Geometria I. Gruppo A-L. Anno accademico 1999/2000. Prof. P. Piazza

Esercizi per il periodo 22/12/1999 - 10/01/2000.

§1: Osservazioni e chiarimenti.

Osservazione 1. È opportuno fare un'osservazione sulla *notazione* adottata. Sia V lo spazio vettoriale tridimensionale dei vettori geometrici dello spazio. In V abbiamo definito il prodotto scalare di due vettori $\underline{v}$, $\underline{w}$ facendo uso dell'angolo *convesso* fra i due vettori stessi: $\underline{v} \times \underline{w} = |v||w| \cos \widehat{\underline{v}\,\underline{w}}$. (Due vettori geometrici definiscono sempre 2 angoli (fate una figura): l'angolo convesso fra due vettori è quello compreso fra 0 e π.) Questa *notazione* è purtroppo in contrasto con quella del Sernesi (della qual cosa mi scuso). Il Sernesi (pag. 218) definisce $\underline{v} \times \underline{w} := |v||w| \cos \theta$, con θ appunto l'angolo convesso fra i due vettori. La notazione $\widehat{\underline{v}\,\underline{w}}$ è utilizzata per il concetto più sofisticato di *angolo orientato*. Leggete a questo punto il Sernesi p. 218, 219, 220 (facoltativo dalla riga 5 alla riga 19) e 221 fino ai *Complementi* esclusi. Per la nozione di orientazione vedere Sernesi pag. 151.
La conclusione di questo discorso in Sernesi è la seguente:
Sia $(V, < , >)$ un piano euclideo. Allora, fissata in V un'orientazione tramite la scelta di una base ortonormale, rimane definita la nozione di angolo orientato fra due vettori $\underline{v}$, $\underline{w}$ di V. L'angolo orientato fra $\underline{v}$ e $\underline{w}$ viene denotato con il simbolo $\widehat{\underline{v}\,\underline{w}}$.

Osservazione 2. Sia $(V, < , >)$ un piano euclideo e supponiamo di aver fissato un'orientazione in V tramite la scelta di una base ortonormale $\{\underline{i}, \underline{j}\}$. Sia $\{\theta + 2k\pi\}$ un angolo orientato come in Sernesi pag 219. Rimane allora definita la nozione di *rotazione di un angolo θ nel verso positivo definito dalla base $\{\underline{i}, \underline{j}\}$*. Denotiamo quest'applicazione con il simbolo T_θ. Per definire T_θ basta definire l'immagine dei due vettori della base $\underline{i}$, $\underline{j}$:

Definizione. $T_\theta : V \to V$ è l'operatore lineare che manda $\underline{i}$ nel vettore *unitario* $\underline{i}(\theta)$ tale che $\widehat{\underline{i}\,\underline{i}(\theta)} = \{\theta + 2k\pi\}$ e che manda $\underline{j}$ nel vettore *unitario* $\underline{j}(\theta)$ tale che $\widehat{\underline{j}\,\underline{j}(\theta)} = \{\theta + 2k\pi\}$.

Consideriamo ad esempio l'angolo orientato $\{\pi/6 + 2k\pi\}$. Seguendo Sernesi vediamo che

$$T_{\pi/6}(\underline{i}) = (\cos\frac{\pi}{6})\underline{i} + (\sin\frac{\pi}{6})\underline{j}\,; \quad T_{\pi/6}(\underline{j}) = (\cos\frac{2}{3}\pi)\underline{i} + (\sin\frac{2\pi}{3})\underline{j} \equiv (-\sin\frac{\pi}{6})\underline{i} + (\cos\frac{\pi}{6})\underline{j}$$

perché (vedi Sernesi pag. 220 riga (-9)) $\underline{i}$ ha coordinate $(1, 0) = (\cos 0, sin 0)$ nella base $\{\underline{i}, \underline{j}\}$ e quindi $\underline{i}(\frac{\pi}{6})$ deve avere coordinate $(\cos\frac{\pi}{6}, \sin\frac{\pi}{6})$ nella stessa base $\{\underline{i}, \underline{j}\}$. Analogamente $\underline{j}$ ha coordinate $(0, 1) = (\cos\pi/2, \sin\pi/2)$ nella base $\{\underline{i}, \underline{j}\}$ e quindi $\underline{j}(\frac{\pi}{6})$ deve avere coordinate $(\cos\frac{2}{3}\pi, \sin\frac{2}{3}\pi)$ (perché allora l'angolo orientato $\widehat{\underline{j}\,\underline{j}(\frac{\pi}{6})}$ è uguale a $(2\pi/3 - \pi/2)$ cioè $\pi/6$ come deve essere).

Esercizio 1. Sia $V = \mathbb{R}^2$ con il prodotto scalare canonico. Consideriamo la base canonica $\{(1, 0), (0, 1)\}$ e l'orientazione da essa definita. Consideriamo l'angolo orientato $\{-\pi/8 +$

$2k\pi\}$. Rimane determinato l'operatore di rotazione dell'angolo $\{-\pi/8 + 2k\pi\}$ nel verso positivo definito dalla base canonica $\{(1,0),(0,1)\}$. Consideriamo la coppia $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) \in \mathbb{R}^2$; disegnare l'immagine della coppia $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) \in \mathbb{R}^2$ tramite tale operatore.
Consideriamo ora una base ortonormale che fissi l'orientazione *opposta* a quella determinata dalla base canonica, ad esempio la base $\{(-1,0),(0,1)\}$. Rimane definito l'operatore di rotazione dell'angolo $\{-\pi/8+2k\pi\}$ nel verso positivo definito *dalla nuova base* $\{(-1,0),(0,1)\}$. Disegnare l'immagine dell'elemento $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) \in \mathbb{R}^2$ tramite questo operatore.

Osservazione 3. C'è stata anche un po' di confusione sulla notazione riguardante il prodotto scalare ed il prodotto vettoriale.
Cerchiamo di riassumere la situazione alla luce di quanto visto ultimamente:
1) se $(V, <\,,\,>)$ è un arbitrario spazio vettoriale euclideo *tridimensionale* allora (fissata un'orientazione) possiamo definire l'operazione di prodotto vettoriale come in Sernesi (pag 224 e seguenti) e seguiamo la sua notazione.
2) se V è *in particolare* lo spazio vettoriale dei vettori geometrici dello spazio con il prodotto scalare "geometrico" $\times$ (quindi $\underline{v} \times \underline{w} = |\underline{v}||\underline{w}|\cos\theta$) allora il prodotto scalare $<\,,\,>$ in Sernesi pag 224 e seguenti va sostituito con il prodotto scalare $\times$ e analogamente la lunghezza $||\ \ ||$ va sostituita con la lunghezza $|\ \ |$ per i vettori geometrici.
3) In ogni caso il prodotto vettoriale si denota con $\wedge$.

Noi abbiamo prima trattato il caso 2) e poi il caso 1); Rogora ha usato la notazione in 1) mentre trattava di fatto il caso 2).[1]

§2: Esercizi vari.

Esercizio 1. Consideriamo la matrice reale

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

(i) Stabilire se A è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$.
(ii) Stabilire se A è diagonalizzabile su $\mathbb{C}$.
Trovare eventualmente una matrice diagonalizzante.

Esercizio 2. Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione n e sia $F \in \mathrm{End}(V)$. Facciamo le seguenti ipotesi su F:
(i) Le radici di $P_F(T)$ sono 1 e 0 con $m_a(0) = k$ e $m_a(1) = n - k$.
(ii) $m_g(0) = m_a(0)$ e $m_g(1) = m_a(1)$.
Dimostrare che sotto queste ipotesi F è l'operatore di proiezione su $V_1(F)$ parallelamente a $V_0(F) = N(F)$.
Verificare che se invece: (i) le radici di $P_F(T)$ sono 1 e (-1) con $m_a(1) = k$ e $m_a(-1) = n - k$. (ii) $m_g(1) = m_a(1)$, $m_g(-1) = m_a(-1)$ *allora* F è la simmetria rispetto a $V_1(F)$ parallelamente a $V_{(-1)}(F)$.

Esercizio 3. Sia V uno spazio vettoriale euclideo di dimensione n. Denotiamo il prodotto scalare con $<\,,\,>$. Sia $\underline{f} = \{\underline{f}_1, \ldots, \underline{f}_n\}$ una base *ortonormale* di V. Dato che $\{\underline{f}_1, \ldots, \underline{f}_n\}$

[1] È bene tenere presente che la notazione per il prodotto scalare e per il prodotto vettoriale **non** è universale. Per quel che concerne lo spazio vettoriale dei vettori geometrici dello spazio (fondamentale anche in Fisica) si ha la seguente irritante situazione: alcuni testi (che io ho seguito) utilizzano il simbolo $\times$ per il prodotto scalare "geometrico" ed il simbolo $\wedge$ per il corrispondente prodotto vettoriale. Altri testi utilizzano il simbolo $\bullet$ per il prodotto scalare "geometrico" ed il simbolo $\times$ per il corrispondente prodotto vettoriale.

è una base si ha $\forall \underline{v} \in V$, $\underline{v} = v^1 \underline{f}_1 + v^2 \underline{f}_2 + \cdots v^n \underline{f}_n$ per opportuni v^i. Verificare che

$$v^i = < \underline{v}, \underline{f}_i > \ .$$

Esercizio 4. Sia V uno spazio vettoriale euclideo di dimensione n. Sia W un sottospazio vettoriale di V. Sappiamo che $V = W \oplus W^\perp$

Definizione La proiezione su W parallelamente a $W^\perp$, è detta ***proiezione ortogonale su*** W. La denotiamo come al solito con P_1.

Analogamente abbiamo *la proiezione ortogonale* su $W^\perp$ (questa è la proiezione su $W^\perp$ parallelamente a W). Denotiamo questa proiezione con P_2.
Abbiamo anche le simmetrie ortogonali rispetto a W e $W^\perp$, denotate rispettivamente con S_1 e S_2. Non mi soffermo su queste definizioni perché le abbiamo ormai viste molte volte.
Vero o Falso: una volta nota P_1 sono note P_2, S_1, S_2. Giustificare la risposta.

Esercizio 5. Sia V uno spazio vettoriale euclideo, W e U due iperpiani distinti. Verificare che

$$(W \cap U)^\perp = W^\perp \oplus U^\perp$$

Esercizio 6. $V = \mathbb{R}^4$ con base canonica $\underline{e}$ fissata. È data la base

$$\underline{w} = \{\underline{w}_1 = (1,0,0,0), \quad \underline{w}_2 = (1,1,0,0), \quad \underline{w}_3 = (0,0,1,0), \quad \underline{w}_4 = (0,0,0,1)\}$$

Definiamo un prodotto scalare $< , >$ in $\mathbb{R}^4$ come segue. Dichiariamo questi 4 vettori ortonormali; quindi

$$< \underline{w}_i, \underline{w}_j >= 0 \ , \quad i \neq j \qquad < \underline{w}_i, \underline{w}_i >= 1.$$

Estendendo per bilinearità otteniamo un prodotto scalare definito su tutto lo spazio:

$$< , >: \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}.$$

Determinare la matrice associata a questo nuovo prodotto scalare nella base canonica $\underline{e}$.
Suggerimento.
Primo metodo (brutale)
Esprimete la base $\underline{e}$ in funzione della base $\underline{w}$ (ci sono un po' di conti da fare...); poi calcolate $< \underline{e}_i, \underline{e}_j >$ utilizzando la bilinearità di $< , >$ ed il fatto che $\underline{w}$ è, per definizione, ortonormale rispetto a $< , >$. Vi ricordo che matrice cercata, e cioè la matrice $A^{\underline{e}}_{< , >}$, è la matrice

$$A^{\underline{e}}_{< , >} = (a_{ij}) \qquad \text{con} \ \ a_{ij} = < \underline{e}_i, \underline{e}_j >$$

Secondo metodo.
Vogliamo calcolare $A^{\underline{e}}_{< , >}$. Conosciamo certamente $A^{\underline{w}}_{< , >}$ (perché ?!). Possiamo quindi utilizzare la formula che collega le matrici associate ad una fissata forma bilineare in due basi diverse: se $M_{\underline{e},\underline{w}}(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^4})$ è la matrice del cambiamento di coordinate allora sappiamo che $A^{\underline{e}}_{< , >} = \ldots .$

§3: Esercizi di preparazione all'esame.

Esercizio 1 Spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^4$ con base canonica $\underline{e} = \{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3, \underline{e}_4\}$ fissata e coordinate associate (x^1, x^2, x^3, x^4). Prodotto scalare canonico $\bullet$.

(1.1) Si consideri il sottospazio W generato da

$$\underline{v}_1 = (0,0,0,1) \qquad \underline{v}_2 = (-1,0,1,0) \qquad \underline{v}_3 = (1,1,0,0)$$

Verificare che $\dim(W) = 3$. Determinare le equazioni cartesiane di $W^\perp$. Dare un vettore generatore per $W^\perp$.

(1.2) Determinare la base ortonormale $\underline{f}_1, \underline{f}_2, \underline{f}_3$ di W ottenuta applicando il metodo di Gram-Schmidt alla base $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$.

(1.3) Determinare un vettore $\underline{f}_4$ di $W^\perp$ in modo tale che la base $\underline{f} = \{\underline{f}_1, \underline{f}_2, \underline{f}_3, \underline{f}_4\}$ sia una base ortonormale di $\mathbb{R}^4$.

(1.4) Scrivere la matrice associata nella base canonica ai due seguenti operatori:

$$P_2 = \text{ proiezione ortogonale sul sottospazio } W^\perp$$
$$S_2 = \text{ simmetria ortogonale rispetto al sottospazio } W^\perp$$

Suggerimento: utilizzare l'esercizio 3 del §1 per calcolare $P_2(\underline{e}_j)$, $j = 1, \ldots, 4$. Una volta nota $M_{\underline{e}}(P_2)$ come si trova $M_{\underline{e}}(S_2)$?

Esercizio 2. Spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^4$ con prodotto scalare canonico $\bullet$. Base canonica $\underline{e}$ di $\mathbb{R}^4$ con coordinate associate (x^1, x^2, x^3, x^4).

Sia $T\colon \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ l'operatore definito dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

(2.1) Verificare che i vettori

$$\underline{v}_1 = (1,1,-1,1) \qquad \underline{v}_2 = (1,-1,1,1)$$

costituiscono una base per il sottospazio $\operatorname{Im} T$.

(2.2) Scrivere equazioni cartesiane del sottospazio $\operatorname{Im} T$.

(2.3) Scrivere equazioni cartesiane del sottospazio $(\operatorname{Im} T)^\perp$.

(2.4) Determinare una base *ortogonale* $\underline{f} = \{\underline{f}_1, \underline{f}_2, \underline{f}_3, \underline{f}_4\}$ di $\mathbb{R}^4$ con la proprietà che

$$\underline{f}_1,\, \underline{f}_2 \in \operatorname{Im} T \qquad \underline{f}_3,\, \underline{f}_4 \in (\operatorname{Im} T)^\perp.$$

(2.5) Sia $T' = T|_{\operatorname{Im} T}$ la restrizione di T al sottospazio immagine. Scrivere la matrice A' associata a T' nella base $\underline{v}_1, \underline{v}_2$. Dire se T' è diagonalizzabile.

(2.6) Sia $S\colon \operatorname{Im} T \longrightarrow \operatorname{Im} T$ l'operatore di proiezione ortogonale sulla retta vettoriale definita da $\underline{u} = \underline{v}_1 + \underline{v}_2$. Scrivere la matrice dell'operatore $S \circ T'\colon \operatorname{Im} T \longrightarrow \operatorname{Im} T$ nella base $\underline{v}_1, \underline{v}_2$.

Esercizio 3. Spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ con base canonica $\underline{e}$ fissata.
Sia $q : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ la forma quadratica definita da polinomio omogeneo di secondo grado

$$(X^1)^2 - (X^2)^2 + 2X^3X^4 .$$

(3.0) Determinare la forma bilineare $b : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ polare di q.
(3.1) Scrivere la matrice $A_b^{\underline{e}}$ associata ad $b(\,, \,)$ nella base canonica.
(3.2) Verificare che $b(\,, \,)$ è non-degenere.
(3.3) Trovare una base $\underline{w} = \{\underline{w}_1, \underline{w}_2, \underline{w}_3, \underline{w}_4\}$ di $\mathbb{R}^4$ che diagonalizzi $b(\,, \,)$.
(3.4) Determinare esplicitamente una matrice *invertibile* M ed una matrice *diagonale* Δ tali che

$$M^t \cdot A_b^{\underline{e}} \cdot M = \Delta$$

Esercizio 4. Spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^4$ con base canonica fissata e coordinate associate (x^1, x^2, x^3, x^4). Prodotto scalare canonico.
(4.1) Determinare equazioni cartesiane per il sottospazio W generato da

$$\underline{v} = (1, 1, -1, 1) \qquad \underline{w} = (1, -1, 1, 1)$$

e per il sottospazio W' generato da

$$\underline{v}' = (-1, 1, 1, 1) \qquad \underline{w}' = (1, 1, 1, -1).$$

(4.2) Verificare che $W \oplus W' = \mathbb{R}^4$.
(4.3) Sia $T \colon \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ l'operatore con matrice associata nella base canonica

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Verificare che W e W' sono sottospazi invarianti per T. Scrivere le matrici associate a $T|_W$ nella base $\underline{v}, \underline{w}$ ed a $T|_{W'}$ nella base $\underline{v}', \underline{w}'$
(4.4) Dire se T è diagonalizzabile. Descrivere geometricamente l'operatore T determinando in particolare basi per il nucleo e per l'immagine.
(4.5) Verificare che $\underline{v} \perp \underline{w}$ e che $\underline{v}' \perp \underline{w}'$. Determinare l'immagine del vettore

$$\underline{t} = \underline{v} - \underline{w}'$$

tramite l'operatore $S \colon \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ definito come segue
(i) W e W' sono sottospazi invarianti per S.
(ii) $S|_W$=rotazione di $\pi/4$ nel verso positivo definito dalla base $\underline{v}, \underline{w}$.
(iii) $S|_{W'}$=rotazione di $\pi/4$ nel verso positivo definito dalla base $\underline{v}', \underline{w}'$.

Esercizio 5. Spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^4$ come sopra. Sia $T \colon \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ l'operatore definito dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(5.1) Verificare che la terza e la quarta colonna sono entrambe combinazioni lineari della prima e della seconda colonna.
(5.2) Scrivere equazioni cartesiane del sottospazio $\operatorname{Im} T$.

(5.3) Scrivere equazioni cartesiane del sottospazio $(\operatorname{Im} T)^{\perp}$.

(5.4) I vettori

$$\underline{v}_1 = (1,1,0,1), \qquad \underline{v}_2 = (1,2,1,2)$$

costituiscono una base di $\operatorname{Im} T$. Sia $T' = T|_{\operatorname{Im} T}$ la restrizione di T al sottospazio immagine. Scrivere la matrice A' associata a T' nella base $\underline{v}_1, \underline{v}_2$.

(5.5) Dire se T' è diagonalizzabile.

(5.6) Verificare che l'operatore $S\colon \operatorname{Im} T \longrightarrow \operatorname{Im} T$ di matrice

$$B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

nella base $\underline{v}_1, \underline{v}_2$, è l'operatore di simmetria rispetto alla retta vettoriale definita da $\underline{u} = \underline{v}_1 + 2\underline{v}_2$ parallelamente al vettore $\underline{w} = \underline{v}_1 - \underline{v}_2$.

Scrivere la matrice dell'operatore $ST'\colon \operatorname{Im} T \longrightarrow \operatorname{Im} T$ nella base $\underline{v}_1, \underline{v}_2$.

Esercizio 6. Spazio euclideo $\mathbb{R}^4$ con base canonica $\underline{e}$ e prodotto scalare canonico $\bullet$.

È dato il piano σ generato dai vettori

$$\underline{v}_1 = (1,-1,0,0) \qquad \underline{v}_2 = (0,0,1,1)$$

(6.1) Trovare le equazioni cartesiane del piano σ.

(6.2) Trovare le equazioni cartesiane e parametriche del piano ortogonale $\sigma^{\perp}$

(6.3) Sia S l'operatore di proiezione ortogonale sul piano σ. Determinare la matrice associata a S nella base canonica.

(6.4) Determinare la matrice associata all'operatore lineare $R : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ che lascia fisso il piano $\sigma^{\perp}$ e induce una rotazione di $\pi/2$ sul piano σ nel verso positivo associato alla base $\underline{v}_1 = (1,-1,0,0), \underline{v}_2 = (0,0,1,1)$.

Sia b l'applicazione $b : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$b(\underline{u}, \underline{v}) = (S\underline{u} \bullet \underline{v})$$

(6.5) Verificare che b è una forma bilineare *simmetrica*.

(6.6) Si denoti con b' la restrizione di b al piano τ di equazione

$$\begin{cases} x^1 - x^3 = 0 \\ x^2 + x^4 = 0 \end{cases}$$

Determinare gli indici di positività e negatività di b'.

Esercizio 7. Spazio euclideo $\mathbb{R}^3$ con prodotto scalare canonico. Coordinate (x,y,z) associate alla base canonica. $\underline{e}$.

Sia $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'operatore lineare definito dalle relazioni

$$T(1,1,0) = (1,2,-1), \quad T(0,1,1) = (-1,1,1), \quad T(0,0,1) = (-1,0,1).$$

(7.1) Determinare la matrice associata a T nella base canonica.

(7.2) Scrivere equazioni cartesiane per l'immagine $\operatorname{Im} T$, per il nucleo $N(T)$ e per $(\operatorname{Im} T)^{\perp}$.

(7.3) Sia S l'operatore di proiezione ortogonale sul sottospazio $\operatorname{Im} T$. Determinare la matrice associata a S nella base canonica.
(7.4) È vero che $S \circ T = T \circ S$?
Sia b l'applicazione $b : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$b(\underline{u}, \underline{v}) = \frac{1}{2}(T\underline{u} \bullet \underline{v} + \underline{u} \bullet T\underline{v}).$$

(7.5) Verificare che b è una forma bilineare simmetrica.
(7.6) Si denoti con b' la restrizione di b al piano π di equazione

$$x - y + z = 0$$

Determinare $A^{\underline{g}}_{b'}$ con $\underline{g} = \{\underline{g}_1 = (1,1,0),\ \underline{g}_2 = (1,2,1)\}$ ($\underline{g}$ è una base di π).
(7.7) La matrice $A^{\underline{g}}_{b'}$ non è diagonale. Determinare una base di π che sia diagonalizzante per b'.

Esercizio 8. Spazio euclideo $\mathbb{R}^3$ come nell'esercizio precedente.

1) Verificare che l'operatore lineare $S_1 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definito dalla matrice

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

è un operatore di simmetria rispetto ad un piano π. Determinare l'equazione cartesiana di π.

2) Sia S_2 l'operatore di simmetria ortogonale rispetto a π. Verificare che $S_1 \neq S_2$.
3) Verificare che la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ -2 & -1 & -2 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

è associata all'operatore $T = S_1 \circ (3S_2)$.

4) Dire se T è diagonalizzabile.
5) Determinare il volume del parallelepipedo di spigoli $T(\underline{e}_1), T(\underline{e}_2), T(\underline{e}_3)$ (utilizzare il prodotto misto) .

Esercizio 9. Spazio euclideo $\mathbb{R}^3$. Base canonica e prodotto scalare canonico fissati. Coordinate (x, y, z) associate alla base canonica.

Sono dati i piani

$$\alpha_1 : x + y - z = 0 \qquad \alpha_2 : x + y + z = 0$$

Siano S_1, S_2 le simmetrie ortogonali rispetto ad α_1, α_2 rispettivamente.

Scrivere le equazioni di S_1 e delle'operatore $T = S_1 \circ S_2$. Verificare che il piano $\pi : x - y = 0$ è invariante per T ma non contiene alcun autovettore di T.

Esercizio 10. Spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^4$ con base canonica fissata e coordinate associate (x^1, x^2, x^3, x^4). Prodotto scalare canonico.

Sia σ il piano vettoriale generato dai vettori

$$\underline{g}_1 = (1,0,1,0) \qquad \underline{g}_2 = (0,1,0,-1).$$

(10.1) Determinare equazioni cartesiane per σ.
(10.2) Verificare che i vettori

$$\underline{g}_3 = (1,0,-1,0) \qquad \underline{g}_4 = (0,1,0,1)$$

costituiscono una base per il piano $\sigma^{\perp}$. Verificare che il vettore $\underline{w} = (1,1,-1,1)$ appartiene a $\sigma^{\perp}$ scrivendolo come combinazione lineare di $\underline{g}_3$ e $\underline{g}_4$,
(10.3) Sia π il piano di equazioni

$$\begin{cases} x^2 + x^3 = 0 \\ x^1 - x^4 = 0. \end{cases}$$

Verificare che π ammette una base $\{\underline{f}, \underline{h}\}$ con $\underline{f} \in \sigma$ e $\underline{h} \in \sigma^{\perp}$.

Sia $T \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^4)$ l'operatore lineare definito dalle seguenti 3 condizioni:
(i) σ e $\sigma^{\perp}$ sono sottospazi invarianti per T.
(ii) $T|_{\sigma}$ = rotazione $\pi/4$ nel verso positivo definito dalla base $\underline{g}_1$, $\underline{g}_2$.
(iii) $T|_{\sigma^{\perp}}$ = proiezione ortogonale sul vettore $\underline{w} = (1,1,-1,1)$

(10.4) Determinare la matrice ssociata a T nella base $\underline{g} = \{\underline{g}_1, \underline{g}_2, \underline{g}_3, \underline{g}_4\}$
(10.5) Dire se T è diagonalizzabile.
(10.6) Dire se il piano π di cui in (10.3) è invariante rispetto a T.

Esercizio 11. Spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^3$ con prodotto scalare canonico.
Base canonica $\underline{e} = \{\underline{e}_1 = (1,0,0),\ \underline{e}_2 = (0,1,0),\ \underline{e}_3 = (0,0,1)\}$ con coordinate associate (x,y,z).

Sia $S : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'operatore lineare definito dalle relazioni

$$S(1,1,2) = (3,-1,2) \quad S(2,1,0) = (-2,5,0) \quad S(0,0,1) = (2,-2,1).$$

(11.1) Determinare la matrice associata ad S nella base canonica $\underline{e}$.
(11.2) Verificare che S è un operatore di simmetria rispetto ad un piano π parallelamente alla retta r di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Determinare il piano π. Verificare che S *non* è l'operatore di simmetria ortogonale rispetto a π.
(11.3) Determinare la matrice associata nella base canonica $\underline{e}$ all'operatore T di simmetria ortogonale rispetto al piano $\sigma = (r)^{\perp}$, con r uguale alla retta di cui in (11.2)
(11.4) Sia $R = S \circ T$. Verificare che il piano τ generato da r e dalla retta $(\pi)^{\perp}$ è invariante per R.

Esercizio 12. Spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^4$ con base canonica $\underline{e} = \{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3, \underline{e}_4\}$ fissata e coordinate associate (x^1, x^2, x^3, x^4). Prodotto scalare canonico $\bullet$.

Sia W il sottospazio 2-dimensionale di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori

$$\underline{g}_1 = (1,0,1,0) \qquad \underline{g}_2 = (0,1,0,1).$$

Si consideri il vettore

$$\underline{h}_1 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}).$$

Sia U il sottospazio generato dai vettori $\underline{g}_1, \underline{g}_2, \underline{h}_1$.
(12.1). Determinare equazioni cartesiane per il sottospazio W.
(12.2). Sia $\underline{h}_2$ l'unico vettore generatore di $U^{\perp}$ verificante le due condizioni

$$||\underline{h}_2|| = 1 \qquad \underline{h}_2 \bullet \underline{e}_2 > 0.$$

Determinare le coordinate di $\underline{h}_2$.
(12.3). Verificare che $\underline{h}_1, \underline{h}_2$ costituiscono una base ortogonale di $W^{\perp}$.
(12.4). Sia $T : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ l'operatore lineare definito come segue

(i) W e $W^{\perp}$ sono sottospazi invarianti per T.

(ii) $T|_W =$ proiezione ortogonale sul vettore $\underline{g}_1$

(iii) $T|_{W^{\perp}}$ ha la retta $\mathbb{R}(\underline{h}_1 + \underline{h}_2)$ come nucleo e la retta $\mathbb{R}(\underline{h}_2 - \underline{h}_1)$ come autospazio associato all'autovalore $\lambda = -1$.
Determinate la matrice associata a T nella base canonica $\underline{e}$.
(12.5). Determinare la dimensione dell'immagine e del nucleo di T.
(12.6). Verificare che il sottospazio V di equazioni

$$\begin{cases} x^2 = 0 \\ x^4 = 0 \end{cases}$$

è invariante per T. Dire se T ristretto a V è iniettivo.

§5: Esercizi facoltativi e complementi.

Il seguente teorema è di notevole interesse:
Teorema. Sia V uno spazio vettoriale e siano $T, S \in \mathrm{End}(V)$. Supponiamo che
(i) T e S siano diagonalizzabili.
(ii) $T \circ S = S \circ T$.
Sotto tali ipotesi esiste una base *comune* di autovettori.

Osservazioni. La prima ipotesi del teorema afferma che esistono due basi (a priori distinte) $\underline{f}$ e $\underline{g}$ di V tali che

$$M_{\underline{f}}(T) = \Delta_1 \qquad M_{\underline{g}}(S) = \Delta_2$$

con Δ_1, Δ_2 le matrici diagonali formate dagli autovalori di T ed S rispettivamente. La base $\underline{f}$ è formata da autovettori di T, la base $\underline{g}$ è formata da autovettori di S. Il contenuto del teorema è che se *inoltre* i due operatori commutano allora esiste una base $\underline{h}$ che è formata da autovettori *sia per T che per S* ; brevemente

$$\exists\ \underline{h} \text{ base di } V \text{ tale che } \quad M_{\underline{h}}(T) = \Delta_1 \qquad M_{\underline{h}}(S) = \Delta_2.$$

Detto in parole: i due operatori possono essere diagonalizzati *simultaneamente*.
Esercizio 1. (facoltativo) Dimostrare il teorema.

Suggerimenti : Per dimostrare il teorema provate ad usare il principio d'induzione sulla dimensione di V. Se $\dim V = 1$ la tesi del teorema è chiaramente vera. Sia $n = \dim V$. Supponiamo quindi che il teorema sia vero per spazi vettoriali di dimensione $< n$ e dimostriamolo per spazi di dimensione n. Possiamo supporre che ad esempio $T \neq c\,\mathrm{Id}$, $c \in \mathbb{R}$ (perchè altrimenti il teorema sarebbe ovvio). Considerate gli autovalori di T ed i relativi autospazi. Dato che $T \neq c\,\mathrm{Id}, c \in \mathbb{R}$, la dimensione di ogni autospazio di T è *strettamente* minore di n. Usando la seconda ipotesi dimostrate che ognuno di questi autospazi è un sottospazio *invariante* per S. Ha senso quindi considerare la restrizione di S ad ognuno di questi autospazi. Dimostrate che ognuna di queste restrizioni è ancora un operatore diagonalizzabile; osservando poi che essa commuta con *la restrizione di* T all'autospazio (la quale è semplicemente uguale alla moltiplicazione per l'autovalore) concludete la dimostrazione.

Esercizio 2. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 3. Supponiamo che sia definito in V un prodotto scalare. Fissiamo una base ortonormale $\underline{e} = \{\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}\}$ e siano (x, y, z) le coordinate associate. Seguendo Sernesi pag. 223 possiamo definire in V un'operazione di prodotto vettoriale $\wedge : V \times V \to V$.

Sia $\underline{a} = a^1\underline{i} + a^2\underline{j} + a^3\underline{k}$ un fissato vettore di V. Si consideri l'applicazione $T_{\underline{a}} : V \longrightarrow V$ che associa a $\underline{v}$ il vettore $\underline{a} \wedge \underline{v}$: $T_{\underline{a}}(\underline{v}) = \underline{a} \wedge \underline{v}$.

(2.1) Verificare che $T_{\underline{a}}$ è lineare.

(2.2) Scrivere la matrice $M_{\underline{e}}(T_{\underline{a}})$ associata a $T_{\underline{a}}$ nella base ortonormale fissata. Questa matrice dipende dalle cordinate di $\underline{a}$. La denotiamo più semplicemente $A_{T_{\underline{a}}}$

(2.3) Determinare il nucleo di $T_{\underline{a}}$ e *la dimensione* dell'immagine di $T_{\underline{a}}$.

Esercizio 3 Si consideri l'applicazione

$$F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathrm{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$$

definita da

$$\underline{a} \longrightarrow A_{T_{\underline{a}}}$$

con $A_{T_{\underline{a}}}$ la matrice di cui in (6.2). Verificare che F è un'applicazione lineare. Trovare il nucleo di F. Descrivere l'immagine di F. Dare una formula che leghi $F(\underline{a} \wedge \underline{b})$ ed il prodotto righe per colonne di $F(\underline{a})$ e di $F(\underline{b})$.

Inizio parte facoltativa.
Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n.
Definizione V è un'**algebra** se esiste una *moltiplicazione fra vettori*, la denotiamo con $\star$, che è distributiva:

$$(\lambda\underline{v} + \mu\underline{w}) \star \underline{z} = \lambda(\underline{v} \star \underline{z}) + \mu(\underline{w} \star \underline{z})$$
$$\underline{z} \star (\lambda\underline{v} + \mu\underline{w}) = \lambda(\underline{z} \star \underline{v}) + \mu(\underline{z} \star \underline{w}).$$

Un esempio di algebra è dato da $V = \mathrm{Hom}(W, W) \equiv \mathrm{End}(W)$, con W un qualsiasi spazio vettoriale di dimensione finita. In questo caso la moltiplicazione $\star$ è per definizione uguale alla composizione di applicazioni: $T \star S := T \circ S$.

Un altro esempio è fornito da $V = \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ con prodotto uguale per definizione al prodotto righe per colonne.

In questi due esempi il prodotto fra vettori è associativo; in generale però l'associatività non fa parte della definizione di algebra.

Definizione. $(V, \star)$ è un'**algebra di Lie** (leggi "li") se valgono le seguenti due proprietà addizionali :

$$\underline{v} \star \underline{w} = -\underline{w} \star \underline{v}$$
$$(\underline{v} \star \underline{w}) \star \underline{z} + (\underline{w} \star \underline{z}) \star \underline{v} + (\underline{z} \star \underline{v}) \star \underline{w} = 0.$$

La prima è la proprietà di *anticommutazione*. La seconda è detta "identità di Jacobi". Le algebre di Lie giocano un ruolo fondamentale in Matematica e in Fisica.

Esercizio 4. Sia $(V, < , >)$ uno spazio vettoriale euclideo tridimensionale. Fissiamo una base ortonormale.

(4.1) Verificare che lo spazio vettoriale euclideo tridimensionale V con il prodotto fra vettori definito dal prodotto vettoriale $\wedge$ è un'algebra di Lie di dimensione 3.

Suggerimento per (4.1): La proprietà distributiva e di anticommutazione sono già enunciate e dimostrate in Sernesi pag 224. A questo punto vi si richiede solo di dimostrare l'identità di Jacobi. La potete ottenere dalla seguente identità:

$$(\underline{v}_1 \wedge \underline{v}_2) \wedge \underline{v}_3 = (< \underline{v}_1, \underline{v}_3 >)\underline{v}_2 - (< \underline{v}_2, \underline{v}_3 >)\underline{v}_1$$

Tralasciate in un primo tempo la verifica di quest'ultima identità.

(4.2) Verificare che $\mathrm{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ con il prodotto

$$A \star B := A \cdot B - B \cdot A$$

(con $\cdot$ = prodotto righe per colonne) è un'algebra di Lie di dimensione 9.

(4.3) Verificare che $\mathcal{A}_{3\times 3}(\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}) | A = -A^T\}$ con lo stesso prodotto è un'algebra di Lie di dimensione 3.

Definizione: Un omomorfismo fra due algebre $(V, \star)$ e $(W, \odot)$ è un'applicazione *lineare* $S : V \longrightarrow W$ che rispetta il prodotto: $S(\underline{a} \star \underline{b}) = S(\underline{a}) \odot S(\underline{b})$. S è un isomorfismo di algebre se inoltre S è biunivoco (iniettivo e suriettivo). Se $(V, \star)$ e $(W, \odot)$ sono algebre di Lie ed S è una biezione lineare che rispetta il prodotto allora si dice che S è un *isomorfismo di algebre di Lie.*

Esempio: sia V uno spazio vettoriale di dimensione n e sia $\underline{e}$ una sua base. L'applicazione

$$M_{\underline{e}} : (\mathrm{End}(V), \circ) \rightarrow (\mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{R}), \cdot)$$

che associa a T la matrice $M_{\underline{e}}(T)$ è un isomorfismo di algebre (l'avete visto a lezione; cfr anche Sernesi Teorema 12.2 (con $V = W$) e Proposizione 12.3 (con $U = V = W$)).

Esercizio 5. Mettendo insieme gli esercizi 2, 3 e 4, scrivete una dimostrazione per il seguente

Teorema. Sia V uno spazio vettoriale euclideo con base ortonormale fissata. Sia $(V, \wedge)$ l'algebra di Lie definita considerando come prodotto fra vettori il prodotto vettoriale $\wedge$. Sia $(\mathcal{A}_{3\times 3}(\mathbb{R}), \star)$ l'algebra di Lie delle matrici antisimmetriche con prodotto $\star$ definito da $A \star B = A \cdot B - B \cdot A$.
L'applicazione $F : (V, \wedge) \longrightarrow (\mathcal{A}_{3\times 3}(\mathbb{R}), \star)$ introdotta nell'Esercizio 3 è un isomorfismo di algebre di Lie.
Fine parte facoltativa.[2]

[2] Un bravo/brava a chi è arrivato in fondo: questo è un classico risultato, importante sia in Geometria che in Meccanica; lo trovate dato per esercizio, ad esempio, nel libro *Foundations of Mechanics* di R. Abraham e J. Marsden (ma io l'ho ovviamente diluito in vari esercizi....).

§5: Programma svolto fino ad oggi sul Sernesi.

Fino a pag. 73: abbiamo visto tutto con l'eccezione dell'Esempio 6 pag. 61.

Da pag. 73 a pag. 82 fino alla riga 16: tutto con l'eccezione della dimostrazione della Proposizione 6.9

Abbiamo saltato le pag. 83, 84.

Da pag. 85 a pag. 88 abbiamo fatto tutto. Leggete l'esempio sul determinante di Vandermonde perché è importante e non difficile.

Da pag. 91 a pag. 97 inclusa: tutto. Abbiamo saltato pag. 98 e 99.

Da pag. 101 a pag. 114: tutto con l'eccezione dello spazio quoziente (pag. 106) che faremo a Gennaio.

Abbiamo saltato il teorema di Talete, di Pappo, di Desargues.

Da pag. 119 a pag. 129: abbiamo visto tutto.

Da pag. 132 a pag. 142, fino alla riga 7: tutto con l'eccezione dell'esempio 6 pag. 136, del corollario 11.7 pag. 139 e del teorema 11.9.

Abbiamo saltato il Teorema 11.12 e la prima metà di pag. 143 (ma non vi farà certo male darci un'occhiata). Abbiamo saltato la seconda metà di pag. 143, pag. 144, pag. 145, pag. 146.

Da pag. 147 a pag. 156 fino alla riga (-16) abbiamo fatto tutto.

Abbiamo saltato pag. 157, 158.

Da pag. 160 a pag. 171 abbiamo fatto tutto. Abbiamo saltato l'osservazione 7 pag. 171 (ma è interessante almeno leggerne l'enunciato)

Non abbiamo visto nulla del §14 (pag. 175 e seguenti)

Abbiamo visto tutto da pag. 190 a pag. 227 con le seguenti eccezioni: non mi sono soffermato sulle osservazioni e proposizioni che coinvolgono il duale (ad esempio 4) e 5) della Proposizione 15.6); ho saltato i complementi da pag. 199 a pag. 202; non ho fatto la seconda dimostrazione del teorema 16.1; la parte su angoli orientati etc l'avete fatta, a questo punto, da soli (vedi §1 di queste note); le osservazioni pag. 221 su $\mathbb{C}$ sono state fatte da Rogora quando ha spiegato i numeri complessi.