Geometria. Corso di Laurea in Fisica.
Anno Accedemico 09-10. Prof. P. Piazza.
Alcuni preliminari.

In Matematica è molto frequente l'uso dei seguenti simboli:

$\Rightarrow$: Implica $\quad$ $\Leftrightarrow$: Equivalente

$\forall$: Per ogni $\quad$ $\exists$: Esiste $\quad$ $\exists!$: EsisteUnico $\quad$ $\in$: appartiene

L'abbreviazione $|$ è utizzata a volte al posto di *tale che*

IMPLICAZIONI. Cominciamo con le implicazioni ($\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$) e le loro interpretazioni come condizioni necessarie e/o sufficienti.

Abbiamo già detto che $A \Rightarrow B$ vuol dire che "A implica B" oppure "da A segue B" o anche "accade che se A è vera allora è vera anche B.
La negazione di $A \Rightarrow B$ è "A non implica B" e cioè, "accade che A sia vera ma che B sia falsa".

La proposizione $A \Rightarrow B$ si può anche tradurre indifferentemente con una delle seguenti due proposizioni

1) Condizione necessaria affinché A sia vero è che sia verificato B.

2) Condizione sufficiente affinché B sia vero è che sia verificato A.

Osserviamo che una condizione sufficiente "implica" mentre una condizione necessaria "è implicata".

Esercizio 1 "Condizione sufficiente affinché la strada sia bagnata [1] è che stia piovendo"
Come si scrive questa proposizione con il simbolo $\Rightarrow$?

Esercizio 2 "Condizione necessaria affinché stia piovendo è che la strada sia bagnata"
Che differenza c'è fra questa proposizione e quella dell'esercizio 1 ?

Esercizio 3 "Condizione necessaria affinché la strada sia bagnata è che stia piovendo"
Come si scrive questa proposizione con il simbolo $\Rightarrow$? È vera ?

Soluzioni

1. "Sta piovendo" $\Rightarrow$ "la strada è bagnata".

2. Non c'è alcuna differenza. Anche questa proposizione si traduce in : "Sta piovendo" $\Rightarrow$ "la strada è bagnata".

3. La proposizione si può scrivere "la strada è bagnata" $\Rightarrow$ "sta piovendo". È chiaramente falsa (perché la strada davanti al portone di casa potrebbe essere bagnata per altri motivi).

In generale la veridicità di $A \Rightarrow B$ non fornisce alcuna informazione circa la veridicità della proposizione $B \Rightarrow A$.

Domanda 1 Se la strada è asciutta che cosa se ne può dedurre?

Risposta 1 "se la strada è asciutta" ne segue che "non sta piovendo".

Questo è un esempio della regola di contrapposizione:

$$A \Rightarrow B \quad \text{è equivalente a} \quad (\text{negazione di } B) \Rightarrow (\text{negazione di } A).$$

Giustifichiamo la regola di contrapposzione. Supponiamo vera $A \Rightarrow B$ e facciamo vedere che (negazione di B) $\Rightarrow$ (negazione di A). Partiamo da (negazione di B),

[1] La strada è per definizione la strada davanti al portone di casa

accettiamo quindi che la negazione di B sia vera. Ricordiamo ora la regola del terzo escluso: una proposizione o è vera oppure è falsa (*tertium non datur*). Quindi, o A è vera, oppure è falsa. Ci domandiamo: può essere vera A ? La risposta è no, perché da A seguirebbe B, in contrasto col fatto che abbiamo accettato, per ipotesi, che sia vera la negazione di B. La conclusione è che se supponiamo vera $A \Rightarrow B$ allora è anche vera (negazione di B) $\Rightarrow$ (negazione di A). L'implicazione inversa, e cioè

$$(\text{negazione di } B) \Rightarrow (\text{negazione di } A) \quad \text{implica} \quad A \Rightarrow B$$

si dimostra allo stesso modo, utilizzando in aggiunta che

$$(\text{negazione di}(\text{negazione di } A)) \quad \text{è} \quad A$$

(due negazioni danno un'affermazione).
Domanda 2 Sia $n \in \mathbb{N}$. Consideriamo la seguente proposizione :
"Condizione necessaria e sufficiente affinché n^2 sia pari è che n sia pari."
1) Quali sono le due implicazioni che dimostrano questa proposizione ?
2) Come si traduce questa proposizione con il simbolo $\Leftrightarrow$?
3) Qual è la condizione necessaria e quella sufficiente ?

Risposta 2
1) Le implicazioni sono : "n^2 *pari* $\Rightarrow$ *n pari*" e " *n pari* $\Rightarrow n^2$ *pari*".
2) n^2*pari* $\Leftrightarrow$ *n pari*.
Osservazione. La proposizione "A $\Leftrightarrow$ B" si può anche esprimere dicendo che "A è equivalente a B" oppure "A è vera se e soltanto se B è vera".
3) "n è pari" è sia condizione necessaria che condizione sufficiente. Se si volesse dimostrare la veridicità della condizione necessaria si dovrebbe dimostrare che n^2 *pari* $\Rightarrow$ *n pari*. Se si volesse invece dimostrare la veridicità della condizione sufficiente allora si dovrebbe far vedere che *n pari* $\Rightarrow n^2$ *pari*.
Domanda 3 Si consideri ora la proposizione :
"Condizione necessaria e sufficiente affinché Paola sia a Roma è che Paola sia in Italia."
1) Questa proposizione è vera o falsa ?
2) Se è falsa, quale fra le due condizioni (necessaria e sufficiente) è vera ?

Risposta 3
1) La proposizione è ovviamente falsa perché se Paola è in Italia non è detto che sia a Roma. 2) "Paola è a Roma"$\Rightarrow$ "Paola è in Italia" (e cioè la condizione necessaria) è vera. Mentre è falso che "Paola è in Italia"$\Rightarrow$ "Paola è a Roma" (la condizione sufficiente).
Esercizio 4. Dimostrare che n^2 *pari* $\Leftrightarrow$ *n pari*, $n \in \mathbb{N}$.
Soluzione esercizio 4. *n pari* $\Rightarrow n = 2k$ per qualche $k \in \mathbb{N}$. Ma allora $n^2 = 2(2k^2)$ e quindi n^2 è pari. Viceversa, sia n^2 *pari*. Dimostrare l'implicazione n^2 *pari* $\Rightarrow$ *n pari* è equivalente a dimostrare la contrapposta e cioè che *n dispari* $\Rightarrow n^2$ *dispari*. Ma *n dispari* $\Rightarrow n = 2h + 1$ per qualche $h \in \mathbb{N}$. Ne segue che $n^2 = 2(2h^2 + 2h) + 1$ e quindi che n^2 è dispari. **Q**uod **E**rat **D**emonstrandum.)

QUANTIFICATORI Passiamo ad illustrare l'uso dei simboli $\forall$ e $\exists$.
Domanda 4
1) Come si traduce con i simboli elencati la seguente proposizione?:
"$\mathcal{P}1$: Si puó trovare un numero razionale diverso da zero il cui prodotto con un qualsiasi altro numero razionale diverso da zero è uguale a 1".
2) La proposizione $\mathcal{P}1$ é vera o falsa?

Risposta 4.
1) $\mathcal{P}1$: $\exists x \in \mathbb{Q} \;\; x \neq 0 \;\mid\; \forall y \in \mathbb{Q} \;\; y \neq 0, \;\; xy = 1$
2) La proposizione è falsa. Per dimostrarlo bisogna far vedere che non esiste $x \in \mathbb{Q} \;\; x \neq 0$ con la proprietà enunciata. In altre parole, scelto comunque un numero razionale $x \neq 0$ basterà far vedere che esiste un y' tale che $xy' \neq 1$. Dato che $x \neq 0$ si può scegliere per esempio $y' = \frac{1}{2x}$ in modo tale che $xy' = \frac{1}{2} \neq 1$.
Osservazione. Abbiamo dimostrato: $\forall x \in \mathbb{Q} \;\; x \neq 0 \;\; \exists y' \in \mathbb{Q} \;\; y \neq 0, \;\mid\; xy' \neq 1$ *cioè la negazione di* $\mathcal{P}1$.
È importante capire questo punto:
$\underline{Negare}$ *:* $\forall x$ *è valida la proposizione* $\mathcal{P}$ *è equivalente a* $\underline{affermare}$ *:* $\exists x$ *per cui non è valida la proposizione* $\mathcal{P}$.
$\underline{Negare}$ *:* $\exists x$ *per cui è valida la proposizione* $\mathcal{P}$ *è equivalente a* $\underline{affermare}$ *:* $\forall x$ *non è valida la proposizione* $\mathcal{P}$.
Esercizio 5 Consideriamo la proposizione: $\mathcal{P}2 : \forall x \in \mathbb{Q}, \; x \neq 0 \; \exists y \in \mathbb{Q} \;\mid\; xy = 1$. Questa proposizione è vera o falsa? Scrivetela per esteso e confrontatela con la proposizione $\mathcal{P}1$.
Soluzione Es. 5 La proposizione è vera; i numeri razionali $\mathbb{Q}$ sono costruiti precisamente per soddisfare questa proprietà, esistenza dell'elemento inverso per i numeri razionali non nulli.

Esercizio 6.

1) Negare : $\forall x \; \exists y \;\mid$ è valida la proposizione $\mathcal{P}$
2) Negare : $\exists x \;\mid\; \forall y$ è valida la proposizione $\mathcal{P}$
3) Negare : $\forall x \; \exists y \;\mid \forall z$ è valida la proposizione $\mathcal{P}$

Soluzione esercizio 6.

1) $\exists x \;\mid\; \forall y$ non è valida $\mathcal{P}$.
2) $\forall x \; \exists y \;\mid$ non è valida $\mathcal{P}$.
3) $\exists x \;\mid\; \forall y \; \exists z \;\mid$ non è valida $\mathcal{P}$.