**Corso di Laurea in Matematica**
**Corso di Geometria 1.**

**Anno Accademico 2014-15. Prof. Paolo Piazza.**

**Programma d'esame.**

**Avvertenza:** i testi adottati sono *Geometria 1* e *Geometria 2* di Edoardo Sernesi (editore Boringhieri). Le referenze bibliografiche si riferiscono alla **seconda edizione** di *Geometria 1.*

*I paragrafi sono da considerarsi nella loro interezza se non specificato diversamente.*

Nella pagina Web
`http://www1.mat.uniroma1.it/people/piazza/geo1-14-15.htm`
sono disponibi i complementi, le note e gli esercizi distribuiti durante il corso; *tutto questo materiale è parte integrante del corso.*

**1. Complementi di Algebra Lineare.** Duale. Biduale. Annullatore di un sottoinsieme S di V e annullatore di un sottoinsieme R del duale di V. Forme bilineari. Simmetriche e antisimmetriche. Esempi. Matrice associata ad una forma bilineare in una fissata base. Ripasso notazione del Sernesi per la matrice associata ad un'applicazione lineare una volta fissata una base in partenza e una in arrivo. Matrice del cambiamento di base. Matrici congruenti. Rango di una forma bilineare. Forme bilineari non-degeneri. Forme bilineari simmetriche e forme quadratiche. Diagonalizzazione. Conseguenze della diagonalizzazione quando il campo è algebricamente chiuso. Teorema di Sylvester. Teorema spettrale e teorema di Sylvester come suo corollario. Forme bilineari (semi)definite positive, negative, indefinite. Segnatura. Operatori unitari. Aggiunto. Teorema spettrale per operatori unitari. Forme hermitiane. Teorema di Sylvester per forme hermitiane. Teorema spettrale per operatori hermitiani.
**Referenze.** Sernesi 1
Per il duale ed il biduale: 11.13 e 11.14. Per la nozione di annullatore e sue proprietà: Abate, Geometria (note disponibili alla settima settimana).
Per le forme bilineari: Sezioni 15 e 16.
Per la parte sul teorema spettrale vedere la sezione 22 e le note del docente `Note sul Teorema Spettrale`.
Per il teorema di Sylvester tramite il teorema spettrale potete consultare le note del docente `Appunti sulla diagonalizzazione delle forme bilineari simmetriche`.
Per l'ultima parte: sezioni 20 e 23.

**2. Geometria affine ed euclidea.**
Definizione assiomatica di spazio affine. Prime proprietà. Riferimenti. Sottospazi. Equazioni parametriche e cartesiane. Parallelismo. Sottospazi incidenti. Dimensione dell'intersezione. Proiezioni. Cambiamenti di riferimento affine. Isomorfismi di spazi affini. Affinità . Esempi: traslazioni, affinità che fissano un punto, ometetie. Struttura di un'affinità. Descrizione in coordinate. Immagine di un sottospazio affine tramite un'affinità . Proprietà affini. Esempi. Spazi euclidei. Isometrie. Proprietà euclidee.
**Referenze.** Sernesi 1.
Sezioni 7 ed 8 (tutte); pp 109 e 110. pp 159, 160 e 161. Tutta la sezione 14. pp246, 247. pp 266, a partire dalla definizione 20.6, p. 267, 268, 269 fino a 20.10 *incluso.*

**3. Geometria proiettiva.**
Spazi proiettivi. Prime proprietà : sottospazi, riferimenti proiettivi, mutua posizione di sottospazi. Cordinate omogenee e non-omogenee. Spazi proiettivi e spazi affini. Proprieta' elementari. Dualita' negli spazi proiettivi. Esempi ed esercizi. Proiettivita'. Proprieta' proiettive. Birapporto di quattro punti.
**Referenze.** Sernesi 1.
Sernesi: sezione 24, tutta. (La quadrica di Klein, punto 6 di 24.5, è facoltativa.)
Sezione 25, da pag 315 a pag. 318 riga 9 (prima edizione: da pag. 297 a pag 300, riga 9).
Sottosezione 25.4: 25.4.1, 25.4.2, 25.4.3, 25.4.4.
Sezione 26: tutta (teorema di Desargues *facoltativo*). Per la dualità consultare anche le note del docente in rete.
Sezione 27, con i punti 1, 3 e 4 dei complementi (27.10) inclusi. Punti 2 e 5 di 27.10: *facoltativi.*

**4. Curve algebriche.**
Ipersuperfici algebriche proiettive. Curve algebriche proiettive. Generalità. Curve algebriche reali. Classificazione proiettiva delle coniche. Classificazione proiettiva delle ipersuperfici quadriche. Curve algebriche affini. Proprieta' affini. Curve euclidee. Proprietà euclidee. Classificazione affine ed euclidea delle coniche. Proprietà geometriche delle coniche euclideo. Classificazione delle quadrighe euclideo Curve algebriche: riducibilità ed irriducibilità. Intersezione di retta e curva nel caso proiettivo e nel caso affine. Intersezione di due curve algebriche. Proprietà locali delle curve algebriche: molteplicità, tangenti pricipali, asintoti. Teorema di Bezout. Proprietà della molteplicità d'intersezione di due curve algebriche in un loro punto comune. Flessi. Hessiana. Invarianza proiettiva della molteplicità, delle tangenti, dei flessi, etc. Polari. Prima polare e suo significato geometrico. Introduzione ai sistemi lineari di curve piane. Fasci di coniche. Cubiche e loro classificazione.
**Referenze.** Sernesi 1.
Sezione 24.5, punto 5. Sezione 28: tutta, escluso il punto 1 dei complementi. Sezione 29: tutta con l'esclusione di 29.4.3 (che è però *facoltativo*) e la parte immediatamente successiva (punti $K$-razionali di $\mathcal{C}$).
Sezione 30.
Sezione 31: tutta, ma i complementi (31.4) sono *facoltativi.*
Sezione 32: tutta, esclusi i complementi 32.3.1 e 32.3.1. Per la classificazione delle quadriche euclidee consultare anche le note in rete (settima settimana).
Sezione 33. Consultare anche le pagine in Maschietti *Lezioni di Geometria* relative al teorema di Bezout (disponibili nella pagina web del corso).
Sezione 34.
Sezione 35: tutta (ma il Teorema 35.3 e il punto 3 dei complementi 35.5 sono omessi). Per i fasci di coniche consultare anche Maschietti *Esercizi di Geometria* (pagine disponibili nella pagina web del corso)
Sezione 36: tutta (ma la dimostrazione del Teorema 36.5 è facoltativa). Il teorema 36.6 è facoltativo (comunque, senza dimostrazione).

**Topologia.**
Nozioni di riscaldamento e ripasso degli spazi metrici. Definizione di topologia. Base. Sottobase. Sistema di intorni di un punto. Primo e secondo assioma di numerabilita'. Successioni. Esempi. Interno, esterno, frontiera, chiusura, derivato.

Insiemi densi. Spazi separabili. Topologia di Zariski. Applicazioni continue. Omeomorfismi. Proprietà topologiche. Sottospazi. Esempi. Prodotti. Quozienti. Lo spazio proiettivo. Nastro di Moebieus. Richiami su spazi di Hasdorff e unicità del limite. Ricoprimenti aperti e loro raffinamenti in spazi topologici. Spazi topologici compatti. Esempi. Un sottospazio compatto di uno spazio di Hausdorff è chiuso. Un sottospazio chiuso di uno spazio compatto è compatto. Compattezza degli intervalli chiusi e limitati di $\mathbb{R}$. Compattezza del prodotto di due spazi compatti. Caratterizzazione dei compatti di $\mathbb{R}^n$ con i suoi chiusi e limitati. Compattezza del quoziente di spazi compatti. Esistenza del massimo e minimo di una funzione continua a valori reali definita su uno spazio compatto. Compattezza di $P^n(\mathbb{R})$, $P^n(\mathbb{C})$ e dei supporti delle curve algebriche proiettive in $P^2(\mathbb{R})$, $P^2(\mathbb{C})$

Spazi topologici connessi e connessi per archi. Caratterizzazione dei connessi di $\mathbb{R}$ con gli intervalli. Connessione del quoziente di spazi connessi. Non esistenza di un omeomorfismo tra $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^n$ per $n > 1$. Connessione della chiusura di un sottospazio connesso. Un esempio di spazio connesso ma non connesso per archi. Cenni sulle componenti connesse di uno spazio topologico e su spazi totalmente sconnessi. Varietà topologiche, coordinate locali. Lo spazio proiettivo è una varietà topologica.

**Referenze.** Sernesi 2.

Sezione 1. Sezione 2. Sezione 3: solo definizioni, enunciati ed esempi. Sezione 4: tutta (ma le dimostrazioni degli esempi sono omesse). Sezione 5: solo definizioni, enunciati ed esempi. Sezione 6: solo definizioni, enunciati ed esempi; le pp 69, 70, 71 sono omesse. Sezione 7: fino al Cor. 7.5 compreso con dimostrazioni; continuare con gli esempi (le dimostrazioni degli esempi sono omesse). I punti 9 e 10 a p. 80 e 81 sono facoltativi. Punti 11, 12 e 13 pp. 82 $\longrightarrow$ 85: con dimostrazioni. Sezione 8: solo spazi di Hausdorff, solo definizioni, enunciati ed esempi (essenzialmente pp 88, 89). Sezione 9 (solo definizioni, enunciati ed esempi): da p. 101 a p. 104, incluso enunciato di Bolzano-Weiestrass . Poi: p. 106 + enunciato teorema di Tychonoff. Cor. 9.12 e 9.13; poi 9.14.1, 9.14.2, 9.14.3, 9.14.4.

Sezione 11 (solo definizioni, enunciati ed esempi): pp 125, 126, 127 fino a 11.7 esclusa. Enunciato teo. 11.12. Cor. 11.13 (utilizza 11.4). Sezione 12 (solo definizioni, enunciati ed esempi): definizione di connessione per archi e Prop. 12.1, 12.2 e Cor 12.3.

Per la nozione di varietà topologica leggere da Def. 19.2 a Def 19.3 incluse specializzando al caso $k = 0$. Studiare l'esempio dello spazio proiettivo a p. 187.