Corso di Laurea in Matematica. Geometria 1. a.a. 2017-18.
Prof. P. Piazza

Il prodotto vettoriale

Prodotto vettoriale. Consideriamo lo spazio vettoriale tridimensionale dei vettori geometrici centrati in un punto dello spazio O, $\mathcal{V}_O$. Fissiamo un'orientazione in $\mathcal{V}_O$, ad esempio tramite la scelta di una base ortonormale $\{\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}\}$: rimane allora definito un prodotto fra vettori

$$\mathcal{V}_O \times \mathcal{V}_O \ni (\underline{v}, \underline{w}) \longrightarrow \underline{v} \wedge \underline{w} \in \mathcal{V}_O$$

che viene chiamato *prodotto vettoriale* (e viene anche denotato con $\times$). Per definizione $\underline{v} \wedge \underline{w}$ è il vettore di $\mathcal{V}_O$ univocamente caaratterizzato dalle tre seguenti proprietà:

(i) la lunghezza del segmento che definisce $\underline{v} \wedge \underline{w}$ è uguale a $||\underline{v}||||\underline{w}|| \sin \widehat{\underline{v}\underline{w}}$ che è anche l'area del parallelogramma definito da $\underline{v}, \underline{w}$. Notiamo che $\underline{v} \wedge \underline{w} = \underline{0}$ se i due vettori sono paralleli.

(ii) se i due vettori *non* sono paralleli, allora la direzione del segmento che definisce $\underline{v} \wedge \underline{w}$ è quella ortogonale al piano $\mathrm{Span}(\underline{v}, \underline{w})$.

(iii) se i due vettori *non* sono paralleli, allora il verso del segmento che definisce $\underline{v} \wedge \underline{w}$ è quello per cui la base $\{\underline{v}, \underline{w}, \underline{v} \wedge \underline{w}\}$ è equiorientata alla base che definisce l'orientazione di $\mathcal{V}_O$.

Osservazione. La stessa definizione può essere data in qualsiasi spazio vettoriale euclideo orientato di dimensione 3, $(V, <\,,\,>)$.

In Fisica si usa fissare un'orientazione di $\mathcal{V}_O$ tramite la mano sinistra o la mano destra facendo corrispondere $\underline{i}$ al dito medio, $\underline{j}$ all'indice, $\underline{k}$ al pollice. Le due mani definiscono effettivamente le due orientazioni di $\mathcal{V}_O$ (esercizio). Se fissiamo ad esempio l'orientazione della mano sinistra allora il verso del prodotto vettoriale è quello del pollice se facciamo coincidere $\underline{v}$ al dito medio (ovviamente della mano sinistra) e $\underline{w}$ al dito indice.

Proposizione 5. Il prodotto vettoriale gode delle seguenti propietà:

- $\underline{v} \wedge \underline{w} = -\underline{w} \wedge \underline{v}$
- $(\lambda \underline{v}) \wedge \underline{w} = \lambda(\underline{v} \wedge \underline{w}) = \underline{v} \wedge (\lambda \underline{w})$
- $(\underline{v} + \underline{v}') \wedge \underline{w} = \underline{v} \wedge \underline{w} + \underline{v}' \wedge \underline{w}$
- $\underline{v} \wedge (\underline{w} + \underline{w}') = \underline{v} \wedge \underline{w} + \underline{v} \wedge \underline{w}$
- se $\underline{v} = v_1\underline{i} + v_2\underline{j} + v_3\underline{k}$ e $\underline{w} = w_1\underline{i} + w_2\underline{j} + w_3\underline{k}$ allora

$$\underline{v} \wedge \underline{w} = \det \begin{vmatrix} \underline{i} & v_1 & w_1 \\ \underline{j} & v_2 & w_2 \\ \underline{k} & v_3 & w_3 \end{vmatrix}$$

(a destra sviluppiamo formalmente con Laplace secondo la prima colonna).

Dimostrazione. Il primo punto (antisimmetria) si ottiene ragionando sulle orientazioni. La dimostrazione della seconda proprietà è immediata. La dimostrazione della terza proprietà sarà un esercizio. La formula per il prodotto vettoriale segue dall'antisimmetria e dalla bilinearità: si scrive $(v_1\underline{i} + v_2\underline{j} + v_3\underline{k}) \wedge (w_1\underline{i} + w_2\underline{j} + w_3\underline{k})$, si sviluppa utilizzando la bilinearità e si utilizzano le seguenti relazioni, conseguenza diretta della definizione:

$$\underline{i} \wedge \underline{j} = \underline{k}\,, \quad \underline{j} \wedge \underline{k} = \underline{i}\,, \quad \underline{k} \wedge \underline{i} = \underline{j}\,.$$

Osservazione. Le coordinate di $\underline{v} \wedge \underline{w}$ danno immediatamente le coordinate di un vettore ortogonale al piano vettoriale generato da $\underline{v}$ e $\underline{w}$.

È bene notare che il prodotto vettoriale *non* è associativo: ad esempio $\underline{i} \wedge (\underline{j} \wedge \underline{j})$ è uguale a $\underline{i} \wedge \underline{0}$ che è uguale a $\underline{0}$, mentre $(\underline{i} \wedge \underline{j}) \wedge \underline{j} = \underline{k} \wedge \underline{j} = -\underline{i}$.