

Geometria Differenziale a.a. 07/08 (Prof. P. Piazza).

Programma d'esame

Testi :

- $[A-T]$:= Marco Abate e Francesca Tovena "Curve e Superfici", Ed. Springer. Testo principale.
- $[S]$:= Edoardo Sernesi "Geometria 2", ed Boringhieri.
- $[Ma]$:= Mini corso di Topologia (note di Marco Manetti, disponibili in rete)

Su Internet alla pagina Web

<http://www.mat.uniroma1.it/people/piazza/geodiff-07-08.htm>
sono disponibili gli esercizi assegnati durante il corso; *questo materiale è parte integrante del programma d'esame.*

Teoria locale delle curve.

Definizione di curva; lunghezza d'arco; curvatura; versore normale; curve biregolari; versore binormale; torsione; formule di Frenet-Serret; teorema fondamentale della teoria locale delle curve.

Capitolo 1 in [A-T], Sezioni 1.1, 1.2, 1.3.

Brevi cenni alle 1-sottovarietà e loro classificazione; brevi cenni al teorema fondamentale in spazi di dimensione qualsiasi (facoltativo)

Sezioni 1.6 e 1.7 in [A-T].

Teoria locale delle superfici.

Superficie parametrizzata; superficie regolare; esempi; superfici di livello; teorema di Sard (solo enunciato), applicazioni del teorema della funzione implicita e del teorema della funzione inversa. Funzioni differenziabili. Piano tangente. Vettori tangenti e derivazioni. Superfici di rotazione. Cilindri. Superfici rigate.

Tutto il Capitolo 3 di [A-T].

Curvature.

Prima forma fondamentale. Esempi. Isometrie. Proprietà intrinseche. Orientabilità. Versore normale. Mappa di Gauss. Curvature normali. Seconda forma fondamentale. Curvature principali. Formula di Eulero. Curvatura di Gauss. Classificazione dei punti di una superficie. Formule esplicite. Esempi. Teorema Egregium. Area e curvatura gaussiana.

Tutto il Capitolo 4 di [A-T] (anche i Problemi 4.1, 4.2, 4.4, 4.5, 4.7, 4.8, 4.9, 4.10, 4.17, 4.18)

Geodetiche

Geodetiche e curvatura geodetica. Proprietà di minimizzazione. Campi vettoriali.

Capitolo 5 di [A-T], fino a pag. 274 inclusa.

Teorema di Gauss-Bonnet e Teorema di Poincaré-Hopf .

Enunciato del Teorema Gauss-Bonnet e sua dimostrazione (solo enunciato esistenza triangolazioni; solo enunciato lemma delle tangenti di Hopf).

Zeri isolati di un campo di vettori. Indice di uno zero isolato (solo enunciato che la definizione è ben posta). Teorema di Poincaré-Hopf.

Capitolo 6 [A-T], fino a pag 324, osservazione 6.3.15 + Poincaré-Hopf

Ripasso di Topologia

Spazi topologici, parte interna, chiusura ed intorni. Applicazioni continue. Spazi metrici. Sottospazi e immersioni. Definizione di topologia prodotto. Spazi di Hausdorff. Assiomi di numerabilità'. Connessione. Componenti connesse. Spazi compatti. Topologia quoziente.

[Ma]

Varietà Differenziabili. Fibrati

Definizione di varietà differenziabile. Esempi notevoli: sfera, spazi proiettivi, grassmanniane, n-sottovarietà di \mathbb{R}^N .

Spazi Tangenti. Differenziali. Orientabilità. Diffeomorfismi locali. Immersioni e sottovarietà. Immersioni. Ulteriori esempi: ipersuperfici algebriche, varietà algebriche, $GL_n(\mathbb{R})$, $SL_n(\mathbb{R})$, $O(n)$. Lemma di Sard (solo enunciato). Teorema di Whitney (solo enunciato). Partizione dell'unità (solo definizione ed enunciato della sua esistenza). Fibrati vettoriali: definizione, esempi, funzioni di transizione, sezioni, banalità di un fibrato, sezioni indipendenti e banalità (facoltativo), metriche su un fibrato, fibrato tangente, fibrato universale..

[S], da pag 173 a pag 181. Pag 187. Da pag 190 a 210 inclusa (teorema 25.4: solo enunciato). Da pag 213 a pag 227 (solo enunciati delle Prop. 25.4, 25.5, e del Teorema 26.2 e del Cor. 26.3). Pag. 238 per il lemma di Sard. Pag 241-2 per il fibrato tangente. Pag 243 e seguenti per Whitney e partizione dell'unità.

Per i fibrati vettoriali: consultare le note in rete.