Matematica secondo corso (Statistica)

Proff. E. Casadio Tarabusi, P. Piazza

Prima prova di esonero.
Compito A

1 aprile 2016

Nome e Cognome: ____________________

Numero di Matricola: ____________________

Esercizio	Punti totali	Punteggio
1	6.5	
2	6.5	
3	6.5	
4	6.5	
5	6.5	
Totale	32.5	

Occorre motivare le risposte. Una soluzione corretta priva di motivazione riceverà 0 *punti. Il tempo a disposizione è due ore. Non si possono usare testi, appunti, calcolatrici. I telefoni cellulari devone essere tenuti spenti durante tutta la prova. Si deve consegnare esclusivamente questo blocco di fogli.*

Voto/30: ______

Esercizio 1. Di ciascuna delle seguenti successioni dire (motivando la risposta) se è convergente, divergente, indeterminata, e se è convergente determinarne il limite:

$$a_n = (-1)^n \cos\left(\frac{1}{n^3}\right), \qquad b_n = \frac{1}{\log(n^4)\sin(-\frac{1}{n})}, \qquad c_n = (-1)^n \sin\left(\frac{(-1)^n}{n^2}\right).$$

Risoluzione:
La successione a_n è indeterminata; infatti $\cos\left(\frac{1}{n^3}\right)$ converge ad 1 ma $(-1)^n$ oscilla fra 1 ed -1 a seconda che n sia pari o dispari. Quindi i termini della successione si accumulano verso 1 e -1 e non esiste il limite.
Riscriviamo la successione b_n come segue

$$b_n = -\frac{1}{\frac{1}{n}\log(n^4)\frac{\sin(-\frac{1}{n})}{(-\frac{1}{n})}}$$

Sappiamo che $\log(n^4)/n$ è positivo per $n > 1$ e tende a zero per $n \to +\infty$; sappiamo anche che

$$\frac{\sin(-\frac{1}{n})}{(-\frac{1}{n})} \to 1 \quad \text{quando} \quad n \to +\infty$$

quindi b_n diverge verso $-\infty$.
La successione c_n è convergente a $\ell = 0$: infatti è il prodotto di una successione limitata, $(-1)^n$, e di una successione infinitesima, $\sin\left(\frac{(-1)^n}{n^2}\right)$, ed è quindi infinitesima.

Esercizio 2. Determinare i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 3} \frac{(x^2-9)\sin(\pi/x)}{(2x+3)\sin(x-3)} \qquad\qquad \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^4+3}{x^4+5}\right)^{x^4}.$$

Risoluzione:
riscriviamo il primo limite come

$$\frac{(x+3)\sin(\pi/x)}{(2x+3)\frac{\sin(x-3)}{(x-3)}}$$

Il numeratore converge a $6\sin(\pi/3)$; il denominatore converge a 9 e quindi il limite proposto esiste ed è uguale a $(2\sin(\pi/3))/3$.
Per il secondo limite procediamo come fatto molte volte:

$$\left(\frac{x^4+3}{x^4+5}\right)^{x^4} = \left(\frac{(x^4+5)+(-2)}{(x^4+5)}\right)^{x^4} = \left(1+\frac{(-2)}{(x^4+5)}\right)^{(x^4+5)}\left(1+\frac{(-2)}{(x^4+5)}\right)^{(-5)}$$

Il primo fattore converge a e^{-2} mentre il secondo fattore converge ad 1. Quindi

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^4+3}{x^4+5}\right)^{x^4} = e^{-2}.$$

Esercizio 3. $\forall x \in \mathbb{R}$ studiare la continuità in x della funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3x^2} & x \geq 1, \\ cx+1 & x < 1, \end{cases}$$

al variare del parametro reale $c \in \mathbb{R}$. Giustificate tutti i passaggi.

Risoluzione:
Per ogni $x > 1$ la funzione $f(x)$ è continua in x $\forall c \in \mathbb{R}$; infatti il valore della funzione per questi x è indipendente da c ed uguale a $1/(3x^2)$; la funzione $1/(3x^2)$ è continua per $x > 1$ perché quoziente di 2 funzioni continue (la funzione costante $= 1$ e la funzione $3x^2$).
Per ogni $x < 1$ la funzione $f(x)$ è continua in x $\forall c \in \mathbb{R}$; infatti $\forall c \in \mathbb{R}$ la funzione $cx + 1$ è continua per $x < 1$ (è un polinomio di primo grado). Rimane da studiare la continuità della funzione in $x = 1$. Per definizione $f(1) = 1/3$ e quindi f è continua in $x = 1$ se e solo se

$$\lim_{x\to 1^-} cx + 1 = 1/3$$

Ma il limite a sinistra è calcolabile ed è uguale a $c+1$; ne segue che $c = -1+1/3 = -2/3$ è l'unico valore di c per il quale f è continua in $x = 1$.

Esercizio 4. Si considerino le funzioni:

$$f(x) = \log(x^4), \qquad g(x) = \cos(x^4)$$

(1) Calcolare $(f \circ g)(x)$, $(g \circ f)(x)$

(2) Calcolare $f'(x)$, $g'(x)$

(3) Calcolare $(f \circ g)'(x)$, $(g \circ f)'(x)$

Risoluzione:
Si ha

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \log((\cos(x^4))^4)\,, \quad (g \circ f)(x) = g(f(x)) = \cos((\log(x^4))^4)$$

$$f'(x) = \frac{1}{x^4}(x^4)' = \frac{1}{x^4}4x^3 = \frac{4}{x}\,, \qquad g'(x) = -\sin(x^4)4x^3$$

$$(f \circ g)'(x) = \frac{1}{(\cos(x^4))^4}((\cos(x^4))^4)'$$

Ma

$$((\cos(x^4))^4)' = 4(\cos(x^4))^3(\cos(x^4))'$$

e quindi

$$((\cos(x^4))^4)' = 4(\cos(x^4))^3(-\sin(x^4))4x^3$$

Quindi, in conclusione,

$$(f \circ g)'(x) = -16\frac{1}{\cos(x^4)}\sin(x^4)x^3 = -16\tan(x^4)x^3$$

Procedendo in maniera analoga si ha:

$$(g \circ f)'(x) = -\sin((\log(x^4)^4))\,4(\log(x^4))^3\,\frac{1}{x^4}4x^3 = -16\sin((\log(x^4)^4))\,(\log(x^4))^3\,\frac{1}{x}$$

Esercizio 5. 1. Sia f una funzione reale di variabile reale e sia $\ell \in \mathbb{R}$. Dare la seguente definizione

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \ell \tag{1}$$

Dare un esempio di funzione che verifica (1) con $\ell = 1/2$.

2. Sia a_n una successione tale che $\lim_{n\to+\infty} a_n = 1$. Si considerino le seguenti asserzioni

$$(i) \quad a_n > 0 \quad \forall n$$

$$(ii) \quad \exists \nu > 0 \ | \ a_n > 0 \quad \forall n > \nu$$

Per ciascuna asserzione, dimostrarla se vera o esibire un controesempio se falsa.

3. Consideriamo le funzioni $f(x) = mx + q$ con dominio uguale a tutta le retta reale. Stabilire per quali m e q queste funzioni sono invertibili e in caso affermativo calcolare la funzione inversa.

Risoluzione:
Alla prima domanda si risponde con una semplice modifica della definizione (41.14) nel libro di testo.
Un esempio di funzione che converge a 1/2 per $x \to -\infty$ è: $(x^2+1)/(2x^2+1)$.
Per quel che concerne la seconda domanda: (i) è falsa, ad esempio

$$a_n = \frac{\sin(\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} - \frac{100}{n}\,,, \quad n \geq 1$$

converge ad 1 ma non soddisfa (i).
(ii) è invece vera per definizione stessa di limite; in alternativa $1 > 0$ e possiamo applicare il teorema della permanenza del segno.
Infine, una risposta alla terza domanda si trova nel libro di testo, a pagina 29.