

**Matematica II corso.**  
**Anno Accademico 2015-16. Prof. P. Piazza.**  
**Alcuni preliminari.**

In Matematica è molto frequente l'uso dei seguenti simboli:

$\Rightarrow$  : Implica       $\Leftrightarrow$  : Equivalente

$\forall$ : Per ogni       $\exists$ : Esiste       $\exists!$ : Esiste Unico       $\in$  : appartiene

Il simbolo | è utilizzato a volte al posto di *tale che*

**IMPLICAZIONI.** Cominciamo con le implicazioni ( $\Rightarrow$ ,  $\Leftrightarrow$ ) e le loro interpretazioni come condizioni necessarie e/o sufficienti.

Abbiamo già detto che  $A \Rightarrow B$  vuol dire che "A implica B" oppure "da A segue B" o anche "accade che se A è vera allora è vera anche B".

La negazione di  $A \Rightarrow B$  è "A non implica B" e cioè, "accade che A sia vera ma che B sia falsa".

La proposizione  $A \Rightarrow B$  si può anche tradurre indifferentemente con una delle seguenti proposizioni

- 1) *Condizione necessaria affinché A sia vero è che sia verificato B.*
- 2) *Condizione sufficiente affinché B sia vero è che sia verificato A.*
- 3) *Se A è vero allora B è vero.*
- 4) *A è vero solo se B è vero.*

Osserviamo che una condizione sufficiente "implica" mentre una condizione necessaria "è implicata".

**Esercizio 1** "Condizione sufficiente affinché la strada sia bagnata <sup>1</sup> è che stia piovendo"

Come si scrive questa proposizione con il simbolo  $\Rightarrow$ ?

**Esercizio 2** "Condizione necessaria affinché stia piovendo è che la strada sia bagnata"

Che differenza c'è fra questa proposizione e quella dell'esercizio 1 ?

**Esercizio 3** "Condizione necessaria affinché la strada sia bagnata è che stia piovendo"

Come si scrive questa proposizione con il simbolo  $\Rightarrow$ ? È vera ?

**Soluzioni**

1. "Sta piovendo"  $\Rightarrow$  "la strada è bagnata".
2. Non c'è alcuna differenza. Anche questa proposizione si traduce in : "Sta piovendo"  $\Rightarrow$  "la strada è bagnata".
3. La proposizione si può scrivere "la strada è bagnata"  $\Rightarrow$  "sta piovendo". È chiaramente falsa (perché la strada davanti al portone di casa potrebbe essere bagnata per altri motivi).

*In generale la veridicità di  $A \Rightarrow B$  non fornisce alcuna informazione circa la veridicità della proposizione  $B \Rightarrow A$ .*

**Domanda 1** Se la strada è asciutta che cosa se ne può dedurre?

**Risposta 1** "se la strada è asciutta" ne segue che "non sta piovendo".

Questo è un esempio della regola di contrapposizione:

$A \Rightarrow B$  è equivalente a (negazione di B)  $\Rightarrow$  (negazione di A).

---

<sup>1</sup>La strada è per definizione la strada davanti al portone di casa

Giustificiamo la regola di contrapposizione. Supponiamo vera  $A \Rightarrow B$  e facciamo vedere che (negazione di  $B$ )  $\Rightarrow$  (negazione di  $A$ ). Partiamo da (negazione di  $B$ ), accettiamo quindi che la negazione di  $B$  sia vera. Ricordiamo ora la regola del terzo escluso: una proposizione o è vera oppure è falsa (*tertium non datur*). Quindi, o  $A$  è vera, oppure è falsa. Ci domandiamo: può essere vera  $A$ ? La risposta è no, perché da  $A$  seguirebbe  $B$ , in contrasto col fatto che abbiamo accettato, per ipotesi, che sia vera la negazione di  $B$ . La conclusione è che se supponiamo vera  $A \Rightarrow B$  allora è anche vera (negazione di  $B$ )  $\Rightarrow$  (negazione di  $A$ ). L'implicazione inversa, e cioè

$$\text{(negazione di } B) \Rightarrow \text{(negazione di } A) \text{ implica } A \Rightarrow B$$

si dimostra allo stesso modo, utilizzando in aggiunta che

$$\text{(negazione di (negazione di } A)) \text{ è } A$$

(due negazioni danno un'affermazione).

**Domanda 2** Sia  $n \in \mathbb{N}$ . Consideriamo la seguente proposizione :

“Condizione necessaria e sufficiente affinché  $n^2$  sia pari è che  $n$  sia pari.”

- 1) Quali sono le due implicazioni che esprimono questa proposizione ?
- 2) Come si traduce questa proposizione con il simbolo  $\Leftrightarrow$  ?
- 3) Qual è la condizione necessaria e quella sufficiente ?

**Risposta 2**

1) Le implicazioni sono : “ $n^2$  pari  $\Rightarrow$   $n$  pari” e “  $n$  pari  $\Rightarrow$   $n^2$  pari”.

2)  $n^2 \text{ pari} \Leftrightarrow n \text{ pari}$ .

*Osservazione.* Vi ricordo che “ $A \Leftrightarrow B$ ” si esprime dicendo che “( $A$  vera) è equivalente a ( $B$  vera)” o, più semplicemente, “ $A$  è equivalente a  $B$ ”

3) “ $n$  è pari” è sia condizione necessaria che condizione sufficiente. Se si volesse dimostrare la veridicità della condizione necessaria si dovrebbe dimostrare che  $n^2 \text{ pari} \Rightarrow n \text{ pari}$ . Se si volesse invece dimostrare la veridicità della condizione sufficiente allora si dovrebbe far vedere che  $n \text{ pari} \Rightarrow n^2 \text{ pari}$ .

La proposizione  $n^2 \text{ pari} \Leftrightarrow n \text{ pari}$  viene anche espressa nel seguente modo:

$n^2$  è pari se e solo se  $n$  è pari.

Se si volesse dimostrare la parte “ se ” dell'implicazione allora si dovrebbe dimostrare che  $n \text{ pari} \Rightarrow n^2 \text{ pari}$ . Se si volesse dimostrare la parte “ solo se ” dell'implicazione allora si dovrebbe dimostrare che  $n^2 \text{ pari} \Rightarrow n \text{ pari}$ .

In generale la proposizione “ $A \Leftrightarrow B$ ” si può anche esprimere dicendo che “ $A$  è vera se e solo se  $B$  è vera”.

**Riassumendo:** “ $A \Leftrightarrow B$ ” si esprime con una delle tre proposizioni:

- ( $A$  vera) è equivalente a ( $B$  vera)
- $A$  è vera se e solo se  $B$  è vera
- Condizione necessaria e sufficiente affinché  $A$  sia vera è che sia vera  $B$

**Domanda 3** Si consideri ora la proposizione :

“Condizione necessaria e sufficiente affinché Paola sia a Roma è che Paola sia in Italia.”

- 1) Questa proposizione è vera o falsa ?
- 2) Se è falsa, quale fra le due condizioni (necessaria e sufficiente) è vera ?

**Risposta 3**

1) La proposizione è ovviamente falsa perché se Paola è in Italia non è detto che sia a Roma. 2) “Paola è a Roma”  $\Rightarrow$  “Paola è in Italia” (e cioè la condizione necessaria)

è vera. Mentre è falso che “Paola è in Italia”  $\Rightarrow$  “Paola è a Roma” (la condizione sufficiente).

**Esercizio 4.** Dimostrare che  $n^2$  pari  $\Leftrightarrow n$  pari,  $n \in \mathbb{N}$ .

**Soluzione esercizio 4.**  $n$  pari  $\Rightarrow n = 2k$  per qualche  $k \in \mathbb{N}$ . Ma allora  $n^2 = 2(2k^2)$  e quindi  $n^2$  è pari. Viceversa, sia  $n^2$  pari. Dimostrare l’implicazione  $n^2$  pari  $\Rightarrow n$  pari è equivalente a dimostrare la contrapposta e cioè che  $n$  dispari  $\Rightarrow n^2$  dispari. Ma  $n$  dispari  $\Rightarrow n = 2h + 1$  per qualche  $h \in \mathbb{N}$ . Ne segue che  $n^2 = 2(2h^2 + 2h) + 1$  e quindi che  $n^2$  è dispari. **Quod Erat Demonstrandum.**)

**QUANTIFICATORI** Passiamo ad illustrare l’uso dei simboli  $\forall$  e  $\exists$ .

#### Domanda 4

1) Come si traduce con i simboli elencati la seguente proposizione?:

“ $\mathcal{P}1$ : Si può trovare un numero razionale diverso da zero il cui prodotto con un qualsiasi altro numero razionale diverso da zero è uguale a 1”.

2) La proposizione  $\mathcal{P}1$  è vera o falsa?

#### Risposta 4.

1)  $\mathcal{P}1$ :  $\exists x \in \mathbb{Q} \ x \neq 0 \mid \forall y \in \mathbb{Q} \ y \neq 0, \ xy = 1$

2) La proposizione è falsa. Per dimostrarlo bisogna far vedere che non esiste  $x \in \mathbb{Q} \ x \neq 0$  con la proprietà enunciata. In altre parole, scelto comunque un numero razionale  $x \neq 0$  basterà far vedere che esiste un  $y'$  tale che  $xy' \neq 1$ . Dato che  $x \neq 0$  si può scegliere per esempio  $y' = \frac{1}{2x}$  in modo tale che  $xy' = \frac{1}{2} \neq 1$ .

*Osservazione. Abbiamo dimostrato:  $\forall x \in \mathbb{Q} \ x \neq 0 \ \exists y' \in \mathbb{Q} \ y' \neq 0, \mid xy' \neq 1$  cioè la negazione di  $\mathcal{P}1$ .*

*È importante capire questo punto:*

Negare :  $\forall x$  è valida la proposizione  $\mathcal{P}$  è equivalente a affermare :  $\exists x$  per cui non è valida la proposizione  $\mathcal{P}$ .

Negare :  $\exists x$  per cui è valida la proposizione  $\mathcal{P}$  è equivalente a affermare :  $\forall x$  non è valida la proposizione  $\mathcal{P}$ .

**Esercizio 5** Consideriamo la proposizione:  $\mathcal{P}2$  :  $\forall x \in \mathbb{Q}, \ x \neq 0 \ \exists y \in \mathbb{Q} \mid xy = 1$ . Questa proposizione è vera o falsa? Scrivetela per esteso e confrontatela con la proposizione  $\mathcal{P}1$ .

**Soluzione Es. 5** La proposizione è vera; i numeri razionali  $\mathbb{Q}$  sono costruiti precisamente per soddisfare questa proprietà, esistenza dell’elemento inverso per i numeri razionali non nulli.

#### Esercizio 6.

1) Negare :  $\forall x \ \exists y \mid$  è valida la proposizione  $\mathcal{P}$

2) Negare :  $\exists x \mid \forall y$  è valida la proposizione  $\mathcal{P}$

#### Soluzione esercizio 6.

1)  $\exists x \mid \forall y$  non è valida  $\mathcal{P}$ .

2)  $\forall x \ \exists y \mid$  non è valida  $\mathcal{P}$ .