Corso di Laurea Magistrale a.a. 2017-18
Geometria Superiore
Esame scritto del 2/7/18.
Scegliere precisamente 3 esercizi fra quelli proposti e risolverli.

Esercizio 1. Sia E un fibrato vettoriale hermitiano su una varietà riemanniana (M, g). Denotiamo con $(\cdot|\cdot)_E$ il prodotto scalare L^2:

$$(s|s')_E = \int_M < s, s' >_E d\mathrm{vol}_g\,, \quad s, s' \in C^\infty(M, E)$$

Sia F un secondo fibrato vettoriale hermitiano, con metrica hermitiana $< \cdot, \cdot > F$. Sia $P : C^\infty(M, E) \to C^\infty(M, F)$ un operatore differenziale di ordine k. Verificare che esiste unico l'operatore differenziale di ordine k, $P^* : C^\infty(M, F) \to C^\infty(M, E)$, tale che

$$(Ps|s')_F = (s|P^*s')_E \ \ \forall s \in C^\infty(M, E), \forall s' \in C^\infty(M, F)\,.$$

Esercizio 2. Sia R un operatore regolarizzante, con nucleo

$$K_R \in C^\infty(M \times M, \mathrm{HOM}(E, E))\,.$$

Verificare che R definisce un operatore limitato $R : L^2(M, E) \to H_k(M, E)$ per ogni $k \in \mathbb{N}$.

Esercizio 3. Sia $T = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$. Consideriamo lo spazio vettoriale delle forme armoniche di grado j, $\mathbb{H}^j(T)$, e sia $\mathbb{H}^*(T) = \oplus_{j=0}^n \mathbb{H}^j(T)$. Dimostrare che $\mathbb{H}^j(T)$ è isomorfo a $\Lambda^j\mathbb{R}^n$ e che quindi $\mathbb{H}^*(T) \simeq \Lambda^*\mathbb{R}^n$.

Esercizio 4. Siano (E, π_E, X) e (F, π_F, X) due fibrati vettoriali C^0. Sia $\phi : E \to F$ un morfismo di fibrati e supponiamo che $\phi|_{E_x}$ sia un isomorfismo di spazi vettoriali per ogni $x \in X$. Verificare che ϕ è allora un isomorfismo di fibrati (e cioè ϕ è anche un omeomorfismo).
Dimostare che se i due fibrati sono C^∞ e ϕ è C^∞ allora dall'ipotesi che $\phi|_{E_x}$ sia un isomorfismo di spazi vettoriali per ogni $x \in X$ discende che ϕ è un diffeomorfismo e quindi un isomorfismo di fibrati C^∞.

Esercizio 5. Sia (E, π_E, X) un fibrato vettoriale e sia $\{U_\alpha\}$ un ricoprimento di aperti banalizzanti per E. Rimane allora definito il cociclo $\{g_{\alpha\beta}\}$ delle funzioni di transizione

$$g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to GL(k, \mathbb{R})$$

Sia ora (F, π_F, X) un secondo fibrato e supponiamo che gli aperti $\{U_\alpha\}$ siano banalizzanti anche per (F, π_F, X). Sia $\{f_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to GL(k, \mathbb{R})\}$ il cociclo associato a questo secondo fibrato. In generale diremo che due cocicli $\{k_{\alpha\beta}\}$ e $\{h_{\alpha\beta}\}$ sono equivalenti se $\forall\alpha$ esiste $\lambda_\alpha : U_\alpha \to GL(k, \mathbb{R})$ continuo tale che

$$k_{\alpha\beta} = \lambda_\alpha h_{\alpha\beta} \lambda_\beta^{-1} .$$

Verificare che (E, π_E, X) è isomorfo a (F, π_F, X) se e solo se i rispettivi cocicli sono equivalenti.

Esercizio 6. Sia (M, g) una varietà riemanniana. Sia ∇ la connessione di Levi-Civita. Sia $\Lambda^* M := \Lambda^*(T^* M)$ con la sua naturale struttura di fibrato di moduli di Clifford (quindi $c(\underline{e}) := \epsilon(\underline{e}) - i(\underline{e})$).
Spiegare come ∇ induce una connessione $\nabla^{\Lambda^* M}$ sul fibrato $\Lambda^* M$. Dimostrare che questa connessione è di Clifford.

Esercizio 7. Consideriamo $\mathbb{C}P^1$. Definire una metrica hermitiana h su $\mathbb{C}P^1$ in modo tale che h sia data da $1/((1+|z|^2))^2$ nella carta $U = \{[z_0, z_1] \mid z_0 \neq 0\}$ con coordinata $z = z_1/z_0$. Scrivere la curvatura associata alla connessione complessa hermitiana e dimostrare che vale

$$\int_{\mathbb{C}P^1} c_1(T^{1,0}\mathbb{C}P^1) = 2 \tag{1}$$

(in classe abbiamo dimostrato questa uguaglianza utilizzando il teorema di Gauss-Bonnet.)

Esercizio 8. Sia L il fibrato tautologico su $\mathbb{C}P^1$. Dimostrare che sussiste il seguente isomorfismo: $T^{1,0}\mathbb{C}P^1 = L^* \otimes L^*$. (Suggerimento: considerare le funzioni di transizione.) Utilizzare questo isomorfismo per dimostrare ancora una volta che $\int_{\mathbb{C}P^1} c_1(T^{1,0}\mathbb{C}P^1) = 2$

Esercizio 9. Sia M una varietà differenziabile. Consideriamo $[0, 1] \times M$ e le inclusioni naturali $i_0 : M \to [0, 1] \times M$, $i_0(p) = (0, p)$ e $i_1 : M \to [0, 1] \times M$, $i_1(p) = (1, p)$. Sia F un fibrato su $[0, 1] \times M$. Possiamo sempre dotare F di una connessione.
1. Utilizzando il trasporto parallelo verificare che esiste un isomorfismo di fibrati $i_0^* F \simeq i_1^* F$.
2. Dedurre che se (E, π, M) è un fibrato e $f : N \to M$ e $g : N \to M$ sono due applicazioni C^∞ che sono $\mathcal{C}^\infty$-omotope allora $f^* E \simeq g^* E$.