Corso di Laurea Specialistica/Magistrale

Topologia Algebrica

Anno Accademico 2013-14. Prof. Paolo Piazza.

Programma d'esame.

Referenze.
[**BT**] Bott-Tu, "Differential forms in Algebraic Topology"
[**B**] Bredon, "Topology and Geometry"
[**GH**] Griffiths-Harris, "Principles of Algebraic Geometry"
[**P**] P.P. "Appunti di K-Teoria", disponibili al seguente link
`http://www1.mat.uniroma1.it/people/piazza/k-teoria.pdf`
[**V**] Vick, "Homology theory. An introduction to Algebraic Topology". Seconda edizione.
[**W**] Warner, "Foundations of differentiable manifolds and Lie groups"

Omologia singolare. Definizione di omologia singolare. Primi esempi. Proprietà funtoriali. Omologia di un convesso di $\mathbb{R}^n$. Operatore di omotopia. L'omologia singolare è un funtore omotopico Retratti. Retratti di deformazione. Successione esatta lunga associata ad una successione esatta corta di complessi. Teorema dei piccoli simplessi (solo sketch della dimostrazione). Successione di Mayer-Vietoris. Calcolo della omologia di S^n. Prime applicazioni dell'omologia: (i) sfere di dimensione diversa non sono omotopicamente equivalenti; (ii) teorema del punto fisso di Brower; (iii) ogni campo di vettori in S^n con $n = 2k$, si annulla in almeno un punto (iv) enunciati del teorema di Jordan-Brouwer e del teorema di Brouwer sull'invarianza del dominio. Omologia relativa. Teorema di escissione. Omologia ridotta.
Referenze bibliografiche. [**V**], Capitolo 1 fino a pagina 29 (Corollario 1.26 incluso). Aggiungere gli enunciati del teorema di Jordan-Brouwer e del teorema di Brouwer sull'invarianza del dominio. Per la dimostrazione del teorema dei piccoli simplessi (solo sketch) vedere l'appendice. La parte sull'omologia relativa si trova nel secondo capitolo di [**V**], a partire da pag. 44

CW-complessi ed omologia cellulare. Spazi ottenuti per incollamento. Spazio ottenuto incollando una n-cella. Esempi notevoli: sfera, spazio proiettivo reale di dimensione n, spazio proiettivo complesso di dimensione n. CW-complessi finiti. Proprietà omologiche: retratti di deformazioni forti, teorema dell'omeomorfismo relativo, calcolo di $H_j(X^k, X^{k-1})$. Omologia cellulare. L'omologia cellulare è isomorfa all'omologia singolare. L'omologia singolare di una coppia di CW-complessi (X,A) è un gruppo abeliano finitamente generato; prodotto di due CW-complessi finiti. Caratteristica di Eulero-Poincaré e suo calcolo cellulare. Calcolo della omologia cellulare di $\mathbb{R}P^n$.
Referenze bibliografiche. [**V**], tutto il Capitolo 2. Dim. Prop. 2.1, 2.5, 2.13 : solo sketch. Dimostrazione Teo. 2.9 facoltativa.

Assiomi e teorema di Eilenberg-Steenrod. Tor(,). Omologia a coefficienti in un gruppo abeliano G. Esempio: omologia di $\mathbb{R}P^n$ a coefficienti in $\mathbb{Z}_2$. Teorema dei coefficienti universali. Assiomi di Eilenberg-Steenrod. Teorema di esistenza e unicità di Eilenberg-Steenrod.

Referenze bibliografiche. [**V**], Capitolo 3, fino a pag. 77 (dimostrazione del teorema dei coefficienti universali facoltativo). Per il teorema dei coefficienti universali e sue conseguenze consultare anche [**B**], Cap. V, Sezione 7.

Coomologia singolare. Complessi di cocatene. Duale di un complesso di catene. Coomologia di un complesso di cocatene. Esempi: la coomologia singolare a valori in G; la coomologia di de Rham. Omomorfismi di complessi di cocatene. Omomorfismi di complessi di cocatene che sono "cochain homotopic". Esempio: il Lemma di Poincaré per la coomologia di de Rham. Successione esatta lunga associata ad una successione esatta corta di complessi di cocatene. Esempio: Mayer-Vietoris per la coomologia di de Rham. Ext(,). Proprietà di base. Omorfismo di Kronecker. Teorema dei coefficienti universali in coomologia. Conseguenze. Escissione in coomologia.
Referenze bibliografiche. [**V**], Capitolo 3, a partire da pag. 77. Consultare anche [**B**], Cap. V, Sezione 7. Per gli esempi relativi alla coomologia di de Rham consultare [**BT**].

Teorema di de Rham-Hodge Teorema di de Rham. Operatore * di Hodge; aggiunto formale di d; Laplaciano di Hodge-de Rham; enunciato del teorema di decomposizione di Hodge; isomorfismo di Hodge-de Rham; dualita' di Poincare' via il teorema di Hodge.
Referenze bibliografiche. Per il teorema di de Rham: [**B**], cap V, sezione 9. (Per la formula di Stokes sulle p-catene consultare [**W**] pagine 141-145.) Per il teorema di Hodge: [**W**] Capitolo 6.

Teorema di Dolbeault-Hodge Varieta' complesse, forme di tipo (p,q), coomologia di Dolbeault; varieta' hermitiane, forma di Kaehler, operatore * di Hodge sulle forme (p,q); enunciato del teorema di decomposizione di Hodge per l'operatore $\overline{\partial}$; isomorfismo di Hodge-Dolbeault, teorema di Kunneth. Enunciato del teorema di Dolbeault; sketch della dimostrazione (lo sketch della dimostrazione è facoltativo ed utilizza il teorema sulle risoluzioni acicliche di un fascio); enunciato della dualita' di Kodaira-Serre.
Referenze bibliografiche. Griffiths-Harris, Capitolo 0. Per i teoremi di de Rham-Dolbeault-Hodge consultare anche la guida bibliografica disponibile al seguente link
`http://www1.mat.uniroma1.it/people/piazza/hodge-derham-dolbeault.pdf`

Teorema di Thom. Richiami sui fibrati vettoriali: funzioni di transizione, orientabilita', operazioni sui fibrati, pull-back. Coomologia a supporto compatto: Mayer-Vietoris e Lemma di Poincare'. Coomologia a supporto compatto verticale in un fibrato E. Integrazione lungo le fibre. Formula di proiezione. Theorema di Thom. Forma di Thom. Dualita' di Poincare' e forma di Thom.
Referenze: Bott-Tu: pp 37,38,39, 40 fino alla riga 6. da pag. 60 a pag. 69. Per i fondamenti sui fibrati vettoriali consultare anche gli *Appunti di K-Teoria.*

Prodotti in coomologia. Cross-product; teorema di Eilenberg-Zilber.
Referenze: Bredon "Topology and Geometry", cap IV, sezione 16; cap VI, sezione 1 fino al Corollario 1.4 compreso.
Teorema di Künneth algebrico. Teorema di Künneth. Cross-product in coomologia. cup-product. Teorema: se R è un anello commutativo unitario allora $H^*(X, R)$ e' una R-algebra graduata commutativa unitaria. Approssimazioni dell'identita'.

Approssimazione di Alexander-Whitney. Cap product.
Referenze: **[V]**, Cap. 5, fino a pag. 135 e poi da pag. 140 fino a pag. 142 (dimostrazione dei teoremi di Künneth facoltative; sostituire il teorema dei modelli aciclici con il teorema di Eilenberg-Zilber in **[B]**).

K-Teoria. Il semigruppo Vect (X). Teorema di omotopia. Incollamento di fibrati. Morfismi di fibrati. Ogni fibrato e' un sommando diretto di un fibrato banale. Teorema di classificazione. Gruppo di Grothendieck associato ad un semiruppo. K-teoria di uno spazio compatto. K-teoria ridotta. Equivalenza stabile. Sospensioni e incollamenti. K-Teoria di una coppia. Successione esatta associata ad una coppia: $K(X,y) \rightarrow K(X) \rightarrow K(Y)$. K-teoria ridotta di una sospensione. Successione esatta lunga. Enunciato del teorema di Atiyah-Janich. Enunciato del teorema di periodicita' di Bott. Idea della dimostrazione. Proprieta' coomologiche: successione esatta lunga periodica. Enunciato del teorema di Thom in K-Teoria.
Referenze: consultare **[P]**, *Appunti di K-Teoria*, e le referenze in essi contenuti.