

**Corso di Laurea in Fisica**  
**Corso di Geometria. Canale 3.**

**Anno Accademico 2023-24. Proff. Paolo Piazza e Vito Felice Zenobi.**

**Programma d'esame.**

**Avvertenza:** il testo adottato è *Geometria Analitica con elementi di algebra lineare* di Marco Abate e Chiara de Fabritiis, edito da McGraw-Hill. Le referenze bibliografiche si riferiscono alla **terza edizione** di questo testo.

*I paragrafi sono da considerarsi nella loro interezza se non specificato diversamente.*

Sulla pagina Web

<https://www1.mat.uniroma1.it/people/piazza/geofis-23-24.htm>

sono disponibili i complementi, le note e gli esercizi distribuiti durante il corso; *tutto questo materiale è parte integrante del corso.*

**Gruppi, anelli, campi.** Consultate le note nella pagina web del corso.

**Vettori geometrici.** Vettori applicati. Coordinate. Equazioni di rette e piani.  
*Capitolo 2. Paragrafi 2.1, 2.2, 2.3.*

**Numeri complessi.** Numeri complessi. Coniugio. Proprietà elementari. Enunciato del teorema fondamentale dell'algebra. *Capitolo 4. Paragrafi 4.6, 4C1.*

**L'eliminazione di Gauss.** Esempi e definizioni. Sistemi triangolari superiori. Esistenza e unicità per un sistema triangolare superiore (dimostrazione facoltativa). Il metodo di eliminazione di Gauss.  
*Capitolo 3. Paragrafi 3.1, 3.2, 3.3.*

**Spazi vettoriali.** Spazi e sottospazi. Combinazioni lineari. Indipendenza lineare e basi. Esistenza delle basi (dimostrazione facoltativa). Teorema del completamento (dimostrazione facoltativa). Somma e intersezione di sottospazi. Formula di Grassmann (dimostrazione facoltativa). Somme dirette.  
*Capitolo 4. Paragrafi 4.1, 4.2, 4.3, 4.4, 4.5, 4.6.*

**Applicazioni lineari.** Definizioni ed esempi. Proiezioni. Simmetrie. Nucleo e immagine. Rango. Teorema della dimensione. Teorema di Rouché-Capelli.  
*Capitolo 5. Paragrafi 5.1, 5.2 fino al Corollario 5.9 compreso. Prop. 5.11 (2) : solo enunciato. Proiezioni e simmetrie sono state ampiamente trattate negli esercizi.*

**Sistemi lineari.** Sistemi a scala. Riduzione a scala. Tecniche di calcolo. Equazioni parametriche e cartesiane di sottospazi. Sottospazi affini.  
*Capitolo 6. Paragrafi 6.1, 6.2, 6.3, 6.4, 6.5.*

**Matrici e applicazioni lineari.** Composizione e isomorfismi. Prodotto di matrici. Matrici invertibili.  
*Capitolo 7. Paragrafi 7.1, 7.2, 7.3. Per la Proposizione 7.4: omettere la parte relativa al duale. Dimostrazione Prop. 7.5 facoltativa.*

**Cambiamenti di base.** Matrice di cambiamento di base. Matrice associata ad un'applicazione lineare. Matrici simili. Magiche notazioni

*Capitolo 8. Paragrafi 8.1, 8.2. Dimostrazione Prop. 8.1: facoltativa. Per le " Magiche notazioni " consultate le note nella pagina web del corso.*

**Determinanti.** Esistenza e unicità (esistenza: solo enunciato). Sviluppi di Laplace (solo enunciati). Teorema di Binet (con dimostrazione). Teorema di Cramer (dimostrazione facoltativa). Teorema degli orlati (solo enunciato).

Inoltre: esercizio 9.12 ed enunciato dell'esercizio 9.18.

Permutazioni e determinante: facoltativo. *Capitolo 9. Paragrafi 9.1, 9.2, 9.3, 9.4. Per permutazioni e determinante consultare Sernesi (le pagine rilevanti sono reperibili nella pagina web del corso).*

**Autovalori ed autovettori.** Definizioni ed esempi. Polinomio caratteristico. Molteplicità. Diagonalizzabilità.

*Tutto il capitolo 13 con l'esclusione della dimostrazione di (2) Teorema 13.3. Consultate anche le note "Alcune informazioni importanti sui polinomi" disponibili nella pagina web. Per l'esame scritto: si consiglia di rivedere la regola di Ruffini oppure la divisione euclidea fra polinomi.*

**Prodotto scalare in  $\mathcal{V}_O$ .** Definizione e proprietà del prodotto scalare in  $\mathcal{V}_O$ . Condizioni di ortogonalità. Angoli. Ortogonalizzazione di Gram-Schmidt. Prodotto vettoriale.

*Consultate le " Note sul prodotto scalare in  $\mathcal{V}_O$ " e le "Note sul prodotto vettoriale" reperibili nella pagina web del corso.*

### **Prodotti scalari e spazi vettoriali metrici.**

- (1) Prodotti scalari in uno spazio vettoriale  $V$ .
- (2) Nucleo (o radicale) di un prodotto scalare
- (3) Prodotti scalari (semi)definiti positivi, negativi, indefiniti.
- (4) Esempi: prodotto scalare canonico, prodotti scalari in  $\mathbb{R}^n$  definiti da matrici simmetriche, prodotto scalare  $L^2$ . Altri esempi.
- (5) Spazi vettoriali metrici
- (6) Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz. Disuguaglianza triangolare. Distanza. Angoli. (Dimostrazioni facoltative)
- (7) Basi ortogonali. Gram-Schmidt.
- (8) Proiezioni ortogonali

*Capitolo 11. Def. 11.2 e Def. 11.3. Esem. 11.1 (con def. 11.1). Esempi 11.2, 11.6, 11.7. 11.8. Def. 11.7 e Def. 11.9, Esem. 11.9, Prop. 11.2 (dimostrazione facoltativa), Oss. 11.5 e 11.6, Def 11.10 e 11.11, Lemma 11.3, Def. 11.12 e 11.13, Prop. 11.4, Cor. 11.5, Teo. 11.6 (dimostrazione facoltativa), Cor. 11.7, Corollario 11.8, Prop. 11.9, Def. 11.14 e suo collegamento con le proiezioni in generale, Def. 11.15, Lemma 11.10, Prop. 11.11. Corollario 11.12 (facoltativo e solo enunciato).*

**Teorema spettrale per operatori simmetrici.** Operatori simmetrici. Teorema spettrale.

*Per il teorema spettrale fate riferimento alle "Note sul teorema spettrale".*

**Teorema di Sylvester** Forme bilineari simmetriche. Matrice associata ad una forma bilineare simmetrica in una data base. Matrici congruenti. Cambiamenti di basi ortonormali in uno spazio vettoriale metrico. Gruppo ortogonale. Teorema

di Sylvester (con dimostrazione che utilizza il Teorema Spettrale). **Parzialmente facoltativo:** dimostrazione del Teorema di Sylvester tramite vettori non-isotropi (solo enunciati ed algoritmo; dimostrazioni facoltative).

*Consultate le note "Diagonalizzazione delle forme bilineari simmetriche" disponibili nella pagina web del corso. Per l'ultimo argomento consultate le "Note sul teorema di Sylvester dimostrato senza il teorema spettrale per operatori simmetrici".*

**Forme hermitiane. Operatori unitari.** Forme hermitiane, spazi vettoriali hermitiani, operatori hermitiani e corrispondente teorema spettrale. Cambiamenti di basi ortonormali in uno spazio vettoriale hermitiano. Gruppo unitario. Teorema di Sylvester per forme hermitiane. Isometrie lineari nel caso reale e complesso (operatori ortogonali (caso reale) e operatori unitari (caso complesso)). Esempi (rotazioni, simmetrie ortogonali...). Teorema spettrale per operatori unitari.

*Consultate le note "Forme hermitiane e spazi vettoriali hermitiani" nella pagina web del corso. Alcune informazioni si trovano negli esercizi (che sono sempre risolti).*

**Geometria analitica in dimensione 3.** Riferimenti affini. Cambiamenti di riferimento affine (dimostrazione omessa). Rette e piani e loro equazioni. Ortogonalità di rette e piani.

*Consultate "Brevi appunti di geometria analitica in dimensione 3" nella pagina web del corso.*