il seguente lemma tecnico riveste un'importanza fondamentale nello sviluppo del calcolo pseudodifferenziale. Gli elementi di volume negli integrali sono intesi normalizzati, e cioè divisi per il fattore $(2\pi)^{n/2}$ come in (6).

Lemma 4. *(Lemma di Kuranishi) Sia $d \in \mathbb{R}$ e sia $a(x,y,\xi) \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ un simbolo in 2+1=3 variabili; quindi $a(x,y,\xi)$ ha supporto compatto nella variabili x e y e $\forall\, \alpha, \beta, \gamma\ \exists\, C_{\alpha,\beta,\gamma}$ tale che*

$$|D_x^\alpha D_y^\beta D_\xi^\gamma a(x,y,\xi)| \leq C_{\alpha,\beta,\gamma}(1+|\xi|)^{d-|\gamma|}\,.$$

Consideriamo l'operatore lineare $A : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ definito dall'integrale iterato

$$(Af)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i<x-y,\xi>} a(x,y,\xi) f(y) dy d\xi\,.$$

Allora $A \in \Psi^d(\mathbb{R}^n)$ ed il simbolo $\sigma(A)$ di A ha uno sviluppo asintotico

$$\sigma(A)(x,\xi) \sim \sum_\alpha \frac{i^{|\alpha|}}{\alpha!}(D_\xi^\alpha D_y^\alpha a)(x,y,\xi)_{|x=y} \tag{9}$$

Abbiamo discusso in classe i seguenti corollari del Lemma di Kuranishi:

1. Innanzitutto, se $a(x,y,\xi) \equiv 0$ in un intorno U della diagonale $\Delta \subset \mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_y$ allora $A \in \Psi^{-\infty}$.
2. Se $K(x,y) \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ ha supporto compatto allora l'operatore

$$P_K(f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x,y) u(y) dy$$

definisce un operatore $P_K \in \Psi^{-\infty}$. Gli operatori integrali con nucleo C^∞ sono quindi operatori pseudodifferenziali infinitamente regolarizzanti.
3. Se nell'enunciato del Lemma $d < -n-k$ allora l'integrale

$$K(x,y) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i<x-y,\xi>} a(x,y,\xi) d\xi$$

definisce una funzione $C^k(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ e si ha

$$Af(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x,y) f(y) dy.$$

K è detto nucleo di Schwartz di A. Se in particolare $d = -\infty$ allora il necleo di Schwartz è C^∞ e $A \in \Psi^{-\infty}$. Per d arbitrario il nucleo di Schwartz è ancora definito come *distribuzione.*
4. Un operatore è detto ϵ-locale se $\forall u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ $\operatorname{supp}(Au) \subset \{x \mid d(x, \operatorname{supp} u) < \epsilon\}$. Se $P \in \Psi^d$ allora $P \sim P_\epsilon$ con P_ϵ un operatore in Ψ^d che è ϵ-locale.
5. Se $\chi_1, \chi_2 \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $P \in \Psi^d$ allora anche l'operatore $\widetilde{P}$ definito da $\widetilde{P}(f) := \chi_1 P(\chi_2 f)$ è un operatore in Ψ^d.
6. (Pseudolocalità.)
A differenza degli operatori differenziali gli operatori pseudodifferenziali non conservano il supporto di una funzione. Basta pensare al caso di un operatore integrale con nucleo C^∞. Si dice anche che gli operatori pseudodifferenziali non sono *locali*: essi godono però di una proprietà più debole, detta pseudolocalità. Vediamo di cosa si tratta. Sia $P \in \Psi^d$ e sia $u \in H_s$. Supponiamo che in un aperto $V \subset \mathbb{R}^n$ si abbia $u_{|_V} \in C^\infty$; *allora* $Pu_{|_V} \in C^\infty$. Nel linguaggio delle distribuzioni questo vuol dire che P conserva il supporto singolare.

5.6. **Composizione. Aggiunto formale. Diffeomorfismi.**

Sia $P \in \Psi^d$. Diremo che P ha supporto contenuto nel compatto $K \subset \mathbb{R}^n$ se
(i) $\mathrm{supp} Pf \subset K \ \forall f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$
(ii) $\mathrm{supp} u \cap K = \emptyset \Longrightarrow Pu = 0$.
Denotiamo con Ψ_K^d il sottospazio degli operatori a supporto in K. Il Lemma di Kuranishi viene anche e soprattutto utilizzato per dimostrare i suguenti tre teoremi fondamentali. Il primo afferma che lo spazio vettoriale $\Psi_K^* := \cup_d \Psi_K^d$ ha una struttura di algebra.

Teorema 3. *Sia* $P = p(x, D) \in \Psi_K^d$ *e* $Q = q(x, D) \in \Psi_K^{d'}$. *Allora* $P \circ Q \in \Psi_K^{d+d'}$ *e*

$$\sigma(P \circ Q) \sim \sum_\alpha \frac{i^{|\alpha|}}{\alpha!} (D_\xi^\alpha p)(D_x^\alpha q) \,. \tag{10}$$

Il secondo risultato afferma che esiste una naturale involuzione in Ψ_K^d:

Teorema 4. *Sia* $P = p(x, D) \in \Psi_K^d$. *Allora esiste un unico operatore* P^*, *detto aggiunto formale di* P, *tale che*

$$(Pf, g)_{L^2} = (f, P^* g)_{L^2} \,, \quad \forall f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \ \textit{e con supporto in } K \,.$$

Si ha inoltre

$$P^* \in \Psi_K^d \quad \textit{e} \quad \sigma(P^*) \sim \sum_\alpha \frac{i^{|\alpha|}}{\alpha!} (D_\xi^\alpha D_x^\alpha \overline{p}) \,. \tag{11}$$

Fino ad ora abbiamo lavorato in $\mathbb{R}^n$; se $U \subset \mathbb{R}^n$ è un aperto di $\mathbb{R}^n$ allora è chiaro che è ancora ben definito lo spazio dei simboli $S^d(U \times \mathbb{R}^n)$ e lo spazio vettoriale $\Psi^d(U)$. Tenendo presente la teoria globale che stiamo per sviluppare, possiamo denotare lo spazio dei simboli tramite $S^d(T^*U)$ co $T^*U = U \times \mathbb{R}^n$ lo spazio cotangente. Possiamo anche definire $\Psi_K^*(U)$ con K sottoinsieme compatto di U. I due teoremi appena enunciati si estendono senza difficoltà a $\Psi_K^*(U)$.
Supponiamo ora che $\phi : U \to V$ sia un diffeomorfismo fra due aperti di $\mathbb{R}^n$. Sia $P \in \Psi_K^d(U)$. Definiamo un operatore $\phi_* P : C_c^\infty(V) \to C_c^\infty(V)$ come segue:

$$((\phi_* P)f)(y) = (P(f \circ \phi)(\phi^{-1}(y)) \,.$$

Il seguente teorema ci permetterà di globalizzare i risultati locali alle varietà differenziabili.

Teorema 5. $\phi_* P \in \Psi_{\phi(K)}^d(V)$ *e per il simbolo* $\sigma(\phi_* P)$ *si ha*

$$\sigma(\phi_* P)(\phi(x), \eta) \sim \sum_\alpha \frac{1}{\alpha!} \phi_\alpha(x, \xi) D_\xi^\alpha p(x, (\phi')^t(x)\eta) \,. \tag{12}$$

con ϕ' *uguale alla matrice Jacobiana di* ϕ *e* $\phi_\alpha(x, \xi)$ *polinomiale in* ξ *di grado* $\le |\alpha|/2$ *e* $\phi_0(x, \xi) \equiv 1$.

Riassumendo: se denotiamo con $(\ )^*$ il passaggio all'aggiunto formale e se $\phi : U \to V$ è un diffeomorfismo allora

$$\Psi_K^d(U) \circ \Psi_K^{d'}(U) \subset \Psi_K^{d+d'}(U) \,; \quad (\ )^* : \Psi_K^d(U) \to \Psi_K^d(U) \,; \quad \phi_* : \Psi_K^d(U) \to \Psi_{\phi(K)}^d(V) \tag{13}$$

e dalle formule (10), (11), (5) deduciamo che per i simboli principali valgono le seguenti notevoli formule:

$$\sigma_{\mathrm{pr}}(P \circ Q) = \sigma_{\mathrm{pr}}(P) \sigma_{\mathrm{pr}}(Q) \qquad \sigma_{\mathrm{pr}}(P^*) = \overline{\sigma_{\mathrm{pr}}(P)} \,, \tag{14}$$

$$\sigma_{\mathrm{pr}}(\phi_* P)(y,\eta) = \sigma_{\mathrm{pr}}(P)(\phi_1(y), J(y)\eta) \tag{15}$$

con $\phi_1 = \phi^{-1}$ e $J(y) = ((\phi_1'(y))^{-1})^t$.

Quanto appena visto può essere generalizzato senza difficoltà ad operatori che agiscono su funzioni a valori vettoriali. Tenendo presente che dovremo fra poco generalizzare ad operatori che agiscono su sezioni di fibrati vettoriali su varietà differenziabili, adottiamo qui una notazione un pò artificiale.
Sia quindi U un aperto di $\mathbb{R}^n$ e sia $\mathbf{I}^k \to U$ il fibrato banale $\mathbf{I}^k \equiv U \times \mathbb{C}^k \to U$. Le sezioni di $\mathbf{I}^k \to U$ sono le funzioni a valori in $\mathbb{C}^k$. Analogamente le funzioni a valori matrici in $\mathcal{M}_{k\times\ell}(\mathbb{C})$ sono le sezioni del fibrato banale $\mathrm{Hom}(\mathbf{I}^k, \mathbf{I}^\ell)$. $C^\infty(U, \mathbf{I}^k)$ sono le funzioni vettoriali che sono C^∞. Un operatore pseudodifferenziale di ordine d, $P : C_c^\infty(U, \mathbf{I}^k) \longrightarrow C^\infty(U, \mathbf{I}^\ell)$, è definito da un simbolo $p(x,\xi)$ con $p(\ ,\ ) \in C^\infty(T^*U, \mathrm{Hom}(\mathbf{I}^k, \mathbf{I}^\ell))$, $p(\ ,\ ) = (p_{ij}(\ ,\ ))$ ed almeno un elemento della matrice ha ordine d. Per definizione $P = (p_{ij}(x,D))$. Denotiamo questo spazio di operatori con $\Psi^*(U, \mathbf{I}^k, \mathbf{I}^\ell)$. I risultati appena dimostrati valgono ancora per questi operatori. Per quel che concerne P^*; esso è definito tramite i prodotti scalari L^2

$$\int_U < f(x), g(x) > dx\,, \qquad f, g \in C_c^\infty(U, \mathbf{I}^j)$$

con $<\,,\,>$ uguale al prodotto hermitiano canonico in $\mathbb{C}^j$. Si ha

$$\sigma_{\mathrm{pr}}(P^*) = (\overline{\sigma_{\mathrm{pr}}(P)})^t\,. \tag{16}$$

6. Teoria globale. Operatori pseudodifferenziali classici. Operatori ellittici.

6.1. **Operatori su varietà. Fibrati vettoriali.**

Sia M una varietà differenziabile di dimensione n. Per semplicità supporremo direttamente M compatta e orientabile, anche se molte definizioni si estendono senza difficoltà al caso generale. Fissiamo una metrica riemanniana g su M e denotiamo con dg la forma di volume associata. Sia $P : C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M)$ un operatore lineare. Sia $(\mathcal{O}, \kappa : \mathcal{O} \longrightarrow U \subset \mathbb{R}^n)$ una carta locale e sia $\kappa_1 = \kappa^{-1}$. Abbiamo due applicazioni naturali, di inclusione e di restrizione:

$$i_{\mathcal{O}} : C_c^\infty(\mathcal{O}) \longrightarrow C^\infty(M)\,, \qquad r_{\mathcal{O}} : C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(\mathcal{O})\,.$$

L'inclusione è data estendendo una funzione uguale a zero fuori dal suo supporto. Sia

$$P_{\mathcal{O}} = r_{\mathcal{O}} \circ A \circ i_{\mathcal{O}}\,, \qquad P_{\mathcal{O}} : C_c^\infty(\mathcal{O}) \longrightarrow C^\infty(\mathcal{O})$$

e sia $P_U : C_c^\infty(U) \to C^\infty(U)$ l'operatore lineare definito dalla seguente composizione

$$C_c^\infty(U) \xrightarrow{\kappa^*} C_c^\infty(\mathcal{O}) \xrightarrow{P_{\mathcal{O}}} C^\infty(\mathcal{O}) \xrightarrow{\kappa_1^*} C^\infty(U)$$

Definizione 5. *Diremo che l'operatore lineare $P : C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M)$ appartiene a $\Psi^d(M)$, lo spazio degli operatori pseudodifferenziali di ordine d, se per ogni carta locale $(\mathcal{O}, \kappa : \mathcal{O} \longrightarrow U \subset \mathbb{R}^n)$ l'operatore indotto P_U è in $\Psi^d(U)$. La definizione è ben posta grazie al teorema (5).*

Osservazione. Analogamente, passando a carte locali, possiamo definire lo spazio vettoriale degli operatori differenziali di ordine d $\mathrm{Diff}^d(M)$ su M; è ovvio che

$$\mathrm{Diff}^d(M) \subset \Psi^d(M)\,.$$

Sia $P \in \Psi^d(M)$ e sia $x \in \mathcal{O} \subset M$; definiamo il simbolo principale di P calcolato in $\sum \xi^j d\kappa_j(x) \in T_x^*M$ come il simbolo pricipale di A_U calcolato in $(\kappa(x), \xi) \in T^*U$. Uno degli esercizi per casa consisteva nel verificare che il simbolo principale di P è globalmente definito come funzione C^∞ su T^*M: $\sigma_{\mathrm{pr}}(P) \in C^\infty(T^*M)$. L'esercizio è semplice ed utilizza (15).

Siano ora $E \to M$ e $F \to M$ due fibrati vettoriali su M, di rango k ed ℓ rispettivamente. Passando a banalizzazioni locali su carte locali e tenendo presente quanto detto alla fine della lezione precedente, possiamo definire in maniera analoga lo spazio $\Psi^d(M; E, F)$ degli operatori lineari

$$P : C^\infty(M, E) \longrightarrow C^\infty(M, F)$$

che sono pseudodifferenziali di ordine d. Occorrerà richiedere che per ogni banalizzazione locale di E e di F su $\mathcal{O}$ l'operatore indotto P_U sia in $\Psi^d(U; \mathbf{I}^k, \mathbf{I}^\ell)$. Non è difficile dimostrare (ma è un minimo laborioso) che se $P \in \Psi^d(M; E, F)$ allora è ben definito il simbolo principale di P che è una sezione del fibrato $\mathrm{Hom}(\pi^*E, \pi^*F) \longrightarrow T^*M$ con $\pi : T^*M \to M$:

$$\sigma_{\mathrm{pr}}(P) \in C^\infty(T^*M, \mathrm{Hom}(\pi^*E, \pi^*F))\,. \tag{17}$$

La stessa definizione ci permette di definire lo spazio $\mathrm{Diff}^d(M; E, F)$. Classici esempi di operatori differenziali su varietà differenziabili sono l'operatore di differenziazione esterna $d : \Omega^k(M) \equiv C^\infty(M, \Lambda^k(T^M)) \longrightarrow \Omega^{k+1}(M) = C^\infty(M, \Lambda^{k+1}(T^*M))$ oppure l'operatore di derivazione covariante lungo un campo vettoriale X: $\nabla_X : C^\infty(M, TM) \longrightarrow C^\infty(M, TM)$. Vedremo altri notevoli esempi fra un paio di lezioni.

6.2. **Operatori pseudodifferenziali classici. Spazi di Sobolev.**

Per le applicazioni alla geometria che vogliamo dare , ed in particolare per le connessioni che stabiliremo con la K-Teoria, è comodo restringersi ad una sottoclasse di operatori pseudodifferenziali, gli operatori pseudodifferenziali *classici*.
Sia $U \subset \mathbb{R}^n$ un aperto; lo spazio dei *simboli classici* di ordine d, $S^d_{\mathrm{cl}}(U \times \mathbb{R}^n)$ è definito come il sottospazio vettoriale di $S^d(U \times \mathbb{R}^n)$ costituito dai simboli che hanno un'espansione asintotica

$$p \sim \sum_{j \geq 0} p_j \quad \text{con } p_j \text{ omogenea di grado } d-j \text{ per } |\xi| \geq C$$

Lo spazio $\Psi^d_{\mathrm{cl}}(U)$ è definito usando questi particolari simboli.
Utilizzando carte locali possiamo anche definire $\Psi^d_{\mathrm{cl}}(M)$ per M una varietà riemanniana M ed è chiaro che se $P \in \Psi^d_{\mathrm{cl}}(M)$ allora $\sigma_{\mathrm{pr}}(P)$ è una funzione che è omogenea di grado d nelle fibre di T^*M (per $|\xi| \geq C$). Infine, se E ed F sono due fibrati vettoriali allora è ben definito $\Psi^d_{\mathrm{cl}}(M; E, F)$ e se $\omega \in T^*_x M$, $|\omega| > C$, e $\lambda > 0$ allora

$$\sigma_{\mathrm{pr}}(P)(\lambda\omega) = \lambda^d \sigma_{\mathrm{pr}}(P)(\omega) \quad \text{in} \quad \mathrm{Hom}(E_x, F_x) \tag{18}$$

È ovvio che

$$\mathrm{Diff}^d(M; E, F) \subset \Psi^d_{\mathrm{cl}}(M; E, F) \subset \Psi^d(M; E, F).$$

Nella lezione precedente abbiamo definito gli spazi di Sobolev $H_s(\mathbb{R}^n)$. Possiamo definire in maniera analoga spazi di Sobolev per funzioni a valori in $\mathbb{C}^k$, una volta fissata la metrica hermitiana standard di $\mathbb{C}^n$; denotiamo questi spazi di Hilbert con $H_s(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^k)$. Sia ora M una varietà differenziabile compatta e sia $\{\phi_j\}$ una partizione dell'unità subordinata ad un ricoprimento di M tramite carte locali $(\mathcal{O}_j, \kappa_j : \mathcal{O}_j \to U_j)$. La norma di Sobolev di $f \in C^\infty(M)$ è per definizione

$$\|f\|_s : \sum_j \|\kappa_1^*(f\phi_j)\|_s \quad \text{dove} \quad \kappa_1 = \kappa^{-1} \,.$$

Questa norma dipende dalle scelte fatte; tuttavia scelte diverse danno norme equivalenti. $H_s(M)$ è per definizione il completamento di $C^\infty(M)$ rispetto a questa norma.
Se $E \to M$ è un fibrato vettoriale con metrica hermitiana allora possiamo analogamente definire $H_s(M, E)$. Per gli spazi di Sobolev $H_s(M, E)$ valgono il Lemma di Sobolev ed il Lemma di Rellich (senza ipotesi sul supporto dato che M è compatta). Il Lemma di Rellich può essere rienunciato come segue: *se $s > t$ l'inclusione $H_s(M, E) \hookrightarrow H_t(M, E)$ è un* **operatore compatto**.

Passando a carte locali non è difficile dimostrare, a partire dal risultato locale, che $P \in \Psi^d_{\mathrm{cl}}(M; E, F)$ si estende ad un operatore **continuo** $P : H_s(M, E) \longrightarrow H_{s-d}(M, F)$ $\forall s \in \mathbb{R}$.

È chiaro infine che se E, F e G sono fibrati vettoriali su M allora

$$\Psi^d_{\mathrm{cl}}(M; E, F) \circ \Psi^{d'}_{\mathrm{cl}}(M; F, G) \subset \Psi^{d+d'}_{\mathrm{cl}}(M; E, G) \tag{19}$$

Se E ed F sono due fibrati hermitiani allora per $P \in \Psi^d_{\mathrm{cl}}(M; E, F)$ è ben definito $P^* \in \Psi^d_{\mathrm{cl}}(M; F, E)$ tale che

$$\int_M < Pe, f >_F dg = \int_M < e, P^* f >_E dg$$

e si ha $\sigma_{\mathrm{pr}}(P^*) = \sigma_{\mathrm{pr}}(P)^*$.

Osservazione. Le stesse proprietà di composizione, continuità etc... valgono per gli operatori in $\Psi^*(M; E, F)$, non necessariamente classici.

Definizione 6. *Sia $P \in \Psi^d_{\mathrm{cl}}(M; E, F)$ e sia S^*M il fibrato sferico definito dalla metrica riemanniana in T^*M. Sia $\pi_S : S^*M \longrightarrow M$. Il simbolo principale asintotico è la sezione $\widehat{\sigma}_{\mathrm{pr}}(P) \in C^\infty(S^*M, \mathrm{Hom}(\pi_S^* E, \pi_S^* F)$ definita da*

$$\widehat{\sigma}_{\mathrm{pr}}(P)(\omega) = \lim_{t \to +\infty} \frac{\sigma_{\mathrm{pr}}(P)(t\omega)}{t^d}\,, \quad \omega \in S^*M \tag{20}$$

Il simbolo principale asintotico definisce per omogeneità un sezione di $C^\infty(T^*M \setminus 0, \mathrm{Hom}(\pi^*E, \pi^*F))$. Denotiamo $C^\infty(T^*M \setminus 0, \mathrm{Hom}^d(\pi^*E, \pi^*F))$ lo spazio delle sezioni che sono omogenee di grado d fuori dalla sezione nulla. Una tale sezione definisce un operatore in $\Psi^d_{\mathrm{cl}}(M; E, F)$; basta utilizzare una partizione dell'unità $\{\psi_j\}$ subordinata ad un ricoprimento di carte locali (per ogni carta sarà anche necessario utilizzare delle funzioni cut-off in $|\omega|$, $\omega \in T^*M$, per estendere il simbolo in maniera C^∞ da $T^*M \setminus 0$ a T^*M).

Proposizione 1. *$\forall m \in \mathbb{R}$ la seguente successione è esatta:*

$$0 \longrightarrow \Psi^{m-1}_{\mathrm{cl}}(M; E, F) \hookrightarrow \Psi^m_{\mathrm{cl}}(M; E, F) \xrightarrow{\widehat{\sigma}_{\mathrm{pr}}(\,)} C^\infty(T^*M \setminus 0, \mathrm{Hom}^m(\pi^*E, \pi^*F)) \longrightarrow 0 \tag{21}$$

6.3. **Operatori ellittici. Esistenza della parametrice.**

Definizione 7. *Sia $P \in \Psi^d_{\mathrm{cl}}(M; E, F)$. P è un operatore ellittico se $\widehat{\sigma}_{\mathrm{pr}}(P)$ è invertibile.*

Si noti che, in particolare, E ef F devono avere lo stesso rango. *Vedremo la prossima lezione numerosi esempi di operatori differenziali ellittici.*

Teorema 6. *Sia $P \in \Psi^d_{\mathrm{cl}}(M; E, F)$ ellittico. Allora esiste $Q \in \Psi^{-d}_{\mathrm{cl}}(M; F, E)$ tale che*

$$P \circ Q \sim \mathrm{Id}\,, \qquad Q \circ P \sim \mathrm{Id} \tag{22}$$

e cioè, esplicitamente, tale che

$$P \circ Q = \mathrm{Id} + R_r\,, \quad Q \circ P = \mathrm{Id} + R_l\,, \qquad R_r \in \Psi^{-\infty}_{\mathrm{cl}}(M; F, F)\,, R_l \in \Psi^{-\infty}_{\mathrm{cl}}(M; E, E) \tag{23}$$

L'applicazione lineare Q è detta una *parametrice* per P o anche un' *inversa modulo operatori infinitamenti regolarizzanti* o anche, brevemente, una *pseudoinversa* di P.

Sketch della dimostrazione. Per ipotesi il simbolo principale asintotico di P è un omomorfismo invertibile. Sia q_1 un'inversa e sia ancora q_1 la sua estensione per omogeneità. Sia $Q_1 \in \Psi^{-d}_{\mathrm{cl}}(M; F, E)$ l'operatore definito da questo simbolo. Consideriamo $Q_1 \circ P \in \Psi^0_{\mathrm{cl}}(M; E, E)$. Dalla formula per i simboli principali di una composizione, $\widehat{\sigma}_{\mathrm{pr}}(Q_1 \circ P) = \widehat{\sigma}_{\mathrm{pr}}(Q_1)\,\widehat{\sigma}_{\mathrm{pr}}(P)$ da cui segue, per costruzione, che $\widehat{\sigma}_{\mathrm{pr}}(Q_1 \circ P) = \mathrm{Id}$. Quindi $\widehat{\sigma}_{\mathrm{pr}}(Q_1 \circ P - \mathrm{Id}) = 0$ da cui, dalla successione esatta (21), $Q_1 \circ P - \mathrm{Id} = R \in \Psi^{-1}_{\mathrm{cl}}(M; E, E)$ che riscriviamo come

$$Q_1 \circ P = \mathrm{Id} + R\,, \quad R \in \Psi^{-1}_{\mathrm{cl}}(M; E, E).$$

Abbiamo quindi trovato un'inversa sinistra di P modulo *un resto* in Ψ^{-1}_{cl}. Procediamo ora a rendere questo resto sempre più regolarizzante. Consideriamo la serie parziale di Neumann $\sum_{j \geq 0}^N (-1)^j R^j$. Questa somma definisce un operatore in $\Psi^0_{\mathrm{cl}}(M; E, E)$; sia $Q_N := \sum_{j \geq 0}^N (-1)^j R^j \circ Q_1$. Allora

$$Q_N \in \Psi^{-d}_{\mathrm{cl}}\,, \quad \text{e} \quad Q_N \circ P = 1 - R^{N+1} \quad \text{con} \quad R^{N+1} \in \Psi^{-(N+1)}_{\mathrm{cl}}.$$

Abbiamo allora costruito un'inversa sinistra di P, Q_N, modulo un resto in $\Psi^{-(N+1)}_{\mathrm{cl}}$. Per ottenere un resto infinitamente regolarizzante ricorriamo alla completezza asintotica. Vale il seguente

Lemma. Sia $P_j \in \Psi^{d_j}_{\mathrm{cl}}$, $j = 0, 1, 2, \ldots$ con $d_j \to -\infty$ per $j \to \infty$, $d_0 > d_1 > d_2 > \ldots$. Allora esiste $P \in \Psi^{d_0}_{\mathrm{cl}}$ tale che

$$P - \sum_{j=0}^{N} P_j \in \Psi^{d(N)}_{\mathrm{cl}}$$

con $d(N) = \max_{j>N} d_j$. P è unicamente determinato modulo $\Psi^{-\infty}_{\mathrm{cl}}$.

Basterà ora prendere $Q := \tilde{R} \circ Q_1$ con $\tilde{R}$ ottenuto dal Lemma con la successione $P_j := (-1)^j R^j \in \Psi^{-j}_{\mathrm{cl}}$. È chiaro che Q è un'inversa sinistra di P modulo $\Psi^{-\infty}_{\mathrm{cl}}$

$$Q \circ P = 1 + S\,, \quad S \in \Psi^{-\infty}_{\mathrm{cl}}$$

Analogamente possiamo costruire un'inversa destra Q':

$$P \circ Q' = I + S'\,, \quad S' \in \Psi^{-\infty}_{\mathrm{cl}}$$

Tuttavia $Q - Q' \in \Psi^{-\infty}_{\mathrm{cl}}$; infatti, moltiplicando a destra la penultima equazione per Q' e utilizzando l'ultima equazione otteniamo

$$Q - Q' = SQ' - QS'$$

ed il membro a destra appartiene a $\Psi^{-\infty}_{\mathrm{cl}}$. Esiste quindi un'unica inversa modulo $\Psi^{-\infty}_{\mathrm{cl}}$.

7. Proprietà fondamentali degli operatori ellittici.

7.1. Teorema di regolarità. Disuguaglianza di Gärding.

Il Teorema (6) ha alcune fondamentali conseguenze.

Teorema 7. *(Regolorità ellittica.) Sia $P \in \Psi^{d}_{\mathrm{cl}}(M; E, F)$ ellittico e sia $f \in H_s(M, E)$. Sia $V \subset M$ un aperto e supponiamo che $Pf_{|V} \in C^\infty$ allora $f_{|V} \in C^\infty$. In particolare, se $f \in H_s(M, E)$ e $Pf = 0$ allora $f \in C^\infty(M, E)$.*

Dimostrazione. Per il teorema (6) possiamo scrivere $f = QPf - R_l f$ con $R_l \in \Psi^{-\infty}_{\mathrm{cl}}$. Già sappiamo che $R_l f \in C^\infty(M, E)$. D'altra parte $Q \in \Psi^{-d}_{\mathrm{cl}}$ e quindi vale per Q la proprietà di pseudolocalità; ne segue che $QPf_{|V} \in C^\infty$ e quindi la tesi.

Teorema 8. *(Disuguaglianza di Gärding.) Sia $P \in \Psi^{d}_{\mathrm{cl}}(M; E, F)$ ellittico. $\forall s \in \mathbb{R}$ $\exists C_s$ tale che*

$$\|f\|_s \leq C_s(\|Pf\|_{s-d} + \|f\|_{s-d}) \tag{24}$$

Dimostrazione. Possiamo scrivere $f = QPf - R_l f$. Ne segue che $\|f\|_s \leq (\|QPf\|_s + \|R_l f\|_s)$. Ma $Q \in \Psi^{-d}_{\mathrm{cl}}$ e quindi continuo da $H_{s-d}(M, F) \to H_d(M, E)$ e dato che $R_l \in \Psi^{-\infty}_{\mathrm{cl}}$ otteniamo immediatamente la tesi.

Osservazione. La disuguaglianza di Gärding gioca un ruolo fondamentale nello studio delle proprietà spettrali degli operatori ellittici.

7.2. **Operatori di Fredholm.**

Sia H uno spazio di Hilbert complesso separabile [3]. Denotiamo con $\mathcal{L}(H)$ l'algebra di Banach delle applicazioni lineari continue con la norma operatoriale. Gli elementi invertibili in quest'algebra formano un insieme aperto $\mathcal{L}^{\times}(H)$ in $\mathcal{L}(H)$ che è, ovviamente, un gruppo. Il teorema dell'applicazione aperta implica che se $T \in \mathcal{L}(H)$ è una biezione allora $T^{-1} \in \mathcal{L}(H)$ e quindi $T \in \mathcal{L}^{\times}(H)$.
Analogamente possiamo definire $\mathcal{L}(H_1, H_2)$ per una coppia di spazi di Hilbert e $\mathcal{L}^{\times}(H_1, H_2)$ che risulta, anche in questa caso, aperto.

Definizione 8. *Un operatore $T \in \mathcal{L}(H)$ è di Fredholm se* $\operatorname{Ker} T$ *e* $\operatorname{coker} T := H/\operatorname{Im} T$ *sono di dimensione finita. In tal caso si defisce l'indice di T come*

$$\operatorname{ind} T = \dim \operatorname{Ker} T - \dim \operatorname{coker} T\,.$$

Denotiamo con $\mathcal{F}(H) \equiv \mathcal{F}$ l'insieme degli operatori di Fredholm in $\mathcal{L}(H)$.

Proprietà degli operatori di Fredholm.

1. $\operatorname{Im} T$ è chiuso.
Essendo $(\operatorname{Im}\, T)^{\perp} = \operatorname{Ker} T^*$ ne segue che $\operatorname{Im}\, T = \operatorname{Ker} T^*$ e quindi

$$\operatorname{ind} T = \dim \operatorname{Ker} T - \dim \operatorname{Ker} T^* \tag{25}$$

In particolare, un operatore autoaggiunto di Fredholm ha indice uguale a zero.

2. $\operatorname{ind}(ST) = \operatorname{ind}(S) + \operatorname{ind}(T)$

3. Sia $\mathcal{K}(H)$ l'ideale degli operatori compatti. Se $C \in \mathcal{K}(H)$ allora $\mathrm{Id}_H + C$ è di Fredholm e $\operatorname{ind}(\mathrm{Id}_H + C) = 0$ [4].

4. $T \in \mathcal{F} \Leftrightarrow T$ è invertibile modulo $\mathcal{K}$ (e cioè esiste $S \in \mathcal{L}(H)$ tale che $(TS - \mathrm{Id}_H) \in \mathcal{K}$ e $(ST - \mathrm{Id}_H) \in \mathcal{K}$). [5]

5. Se $C \in \mathcal{K}$ e $T \in \mathcal{F}$ allora $T + C \in \mathcal{F}$ e $\operatorname{ind}(T + C) = \operatorname{ind}(T)$

6. $\mathcal{F}$ è aperto in $\mathcal{H}$; $\operatorname{ind} : \mathcal{F} \to \mathbb{Z}$ è localmente costante ed induce una biezione

$$\operatorname{ind} : \pi_0(\mathcal{F}) \to \mathbb{Z}\,.$$

In particolare $\operatorname{ind} T_0 = \operatorname{ind} T_1$ se e solo se esiste un cammino continuo $(T(t))_{t\in[0,1]} \in \mathcal{F}$, tale che $T(0) = T_0$ e $T(1) = T_1$
Il fatto che $T_0 \sim T_1$ (T_0 omotopo a T_1 in $\mathcal{F}$) implichi che $\operatorname{ind} T_0 = \operatorname{ind} T_1$ è noto come *invarianza per omotopia dell'indice.*

Teorema 9. *(Proprietà di Fredholm degli operatori ellittici su varietà compatte.) Sia $P \in \Psi^d_{\mathrm{cl}}(M; E, F$ ellittico. Allora $\forall s \in \mathbb{R}$ l'estensione*

$$P_s : H_s(M, E) \to H_{s-d}(M, F)$$

è un operatore di Fredholm e l'indice di P_s è indipendente da s.

[3] Vi ricordo che per nozioni standard di Analisi Funzionali potete consultare [**?**, ReSi]

[4] C è compatto se l'immagine tramite C di una successione limitata ammette una sottosucessione convergente.

[5] Questa proprietà è anche nota come teorema di Atkinson. Ci dice che $\mathcal{F} = \pi^{-1}\left((\mathcal{L}(H)/\mathcal{K}(H))^{\times}\right)$ con $\pi^{:}\mathcal{L}(H) \to (\mathcal{L}(H)/\mathcal{K}(H))$ la proiezione canonica. L'algebra $\mathcal{L}(H)/\mathcal{K}(H)$ è detta algebra di Calkin e la conclusione è che gli operatori di Fredholm sono l'immagine inversa, tramite la proiezione canonica, degli invertibili dell'algebra di Calkin.

Dimostrazione. Basta dimostrare che P_s ammette un'inversa modulo operatori compatti. Sia $Q \in \Psi_{\mathrm{cl}}^{-d}(M; F, E)$ una pseudoinversa di P e sia Q_{d-s} la sua estensione a $H_{s-d}(M, F)$. Allora $Q_{s-d}P_s = \mathrm{Id} + (R_l)_s$. Ma R_l è infinitamente regolarizzante e quindi $(R_l)_s : H_s(M, E) \longrightarrow H_t(M, E)\ \forall t \in \mathbb{R}$. In particolare $(R_l)_s : H_s(M, E) \to H_{s+1}(M, E)$. Dal Lemma di Rellich sappiamo che l'inclusione $H_{s+1}(M, E) \to H_s(M, E)$ è compatta; dato che gli operatori compatti sono un ideale ne concludiamo che $(R_l)_s$ è un operatore compatto. Analogamente si costruisce un'inversa destra di P_s modulo compatti. Ne segue che P_s è di Fredholm ed è quindi ben definito

$$\mathrm{ind}\, P_s := \dim \mathrm{Ker} P_s - \dim \mathrm{coker} P_s = \dim \mathrm{Ker} P_s - \dim \mathrm{Ker}(P_s)^* \,.$$

Utilizzando il teorema di regolarità ellittica e la dualità fra Spazi di Sobolev si dimostra che l'indice non dipende da s.

7.3. **Operatori ellittici formalmente autoaggiunti.**

Sia $P \in \Psi_{\mathrm{cl}}^d(M; E, E)$ un operatore pseudodifferenziale ellittico di ordine d. P è detto formalmente autoaggiunto se $P = P^*$.

Teorema 10. *Sia $P \in \Psi_{\mathrm{cl}}^d(M; E, E)$, $P : C^\infty(M, E) \longrightarrow C^\infty(M, E)$, ellittico formalmente autoaggiunto. Allora esiste una decomposizione L^2-ortogonale*

$$C^\infty(M, E) = \mathrm{Ker} P \oplus \mathrm{Im} P \tag{26}$$

Sketch della dimostrazione. Sicuramente esiste una decomposizione ortogonale $L^2(M, E) = \mathrm{Ker} P \oplus (\mathrm{Ker} P)^\perp$. Notiamo che, per definizione, $H_0(M, E) = L^2(M, E)$. Sia $u \in C^\infty(M, E) \subset L^2(M, E)$; allora

$$u = u_0 + u_1 \ , \ \ u_0 \in \mathrm{Ker} P \, , \ \ u_1 \in (\mathrm{Ker} P)^\perp \ ;$$

ma $u_0 \in C^\infty(M, E)$ per regolarità ellittica e quindi $u_1 \in C^\infty(M, E)$. Basta dimostrare che $u_1 = P w_1$ con $w_1 \in C^\infty(M, E)$.
Consideriamo $P_0 : L^2(M, E) \to H_{-d}(M, E)$ e identifichiamo $(H_{-d}(M, E))^* \equiv H_d(M, E)$; per l'ipotesi $P = P^*$ e usando questa identificazione scopriamo che il trasposto di P_0, che va quindi da $H_d(M, E)$ a $L^2(M, E)$ è uguale all'estensione P_d di P stesso. Ma allora

$$(\mathrm{Ker} P_0)^\perp = ((\mathrm{Im} P_d)^\perp)^\perp = \mathrm{Im} P_d \,,$$

dato che P_d è di Fredholm (quindi ad immagine chiusa). Ne segue che $u_1 = P w_1$ con $w_1 \in H_d(M, E)$. Abbiamo visto che $u_1 \in C^\infty(M, E)$; per regolarità ellittica segue che $w_1 \in C^\infty(M, E)$ e la dimostrazione è completa.

8. Teorema di Hodge e sue conseguenze.

8.1. **Complessi ellittici.**

Definizione 9. *Siano $V_1, \dots, V_\ell$ fibrati vettoriali su M e supponiamo di avere $\forall j$ un operatore $P_j \in \mathrm{Diff}^d(M; V_j, V_{j+1})$. La successione*

$$\cdots \longrightarrow C^\infty(M, V_j) \xrightarrow{P_j} C^\infty(M, V_{j+1}) \longrightarrow \cdots \tag{27}$$

è un complesso di operatori differenziali di ordine d se $P_{j+1} \circ P_j = 0$. Il complesso è detto ellittico se $\forall x \in M$ e $\forall \omega \in T_x^* M \setminus 0$ la successione dei simboli

$$\cdots \longrightarrow (V_j)_x \xrightarrow{\sigma_{\mathrm{pr}}(P_j)(\omega)} (V_{j+1})_x \longrightarrow \cdots \tag{28}$$

è esatta

Denotiamo un tale complesso con $\{V_*, P_*\}$. Definiamo il k-mo *gruppo di coomologia* $\mathbb{H}^k(\{V_*, P_*\})$ del complesso $\{V_*, P_*\}$ come lo spazio vettoriale quoziente

$$\mathbb{H}^k(\{V_*, P_*\}) := \mathrm{Ker}P_k/\mathrm{Im}P_{k-1}\,.$$

Supponiamo che ogni fibrato V_j sia dotato di una metrica hermitiana. È allora ben definito P_j^* che è ancora un operatore differenziale di ordine d. L'operatore $\Delta_j := P_j^* P_j + P_{j-1}P_{j-1}^*$ è allora un operatore differenziale di ordine $2d$ che è formalmente autoaggiunto e manda $C^\infty(M, V_j)$ in se stesso.
La seguente Proposizione è di facile dimostrazione:

Proposizione 2. *Il complesso $\{V_j, P_j\}$ è ellittico se e solo se l' operatore Δ_j è ellittico $\forall j$.*

8.2. **Teorema di Hodge generalizzato. Indice di un complesso ellittico.**

Teorema 11. *(Decomposizione di Hodge). Sia $\{V_j, P_j\}$ un complesso ellittico. Allora $\forall j$ il sottospazio* $\mathrm{Ker}\Delta_j$ *ha dimensione finita e vale la seguente decomposizione L^2-ortogonale:*

$$C^\infty(M, V_j) = \mathrm{Ker}\Delta_j \oplus \mathrm{Im}P_{j-1} \oplus \mathrm{Im}P_j^*\,. \tag{29}$$

Sketch della dimostrazione. Sappiamo che Δ_j è ellittico formalmente autoaggiunto. Per il Teorema abbiamo la decomposizione ortogonale $C^\infty(M, V_j) = \mathrm{Ker}\Delta_j \oplus \mathrm{Im}\Delta_j$. Dalla definizione di Δ_j segue che $\mathrm{Im}\Delta_j \subset \mathrm{Im}P_j^* + \mathrm{Im}P_{j-1}$. Osserviamo che dalla definizione di aggiunto e dal fatto che $P_j \circ P_{j-1} = 0$ segue che $\mathrm{Im}P_j^* \perp \mathrm{Im}P_{j-1}$. Inoltre $\mathrm{Ker}\Delta_j = \mathrm{Ker}P_j \cap \mathrm{Ker}P_{j-1}^*$; infatti un'inclusione è ovvia e l'altra segue dal fatto che se $u \in \mathrm{Ker}\Delta_j$ allora
$(\Delta_j u, u) = \|P_j u\|^2 + \|P_{j-1}^* u\|^2 = 0$. Da queste due osservazioni segue che $\mathrm{Im}P_j^* + \mathrm{Im}P_{j-1} \subset \Delta_j$ da cui l'uguaglianza $\mathrm{Im}P_j^* + \mathrm{Im}P_{j-1} = \Delta_j$ e, nuovamente per la prima osservazione, la tesi.

Teorema 12. *(Isomorfismo di Hodge) Per ogni j esiste un isomorfismo di spazi vettoriali:*

$$\mathrm{Ker}\Delta_j \simeq \mathbb{H}^j(\{V_*, P_*\}) := \mathrm{Ker}P_j/\mathrm{Im}P_{j-1} \tag{30}$$

Sketch della dimostrazione. Abbiamo verificato che $\Delta_j = \mathrm{Ker}P_j \cap \mathrm{Ker}P_{j-1}^*$. Consideriamo la mappa

$$\phi : \mathrm{Ker}\Delta_j \longrightarrow \mathrm{Ker}P_j/\mathrm{Im}P_{j-1}$$

che associa a $v \in \mathrm{Ker}\Delta_j$ la sua classe $[v]$ nel quoziente. Quest'applicazione è iniettiva, perché se $\phi(v) = 0$ allora $v \in \mathrm{Im}P_{j-1}$ e quindi $v = 0$ dato che $\mathrm{Im}P_{j-1} \cap \mathrm{Ker}\Delta_j = 0$. Dimostriamo che ϕ è anche suriettiva. Sia $[v] \in \mathrm{Ker}P_j/\mathrm{Im}P_{j-1}$. Possiamo decomporre $v = v_0 + \Delta_j v_1$ con $v_0 \in \mathrm{Ker}\Delta_j$. Si ha $\phi(v_0) = [v]$ (da cui la tesi). Infatti: dato che $v \in \mathrm{Ker}P_j$ ne segue che $P_j v_0 + P_j \Delta_j v_1 = 0$; ma $P_j v_0 = 0$ e quindi ne deduciamo che $P_j P_j^* P_j v_1 = 0$ (vi ricordo che $P_j P_{j-1} = 0$). Facendo il prodotto scalare di $P_j P_j^* P_j v_1$ con $P_j v_1$ ed utilizzando la definizione di aggiunto (e cioè integrando per parti) otteniamo $\|P_j^* P_j v_1\|^2 = 0$ da cui $\Delta_j v_1 = P_{j-1}P_{j-1}^* v_1$. Ma allora $[v] = [v_0] = \phi(v_0)$ come si voleva.

Definizione 10. *Sia $\{V_j, P_j\}$ un complesso ellittico; l'indice del complesso è definito come*

$$\mathrm{ind}\,(\{V_*, P_*\}) := \sum_j (-1)^j \dim \mathbb{H}^j(\{V_*, P_*\}) \in \mathbb{Z}\,.$$

Osservazione. La nozione di indice di un complesso ellittico è una semplice generalizzazione dell'indice di un singolo operatore ellittico. Se $P : C^\infty(M,E) \to C^\infty(M,F)$ è un operatore ellittico, allora $0 \to C^\infty(M,E) \xrightarrow{P} C^\infty(M,F) \to 0$ è un complesso ellittico e l'indice dell'operatore P è uguale all'indice del complesso.

Referenze bibliografiche. Per tutta la parte sugli operatori ellittici svolta fino ad oggi vi rimando al [LM], da pag 166 a pag 195. Si veda anche pag 245.

BIBLIOGRAFIA

[A] M. Atiyah. *K-Theory*, Benjamin, New York, 1967.
[GH] P. Griffiths, J. Harris. *Priciples of Algebraic Geometry*, Wiley, New York.
[K] K. Kodaira. *Complex manifolds and deformations of complex structures.* Grundlehren der Math. Wiss. **283**. Springer.
[LM] H. B. Lawson, M. Michelshon. *Spin Geometry* Princeton Mathematical Series, Vol 38.
[P01] P. Piazza. Note per il corso di dottorato "Il teorema dell'indice di Atiyah-Singer". a.a. 2000-01.
`http://www.mat.uniroma1.it/people/piazza/`
[P02] P. Piazza. Note per il corso di dottorato "K-Theoria". a.a. 2001-02.
[Wa] F. Warner. *Foundations of Differentiable manifolds and Lie Groups.* Graduate text in Mathematics **94**. Springer-Verlag.
[We] R. O. Wells Jr. *Differential analysis on complex manifolds* Graduate text in Mathematics. **65** Springer-Verlag.