

Corso di Laurea in Matematica. Corso di Algebra 1

Programma d'esame.

Anno Accademico 2011-12. Prof. Paolo Piazza.

Libri di Testo:

[PC] Giulia Maria Piacentini Cattaneo: "Algebra un approccio algoritmico", ed Zanichelli.

[A] Michael Artin: "Algebra", ed Boringhieri .

[C] Giulio Campanella "Appunti di Algebra 1" ed Nuova Cultura.

[C2] Giulio Campanella "Appunti di Algebra 1. 200 esercizi svolti". Ed. Nuova Cultura.

N.B.: per gli argomenti seguiti dal simbolo (*) le dimostrazioni sono da considerarsi facoltative.

Ripasso di teoria degli insiemi. Relazioni. Unione, intersezione e composizione di relazioni. Esempi. Relazioni di equivalenza. Partizioni e relazioni di equivalenza. Insieme quoziente. Teorema di decomposizione per le applicazioni. Relazioni d'ordine parziale. Catene. Diagramma di Hasse. Cenno sugli assiomi di Peano. Assioma del buon ordinamento. Principio d'induzione (prima e seconda forma). Equivalenza dell'assioma del buon ordinamento con il principio d'induzione (in entrambe le forme) Ripasso sulle applicazioni. Cardinalità. Insiemi equipotenti. Teorema di Schroeder-Bernstein (*). Insiemi numerabili. Un insieme infinito contiene sempre un sottoinsieme numerabile. Un sottoinsieme di un numerabile è finito o numerabile. Aggiungendo o togliendo ad un insieme numerabile un insieme finito si ottiene un insieme numerabile. L'unione di un numero finito di insiemi numerabili e' numerabile. L'unione di un'infinita' numerabile di insiemi numerabili e' numerabile (processo diagonale di Cantor). Esempi: gli interi, i razionali, il prodotto di due insiemi numerabili e' numerabile. Teorema di Cantor ($|X| < |\mathcal{P}(X)|$). Teorema di Dedekind.

Strutture algebriche: gruppo, gruppo commutativo, anello, campo. Esempi. Proprietà elementari dei gruppi: unicità dell'elemento neutro, unicità del reciproco, legge di cancellazione. Proprietà elementari degli anelli. Divisori dello zero, legge di cancellazione in un anello integro. Interi: definizione e prime proprietà . Somma e prodotto. Gli interi sono un anello commutativo unitario integro. Esistenza ed unicità della divisione. Massimo Comun Divisore. Identità di Bezout. Algoritmo euclideo delle divisioni successive. Numeri primi. Teorema fondamentale dell'aritmetica. Elementi primi ed irriducibili di un dominio d'integrità . Ogni elemento primo è irriducibile. Minimo comun multiplo e sua relazione con MCD. Applicazioni del teorema fondamentale dell'aritmetica. L'anello delle classi resto modulo n. Divisori dello zero. Invertibili. \mathbb{Z}_p con p primo Equazioni e sistemi. Il teorema cinese del resto. Sistemi generali. Piccolo teorema di Fermat. Funzione di Eulero. Teorema di Eulero(-Fermat)

Polinomi su un campo K . Struttura di anello commutativo unitario. Dominio d'integrità. Invertibili. Associati. Funzioni polinomiali. Divisione con resto. MCD. Identità di Bezout. Lemma di Euclide. Elementi irriducibili e primi in $K[X]$. Un elemento è primo se e solo è irriducibile. Fattorizzazione unica. Minimo comun multiplo e massimo comun divisore via fattorizzazione unica. Teorema Ruffini. Principio identità dei polinomi. Irriducibilità : proprietà generali. Irriducibilità

nel campo complesso. Teorema fondamentale dell'algebra (con dimostrazione). Irreducibilità nel campo reale. Irreducibilità sui razionali e gli interi. Teorema di Gauss. Criterio Eisenstein. Riduzione mod p .

Anelli. Omomorfismi. Ideali. Anello quoziente. Teorema di omomorfismo. Primo e secondo teorema di isomorfismo. Ideale generato da un sottoinsieme. Ideali principali. Ideali primi e massimali. Caratterizzazione ideali massimali e primi tramite il quoziente. Campo dei quozienti di un dominio di integrità. Anelli euclidei. Interi di Gauss. Ogni dominio euclideo è principale. MCD. Elementi invertibili. Domini a fattorizzazione unica. Elementi primi ed irriducibili. Principale implica a fattorizzazione unica. Polinomi a coefficienti in un dominio a fattorizzazione unica. Caratteristica di un anello. Sottocampo fondamentale di un campo.

Gruppi. Esempi. Ordine di un elemento. Gruppi ciclici. Sottogruppi. Classi laterali destre e sinistre modulo un sottogruppo. Teorema di Lagrange e suoi corollari. Omomorfismo. Nucleo. Relazioni compatibili e sottogruppi normali. Gruppo quoziente. Teorema di omomorfismo.

Moduli su un anello. Proprietà generali. Matrici, moduli liberi e basi. Principio di permanenza delle identità (*). Diagonalizzazione di matrici intere (*). Sottogruppi di un gruppo abeliano libero sono liberi. Anelli noetheriani (solo definizione e enunciati dei teoremi fondamentali). Sottomoduli di moduli finitamente generati (solo enunciati). Presentazione di un modulo finitamente generato. Matrice di presentazione e sue semplificazioni. Teorema di classificazione gruppi abeliani finitamente generati. Diagonalizzazione di matrici a valori in un anello euclideo (solo enunciati). Teorema di struttura per i moduli su un dominio euclideo (solo enunciati). Forma canonica di Jordan (cenni).

Referenze bibliografiche dettagliate: vedere la pagina web del corso.