# Programma di Geometria 1. Gruppo A-L.
## Anno Accademico 1999-2000. Prof. Paolo Piazza

**Avvertenza:** il testo adottato è *Geometria 1* di E. Sernesi, edito da Bollati Boringhieri. Tutte le referenze bibliografiche riportate qui sotto si riferiscono a questo testo. I paragrafi sono da considerarsi nella loro interezza se non specificato diversamente.
In portineria, oppure sulla pagina Web
`http://www.mat.uniroma1.it/people/piazza/`
sono disponibi le note e gli esercizi distribuiti durante il corso.

**1.** Vettori geometrici. Spazi vettoriali. Esempi.

**2.** Matrici. Spazio vettoriale delle matrici. Matrici diagonali, simmetriche, antisimmetriche, triangolari. Prodotto righe per colonne e sue proprietà. Matrice inversa. Matrici ortogonali. Matrici ortogonali $2 \times 2$. Notazione a blocchi.

**3.** Sistemi di equazioni lineari. Generalità. Sistemi a gradini. Metodo di eliminazione di Gauss-Jordan. Metodo dell'inversa per sistemi quadrati. Matrici elementari. Matrici elementari ed invertibilità di una matrice.

**4.** Sottospazi di uno spazio vettoriale. Esempi. Intersezione di sottospazi. Somma di sottospazi. Somma diretta. Combinazioni lineari. Sottospazio generato da $k$ vettori. Dipendenza ed indipendenza lineare. Base di uno spazio vettoriale. Dimensione. Esempi. Dimensione dei sottospazi di uno spazio vettoriale. Formula di Grassmann vettoriale. Traccia di una matrice (pag. 65, Es. 12)

**5**. Rango di una matrice. Rango ed operazioni elementari. Proprietà del rango. Matrici quadrate, rango ed invertibilità. Sottomatrici. Rango e sottomatrici quadrate invertibili. Teorema di Kronecker-Rouché-Capelli.

**6**. Permutazioni (Appendice B, pag 441). Determinante di una matrice quadrata. Proprietà fondamentali del determinante. Determinante e rango. Ordine dei minori non nulli e rango. Altre proprietà del determinante. Complemento algebrico. Formula di Laplace (*Prop. 6.9; dimostrazione omessa*); matrice cofattore, inversa di una matrice invertibile. Regola di Cramer. *La definizione 6.12 ed il teorema 6.13 sono omessi.* Osservazioni ed esempi. Principio dei minori orlati. *La terza osservazione pag 86 è omessa.* Discussione di un sistema lineare. Formula di Vandermonde (*dimostrazione facoltativa*).

**7.** Definizione di spazio affine su uno spazio vettoriale. Esempi: piano affine ordinario, spazio affine ordinario, spazio affine associato ad uno spazio vettoriale, spazio affine numerico $A^n(\mathbb{R})$. Riferimento affine. Coordinate affini. Sottospazi affini; giacitura. Esempi.

Indipendenza di punti. Simmetrico di un punto $P$ rispetto ad un punto $C$. Ulteriori proprietà dei sottospazi affini. Esempi ed osservazioni (tutto il sottoparagrafo).

**8.** Equazioni cartesiane e parametriche di sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale. Equazioni cartesiane e parametriche di sottospazi affini di uno spazio affine. Sottospazi paralleli. Spazio quoziente di uno spazio vettoriale rispetto ad un sottospazio. Mutua posizione di sottospazi affini. Proiezione di uno spazio affine $A$ su un sottospazio affine $S$ di giacitura $W$ parallelamente ad una giacitura $U$ tale che $U \oplus W = V$.

**9.** Geometria di un piano affine. Vettore direttore di una retta. Mutua posizione di due rette. Fascio di rette per un punto. Fascio improprio di rette parallele. *Teorema 9.3: omesso. Teorema 9.4: omesso. Teorema 9.5: omesso.*

**10.** Geometria di uno spazio tridimensionale affine. Piani e loro equazioni. Mutua posizione di due piani. Mutua posizione di retta e piano. Mutua posizione di due rette. Condizione di complanarità di due rette. Fasci di piani. Retta complanare a due rette sghembe e passante per un punto esterno a queste due rette.

**11.** Applicazioni lineari. Esempi (comprese proiezioni e simmetrie, vedi le note distribuite durante il corso). Prime proprietà delle applicazioni lineari. Nucleo. Immagine. Isomorfismi di spazi vettoriali. Teorema fondamentale di omomorfismo. Isomorfismo di $V$ con il suo duale. *Pag 143, 144: facoltative. Pag 145, 146: omesse.*

**12.** Applicazioni lineari e matrici. Matrice associata ad un'applicazione lineare $F : V \to W$ rispetto a due fissate basi $\underline{\mathbf{v}}$ $\underline{\mathbf{w}}$ di $V$, $W$ rispettivamente. Espressione di un'applicazione lineare in coordinate. L'isomorfismo fra $\mathrm{Hom}(V, W)$ e $M_{n\times m}(\mathbb{R})$. Applicazione lineare $F_A : V \to W$ associata ad una matrice $A \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$. Matrice associata alla composizione di due applicazioni (formula magica generale). Matrice del cambiamento di coordinate. Orientazione. Esempi. Cambiamenti di riferimento affine.

**13.** Operatori lineari (endomorfismi). Operatori invertibili; biezione fra $GL(V)$ e $GL_n(\mathbb{R})$. Formula magica ([13.1]). Determinante di un operatore. Matrici simili. Collegamento fra matrici simili e matrici associate ad un operatore in due basi diverse. Diagonalizzabilità di un operatore. Diagonalizzabilità di una matrice. Collegamento fra le due definizioni. Autovettori, autovalori e loro proprietà. Autospazio associato ad un autovalore. Polinomio caratteristico. Diagonalizzabilità e autovettori. Criterio di diagonalizzabilità. Esempi ed osservazioni. Molteplicità geometrica ed algebrica. Criterio di diagonalizzabilità. Caso reale e caso complesso. (Vedi anche le note distribuite durante il corso). Diagonalizzazione simultanea di due operatori che commutano: *solo enunciato.* (vedi le note distribuite durante il corso, esercizi per il periodo 22/12/99 - 10/01/00).

**14.** Definizione di gruppo. Gruppo di trasformazioni di un insieme. Sottogruppi. Esempi: $GL_n(\mathbb{R})$, $O(n)$, $SL_n(\mathbb{R})$, $SO(n)$. Gruppi di trasormazioni. Stabilizzatore. Omomorfismo di gruppi. Isomorfismo di gruppi. L'isomorfismo di $GL(V)$ con $GL_n(\mathbb{R})$. Isomorfismi di spazi affini. Esempi. Affinità di uno spazio affine. Gruppo affine $\mathrm{Aff}(A)$. Gruppo affine di ordine $n$: $\mathrm{Aff}_n(\mathbb{R})$. Esempi: traslazioni, affinità che fissano un punto, omotetie, simmetrie rispetto ad un punto. Sottoinsiemi di $A$ simmetrici rispetto ad un punto. Lemma di decomposizione (*Lemma 14.7: solo enunciato.*) Le affinità di $\mathbb{R}^n$. Le affinità di uno spazio affine in coordinate. Isomorfismo fra $\mathrm{Aff}(A)$ e $\mathrm{Aff}_n(\mathbb{R})$. Figure geometriche. Figure affinemente equivalenti. Proprietà affini. Esempio dei sottospazi affini e della loro dimensione. *Proposizione 14.12: solo enunciato. Corollario 14.13: solo enunciato.*

**15.** Forme bilineari. *pag 192: facoltativa.* Matrice associata ad una forma bilineare in una fissata base. Isomorfismo fra $\mathrm{Bil}(V)$ e $M_n(\mathbb{R})$. Matrici congruenti. Matrici associate ad una forma bilineare in due diverse basi. Rango di una forma bilineare. (*(4) e (5) della Prop. 15.6: facoltativi*). Forme bilineari simmetriche. $b$-ortogonalità. Vettori isotropi. Diagonalizzazione. Forme quadratiche. *I complementi in 15.10 sono tutti omessi.*

**16.** Diagonalizzazione delle forme quadratiche (*seconda dimostrazione Teor. 16.1 omessa*). Caso complesso e reale (teorema di Sylvester). Indici di positività e negatività, segnatura di una forma bilineare reale. Forme quadratiche (semi)definite positive, (semi)definite negative e indefinite. Criterio affiché una matrice simmetrica sia definita positiva.

**17.** Prodotti scalari. Spazi vettoriali euclidei. Disuguaglianza di Schwarz. Disuguaglianza triangolare. Insieme ortonormale di vettori. Base ortogonale di uno spazio vettoriale euclideo di dimensione finita. Ortogonalità ed indipendenza. Espressione del prodotto scalare nelle coordinate associate ad una base ortonormale. Cambiamenti di coordinate associate a due basi ortonormali. Teorema di Gram-Schmidt. La decomposizione di $V$ come somma diretta $V = W \oplus W^{\perp}$ con $W$ un sottospazio. Identità pitagorica in uno spazio vettoriale euclideo. Angolo convesso fra due vettori. L'esempio dello spazio vettoriale ordinario. Angolo orientato. Rotazioni di un piano euclideo (vedi anche gli esercizi assegnati durante il periodo 22/12/99 - 10/01/00). *Complemento n. 1 pag 221/222: facoltativo.*

**18.** Prodotto vettoriale in uno spazio euclideo orientato. Sue proprietà. (*Identità di Lagrange: facoltativa.*)

**19.** Spazi euclidei. Cambiamenti di riferimento cartesiano. Distanza. Angolo fra due rette orientate. Piani euclidei: angolo fra due rette, condizione di ortogonalità fra due rette, distanza punto-retta. Spazi euclidei di dimensione 3: vettore ortogonale ad un piano, angolo convesso fra due piani, angolo fra retta e piano, distanza punto-piano, distanza punto-retta, distanza retta-retta. Perpendicolare comune a due rette sghembe. Sfere e dischi. *I complementi 2,3,5 sono omessi. Il 4 è facoltativo.*

**20.** Operatori unitari. 5 condizioni equivalenti. Gruppo degli operatori unitari. Matrice associata ad un operatore unitario in una base ortonormale. Isomorfismo fra i gruppi $O(V)$ e $O(n)$. Autovalori di un operatore unitario. Aggiunto di un operatore. Matrice dell'aggiunto rispetto ad una base ortonormale. Operatori simmetrici.

Isometrie di uno spazio euclideo $E$. Gruppi di isometrie. Isometrie di $E^n$. L'isomorfismo di gruppi $\mathrm{Isom}(E) \leftrightarrow \mathrm{Isom}(E^n)$. Espressione di un'isometria $E \to E$ in coordiante cartesiane. *Teorema 20.8: solo enunciato.* Gruppo delle isometrie di una figura. Esempio della sfera *senza dimostrazione.* Figure geometriche congruenti. *I complementi 1 e 2 pag 250, 251, sono omessi.* Simmetria rispetto ad un iperpiano. *I complementi pag 254, 255 sono omessi.*

**21.** Descrizione degli elementi di $O(2)$. Rotazioni *(fino a pag 258, riga 7). Da pag 258 riga 8 a pag 265 riga -2: omesso.* Descrizione degli elementi di $SO(3)$: *lemma 21.5, solo enunciato (facoltativa la dimostrazione); pag 266, dalla riga 15 alla riga 25, da fare; Proposizione 21.6, omessa; Teorema di Eulero, solo enunciato.*

**22.** Autovalori di una matrice simmetrica reale. Teorema spettrale. Diagonalizzazione delle forme bilineari simmetriche tramite basi ortonormali. Forma canonica di Jordan.

**28.** Definizione di curva algebrica in $A^2(\mathbb{R})$ e in $E^2$: *pag 337, 338 fino alla riga (-10). Poi pag 339, a partire dalla riga (-16), pag 340, pag 341. Pag 342, 343: omesse.* Curve simmetriche rispetto ad un punto e rispetto ad una retta *(pag. 344). Complemento 1 pag 345: omesso. Pag 346: fare il complemento 2.*

**31.** Matrice di una conica affine. Proprietà affini delle coniche. Definizioni fondamentali. Teorema di classificazione (solo caso reale). *Osservazioni pag 364 e seguenti: solo la prima.* Classificazione euclidea delle coniche. *Resto del paragrafo: omesso.*

**32.** Ellisse: sue simmetrie, semiassi, fuochi, eccentricità, direttrici. Iperbole: sue simmetrie, rami dell'iperbole, asintoti, fuochi, eccentricità, direttrici. Parabola: fuoco, direttrice. Proprietà focali *(Prop. 32.1 e Prop. 32.2: solo enunciato). Il resto del paragrafo è omesso.*