Corso di Laurea in Fisica. a.a. 2023-24
Prof. P. Piazza
Il prodotto vettoriale in $\mathcal{V}_O$

Orientazione di $\mathcal{V}_O$.
Due basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ di $\mathcal{V}_O$ sono dette equiorientate se il determinante della matrice del cambiamento di base è positivo. In tal caso diremo che $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ definiscono la stessa orientazione in $\mathcal{V}_O$; diremo che $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ definiscono orientazioni opposte di $\mathcal{V}_O$ se il determinante della matrice del cambiamento di base è negativo. Un'orientazione di $\mathcal{V}_O$ è quindi fissata, per definizione, dalla scelta di una base e, di conseguenza, di tutte le basi equiorientate con tale base. È ovvio che $\mathcal{V}_O$ ha due orientazioni [1]

Prodotto vettoriale. Fissiamo un'orientazione in $\mathcal{V}_O$, ad esempio tramite la scelta di una base ortonormale $\{\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}\}$: rimane allora definito un prodotto fra vettori

$$\mathcal{V}_O \times \mathcal{V}_O \ni (\underline{v}, \underline{w}) \longrightarrow \underline{v} \wedge \underline{w} \in \mathcal{V}_O$$

che viene chiamato *prodotto vettoriale* (e viene anche denotato con $\times$). Per definizione $\underline{v} \wedge \underline{w}$ è il vettore di $\mathcal{V}_O$ univocamente caratterizzato dalle tre seguenti proprietà:

(i) la lunghezza del segmento che definisce $\underline{v} \wedge \underline{w}$ è uguale a $||\underline{v}||||\underline{w}|| \sin \widehat{\underline{v}\underline{w}}$ che è anche l'area del parallelogramma definito da $\underline{v}, \underline{w}$ se questi due vettori sono non nulli.
Notiamo che $\underline{v} \wedge \underline{w} = \underline{0}$ se i due vettori sono paralleli oppure se uno di essi è il vettore nullo.

(ii) se i due vettori sono non-nulli e *non* sono paralleli, allora la direzione del segmento che definisce $\underline{v} \wedge \underline{w}$ è quella ortogonale al piano $\mathrm{Span}(\underline{v}, \underline{w})$.

(iii) se i due vettori sono non-nulli e *non* sono paralleli, allora il verso del segmento che definisce $\underline{v} \wedge \underline{w}$ è quello per cui la base $\{\underline{v}, \underline{w}, \underline{v} \wedge \underline{w}\}$ è equiorientata alla base che definisce l'orientazione di $\mathcal{V}_O$.

In Fisica si usa fissare un'orientazione di $\mathcal{V}_O$ tramite la mano sinistra o la mano destra facendo corrispondere $\underline{i}$ al dito medio, $\underline{j}$ all'indice, $\underline{k}$ al pollice. Le due mani definiscono effettivamente le due orientazioni di $\mathcal{V}_O$ dato che hanno gli ultimi due vettori della base coincidenti ma il primo vettore, invece, con verso opposto (provare per credere !) [2]. Se fissiamo ad esempio l'orientazione della mano sinistra allora il verso del prodotto vettoriale è quello del pollice se facciamo coincidere $\underline{v}$ al dito medio e $\underline{w}$ al dito indice (ovviamente della mano sinistra) .

Proposizione 5. Il prodotto vettoriale gode delle seguenti propietà:

- $\underline{v} \wedge \underline{w} = -\underline{w} \wedge \underline{v}$
- $(\lambda \underline{v}) \wedge \underline{w} = \lambda(\underline{v} \wedge \underline{w}) = \underline{v} \wedge (\lambda \underline{w})$
- $(\underline{v} + \underline{v}') \wedge \underline{w} = \underline{v} \wedge \underline{w} + \underline{v}' \wedge \underline{w}$
- $\underline{v} \wedge (\underline{w} + \underline{w}') = \underline{v} \wedge \underline{w} + \underline{v} \wedge \underline{w}$

Dimostrazione. Il primo punto si ottiene ragionando sulle orientazioni. Il secondo è anche diretta conseguenza della definizione. La dimostrazione della additività nei due argomenti è omessa.

La prima proprietà è detta di **antisimmetria** o di **anticommutazione**; le altre ci danno la **bilinearità del prodotto vettoriale.**

---

[1] Quanto detto si applica ad un qualsiasi spazio vettoriale V.

[2] notare che la matrice del cambiamento di base è quindi la matrice diagonale con -1, 1, 1 sulla diagonale principale e tale matrice ha determinante uguale a -1

Proposizione 6. Il prodotto vettoriale può essere calcolato in coordinate associate ad una base ortonormale tramite la seguente formula: se $\underline{v} = v_1\underline{i} + v_2\underline{j} + v_3\underline{k}$ e $\underline{w} = w_1\underline{i} + w_2\underline{j} + w_3\underline{k}$ allora

$$\underline{v} \wedge \underline{w} = \det \begin{vmatrix} v_2 & w_2 \\ v_3 & w_3 \end{vmatrix} \underline{i} - \det \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_3 & w_3 \end{vmatrix} \underline{j} + \det \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_3 & w_3 \end{vmatrix} \underline{k} \tag{1}$$

che possiamo riscrivere come

$$\underline{v} \wedge \underline{w} = \det \begin{vmatrix} \underline{i} & v_1 & w_1 \\ \underline{j} & v_2 & w_2 \\ \underline{k} & v_3 & w_3 \end{vmatrix} \tag{2}$$

(a destra sviluppiamo formalmente con Laplace secondo la prima colonna).
Dimostrazione. La formula segue dall'antisimmetria e dalla bilinearità: si scrive $(v_1\underline{i} + v_2\underline{j} + v_3\underline{k}) \wedge (w_1\underline{i} + w_2\underline{j} + w_3\underline{k})$, si sviluppa utilizzando la bilinearità e si utilizzano le seguenti relazioni, conseguenza diretta della definizione:

$$\underline{i} \wedge \underline{j} = \underline{k}\,, \quad \underline{j} \wedge \underline{k} = \underline{i}\,, \quad \underline{k} \wedge \underline{i} = \underline{j}\,.$$

Notiamo anche che se π è il piano $\mathrm{Span}(\underline{v}, \underline{w})$ allora la formula (1) ci dà un generatore della retta ortogonale a π.

È bene notare che il prodotto vettoriale *non* è associativo: ad esempio $\underline{i} \wedge (\underline{j} \wedge \underline{j})$ è uguale a $\underline{i} \wedge \underline{0}$ che è uguale a $\underline{0}$, mentre $(\underline{i} \wedge \underline{j}) \wedge \underline{j} = \underline{k} \wedge \underline{j} = -\underline{i}$.

Algebre di Lie.

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n.
Definizione. V è un'**algebra** se esiste una *moltiplicazione fra vettori*, la denotiamo con $\star$, che è distributiva:

$$(\lambda\underline{v} + \mu\underline{w}) \star \underline{z} = \lambda(\underline{v} \star \underline{z}) + \mu(\underline{w} \star \underline{z})$$
$$\underline{z} \star (\lambda\underline{v} + \mu\underline{w}) = \lambda(\underline{z} \star \underline{v}) + \mu(\underline{z} \star \underline{w}).$$

Denotiamo con $(V, \star)$ una tale algebra.
Un esempio di algebra è dato da $V = \mathrm{End}(W)$, con W un qualsiasi spazio vettoriale. In questo caso la moltiplicazione $\star$ è per definizione uguale alla composizione di applicazioni: $T \star S := T \circ S$.
Un altro esempio è fornito da $V = \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ con prodotto uguale per definizione al prodotto righe per colonne.
Un terzo esempio è fornito da $V = \mathcal{V}_O$ con prodotto uguale al prodotto vettoriale
Nei primi due esempi il prodotto fra vettori è associativo; in generale però l'associatività non fa parte della definizione di algebra. Ad esempio $\mathcal{V}_O$ con il prodotto dato dal prodotto vettoriale è un' algebra ma *non* è associativa.
Definizione. Un'algebra $(V, \star)$ è un'**algebra di Lie** [3] se valgono le seguenti due proprietà addizionali :

$$\underline{v} \star \underline{w} = -\underline{w} \star \underline{v}$$
$$(\underline{v} \star \underline{w}) \star \underline{z} + (\underline{w} \star \underline{z}) \star \underline{v} + (\underline{z} \star \underline{v}) \star \underline{w} = 0.$$

La seconda proprietà è detta "identità di Jacobi". Le algebre di Lie giocano un ruolo fondamentale in Matematica e in Fisica.

[3] leggi *li*, con la *i* lunga

Esempio. Lo spazio vettoriale $\mathcal{V}_O$ con il prodotto fra vettori definito dal prodotto vettoriale $\wedge$ è un'algebra di Lie di dimensione 3.
La proprietà distributiva e di anticommutazione sono note; l'identità di Jacobi segue dalla seguente identità, che non è difficile da dimostrare:

$$(\underline{v}_1 \wedge \underline{v}_2) \wedge \underline{v}_3 = (< \underline{v}_1, \underline{v}_3 >)\underline{v}_2 - (< \underline{v}_2, \underline{v}_3 >)\underline{v}_1$$