

Geometria 1. Gruppo E-N. Anno Accademico 2000-2001.

Alcuni preliminari.

In Matematica è molto frequente l'uso dei seguenti simboli:

\Rightarrow : Implica \Leftrightarrow : Equivalente \forall : Per ogni \exists : Esiste

Vogliamo chiarire il loro uso con alcuni esempi elementari.

IMPLICAZIONI. Cominciamo con le implicazioni (\Rightarrow , \Leftrightarrow) e le loro interpretazioni come condizioni necessarie e/o sufficienti.

Domanda 1 “Condizione sufficiente affinché la strada sia bagnata è che stia piovendo”

Come si scrive questa proposizione con il simbolo \Rightarrow ?

Domanda 2 “Condizione necessaria affinché stia piovendo è che la strada sia bagnata”

Che differenza c'è fra questa proposizione e quella della domanda 1 ?

Domanda 3 “Condizione necessaria affinché la strada sia bagnata è che stia piovendo”

Come si scrive questa proposizione con il simbolo \Rightarrow ? È vera ?

Domanda 4 Se la strada è asciutta che cosa se ne può dedurre?

Domanda 5 Sia $n \in \mathbb{N}$. Consideriamo la seguente proposizione :

“Condizione necessaria e sufficiente affinché n^2 sia pari è che n sia pari.”

1) Quali sono le due implicazioni che dimostrano questa proposizione ?

2) Come si traduce questa proposizione con il simbolo \Leftrightarrow ?

3) Qual è la condizione necessaria e quella sufficiente ?

Domanda 6 Si consideri ora la proposizione :

“Condizione necessaria e sufficiente affinché Paola sia a Roma è che Paola sia in Italia.”

1) Questa proposizione è vera o falsa ?

2) Se è falsa, quale fra le due condizioni (necessaria e sufficiente) è vera ?

Esercizio per casa 1. Dimostrare che n^2 pari $\Leftrightarrow n$ pari, $n \in \mathbb{N}$.

Soluzione esercizio. n pari $\Rightarrow n = 2k$ per qualche $k \in \mathbb{N}$. Ma allora $n^2 = 2(2k^2)$ e quindi n^2 è pari. Viceversa, sia n^2 pari. Dimostrare l'implicazione n^2 pari $\Rightarrow n$ pari è equivalente a dimostrare la contrapposta e cioè che n dispari $\Rightarrow n^2$ dispari. Ma n dispari $\Rightarrow n = 2h + 1$ per qualche $h \in \mathbb{N}$. Ne segue che $n^2 = 2(2h^2 + 2h) + 1$ e quindi che n^2 è dispari. **Quod Erat Demonstrandum.**

QUANTIFICATORI Passiamo ad illustrare l'uso dei simboli \forall e \exists . Useremo anche i simboli

\in : appartiene $|$: tale che

Domanda 7

1) Come si traduce con i simboli elencati la seguente proposizione?:

“ $\mathcal{P}1$: Si può trovare un numero razionale diverso da zero il cui prodotto con un qualsiasi altro numero razionale è uguale a 1”.

2) La proposizione $\mathcal{P}1$ è vera o falsa?

Esercizio 2 Consideriamo la proposizione: $\mathcal{P}2 : \forall x \in \mathbb{Q}, x \neq 0 \exists y \in \mathbb{Q} \mid xy = 1$. Questa proposizione è vera o falsa? Scrivetela per esteso e confrontatela con la proposizione $\mathcal{P}1$.

Soluzione Es. 2 La proposizione è vera; i numeri razionali \mathbb{Q} sono costruiti precisamente per soddisfare questa proprietà, esistenza dell'elemento inverso per i numeri razionali non nulli.