

**Corso di Laurea in Matematica**  
**Corso di Geometria 1.**  
**Anno Accademico 2016-17. Prof. Paolo Piazza.**  
**Programma d'esame.**

**Avvertenza:** il testo adottato è *Geometria 1* di Edoardo Sernesi (editore Boringhieri). Le referenze bibliografiche si riferiscono alla **seconda edizione**.

*I paragrafi sono da considerarsi nella loro interezza se non specificato diversamente.*

Nella pagina Web

<http://www1.mat.uniroma1.it/people/piazza/geo1-16-17.htm>

sono disponibili i complementi, le note e gli esercizi distribuiti durante il corso; *tutto questo materiale è parte integrante del corso.*

**1. Algebra Lineare.** Duale. Biduale. Annullatore di un sottoinsieme  $S$  di  $V$  e annullatore di un sottoinsieme  $R$  del duale di  $V$ . Forme bilineari. Simmetriche e antisimmetriche. Esempi. Matrice associata ad una forma bilineare in una fissata base. Ripasso notazione del Sernesi per la matrice associata ad un'applicazione lineare una volta fissata una base in partenza e una in arrivo. Matrice del cambiamento di base. Matrici congruenti. Rango di una forma bilineare. Forme bilineari non-degeneri. Forme bilineari simmetriche e forme quadratiche. Diagonalizzazione. Conseguenze della diagonalizzazione quando il campo è algebricamente chiuso. Teorema di Sylvester. Forme bilineari (semi)definite positive, negative, indefinite. Segnatura. Prodotti scalari. Spazi vettoriali euclidei. Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz. Norma associata ad un prodotto scalare. Disuguaglianza triangolare. Basi ortonormali. Matrici ortogonali. Nozione di gruppo e sottogruppo. Esempi.  $SL(n, \mathbb{R})$ ,  $O(n)$ ,  $SO(n)$ . Metodo di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt. Decomposizione in somma diretta tramite un sottospazio ed il suo ortogonale. Operatori simmetrici. Teorema spettrale. Dal Teorema spettrale al teorema di Sylvester. Forme hermitiane su uno spazio vettoriale complesso; (semi-)definite positive (negative). Matrice associata ad una forma hermitiana rispetto ad una base. Matrici hermitiane. Forme hermitiane associate a matrici hermitiane su  $\mathbb{C}^n$ . Teorema di Sylvester per forme hermitiane: una forma hermitiana ammette una base diagonalizzante. Spazio vettoriale hermitiano; norma di un vettore, disuguaglianza di Cauchy-Schwarz, disuguaglianza triangolare. Operatori unitari ed hermitiani in uno spazio vettoriale hermitiano. Proprietà dei loro autovalori. Autovettori associati ad autovalori distinti sono ortogonali. Teorema spettrale per operatori unitari e per operatori hermitiani. Corollari sulle matrici unitarie e sulle matrici hermitiane.

**Referenze.** Sernesi 1

Per il duale ed il biduale: sezione 11, pp 143,144, 145 (prima metà), 146.

Per la nozione di annullatore e sue proprietà: Abate, Geometria.

Per le forme bilineari: Sezioni 15 e 16.

Per gli spazi vettoriali euclidei: sezione 17, fino a p. 237 inclusa. Per la parte sul teorema spettrale vedere la sezione 22 e le note del docente **Note sul Teorema Spettrale**.

Per il teorema di Sylvester tramite il teorema spettrale potete consultare le note

2

del docente

**Teorema Spettrale e diagonalizzazione delle forme bilineari simmetriche reali.**

Per la nozione di gruppo e sottogruppo e per  $SL(n, \mathbb{R})$ ,  $O(n)$ ,  $SO(n)$ : p. 193, 194.

Per l'ultima parte: sezioni 20, fino a p. 266 Prop. 20.5 inclusa; sezioni 22 e 23.