Geometria 1. Corso di Laurea in Fisica. Anno Accedemico 06-07. Prof. P. Piazza.
Alcuni preliminari. Risposte

Risposta 1 "Sta piovendo" $\Rightarrow$ "la strada è bagnata".
Risposta 2 Non c'è alcuna differenza. Anche questa proposizione si traduce in : "Sta piovendo" $\Rightarrow$ "la strada è bagnata".
In generale la proposizione $A \Rightarrow B$ si può tradurre indifferentemente con una delle seguenti due proposizioni

1) Condizione necessaria affinché A sia vero è che sia verificato B.

2) Condizione sufficiente affinché B sia vero è che sia verificato A.

Osserviamo anche che una condizione sufficiente "implica" mentre una condizione necessaria "è implicata".
Risposta 3 La proposizione si può scrivere "la strada è bagnata" $\Rightarrow$ "sta piovendo". È chiaramente falsa.
In generale la veridicità di $A \Rightarrow B$ non fornisce alcuna informazione circa la veridicità della proposizione $B \Rightarrow A$.
Risposta 4 "se la strada è asciutta" ne segue che "non sta piovendo".
Questo è un esempio della regola di contrapposizione: $A \Rightarrow B$ è equivalente a (negazione di B) $\Rightarrow$ (negazione di A).
Risposta 5 1) Le implicazioni sono : "n^2 *pari* $\Rightarrow n$ *pari*" e " n *pari* $\Rightarrow n^2$ *pari*".

2) $n^2 pari \Leftrightarrow n\ pari$.

Osservazione. La proposizione "$A \Leftrightarrow B$" si può anche esprimere dicendo che "A è equivalente a B" oppure "A è vera se e soltanto se B è vera".

3) "n è pari" è sia condizione necessaria che condizione sufficiente. Se si volesse dimostrare la veridicità della condizione necessaria si dovrebbe dimostrare che n^2 *pari* $\Rightarrow n$ *pari*. Se si volesse invece dimostrare la veridicità della condizione sufficiente allora si dovrebbe far vedere che n *pari* $\Rightarrow n^2$ *pari*.
Risposta 6 1) La proposizione è ovviamente falsa perché se Paola è in Italia non è detto che sia a Roma.
2) "Paola è a Roma"$\Rightarrow$ "Paola è in Italia" (e cioè la condizione necessaria) è vera. Mentre è falso che "Paola è in Italia"$\Rightarrow$ "Paola è a Roma" (la condizione sufficiente).
Risposta 7 1) $\mathcal{P}1$: $\exists x \in \mathbb{Q}\ \ x \neq 0\ \mid\ \forall y \in \mathbb{Q},\ \ xy = 1$
2) La proposizione è falsa. Per dimostrarlo bisogna far vedere che non esiste $x \in \mathbb{Q}$ con la proprietà enunciata. In altre parole, scelto comunque un numero razionale $x \neq 0$ basterà far vedere che esiste un y' tale che $xy' \neq 1$. Dato che $x \neq 0$ si può scegliere per esempio $y' = \frac{1}{2x}$ in modo tale che $xy' = \frac{1}{2} \neq 1$.
Osservazione. Abbiamo dimostrato: $\forall x \in \mathbb{Q}\ \ x \neq 0\ \ \exists y' \in \mathbb{Q}\ \mid\ xy' \neq 1$ *cioè la negazione di $\mathcal{P}1$.*
È importante capire questo punto:
Negare : $\forall x$ è valida la proposizione $\mathcal{P}$ è equivalente a affermare : $\exists x$ per cui non è valida la proposizione $\mathcal{P}$.
Negare : $\exists x$ per cui è valida la proposizione $\mathcal{P}$ è equivalente a affermare : $\forall x$ non è valida la proposizione $\mathcal{P}$.

Esercizio:

1) Negare : $\forall x\ \exists y\ \mid$ è valida la proposizione $\mathcal{P}$

2) Negare : $\exists x\ \mid\ \forall y$ è valida la proposizione $\mathcal{P}$

3) Negare : $\forall x\ \exists y\ \mid \forall z$ è valida la proposizione $\mathcal{P}$

Soluzione esercizio.

1) $\exists x\ \mid\ \forall y$ non è valida $\mathcal{P}$.

2) $\forall x\ \exists y\ \mid$ non è valida $\mathcal{P}$.

3) $\exists x\ \mid\ \forall y\ \exists z\ \mid$ non è valida $\mathcal{P}$.