Geometria 1. Corso di Laurea in Fisica. Anno Accedemico 06-07. Prof. P. Piazza.
Alcuni preliminari.

In Matematica è molto frequente l'uso dei seguenti simboli:

$\Rightarrow$: Implica $\Leftrightarrow$: Equivalente $\forall$: Per ogni $\exists$: Esiste $\exists!$: EsisteUnico

Vogliamo chiarire il loro uso con alcuni esempi elementari.
IMPLICAZIONI. Cominciamo con le implicazioni ($\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$) e le loro interpretazioni come condizioni necessarie e/o sufficienti.
Domanda 1 "Condizione sufficiente affinché la strada sia bagnata è che stia piovendo"
Come si scrive questa proposizione con il simbolo $\Rightarrow$?
Domanda 2 "Condizione necessaria affinché stia piovendo è che la strada sia bagnata"
Che differenza c'è fra questa proposizione e quella della domanda 1 ?
Domanda 3 "Condizione necessaria affinché la strada sia bagnata è che stia piovendo"
Come si scrive questa proposizione con il simbolo $\Rightarrow$? È vera ?
Domanda 4 Se la strada è asciutta che cosa se ne può dedurre?
Domanda 5 Sia $n \in \mathbb{N}$. Consideriamo la seguente proposizione :
"Condizione necessaria e sufficiente affinché n^2 sia pari è che n sia pari."

1) Quali sono le due implicazioni che dimostrano questa proposizione ?
2) Come si traduce questa proposizione con il simbolo $\Leftrightarrow$?
3) Qual è la condizione necessaria e quella sufficiente ?

Domanda 6 Si consideri ora la proposizione :
"Condizione necessaria e sufficiente affinché Paola sia a Roma è che Paola sia in Italia."

1) Questa proposizione è vera o falsa ?
2) Se è falsa, quale fra le due condizioni (necessaria e sufficiente) è vera ?

Esercizio per casa 1. Dimostrare che n^2 *pari* $\Leftrightarrow$ n *pari*, $n \in \mathbb{N}$.
Soluzione esercizio. n *pari* $\Rightarrow n = 2k$ per qualche $k \in \mathbb{N}$. Ma allora $n^2 = 2(2k^2)$ e quindi n^2 è pari. Viceversa, sia n^2 *pari*. Dimostrare l'implicazione n^2 *pari* $\Rightarrow$ n *pari* è equivalente a dimostrare la contrapposta e cioè che n *dispari* $\Rightarrow$ n^2 *dispari*. Ma n *dispari* $\Rightarrow n = 2h + 1$ per qualche $h \in \mathbb{N}$. Ne segue che $n^2 = 2(2h^2 + 2h) + 1$ e quindi che n^2 è dispari. **Q**uod **E**rat **D**emonstrandum.)

QUANTIFICATORI Passiamo ad illustrare l'uso dei simboli $\forall$ e $\exists$. Useremo anche i simboli

$\in$: appartiene $|$: tale che

Domanda 7
1) Come si traduce con i simboli elencati la seguente proposizione?:
"$\mathcal{P}1$: Si puó trovare un numero razionale diverso da zero il cui prodotto con un qualsiasi altro numero razionale è uguale a 1".
2) La proposizione $\mathcal{P}1$ é vera o falsa?
Esercizio 2 Consideriamo la proposizione: $\mathcal{P}2 : \forall x \in \mathbb{Q},\ x \neq 0\ \exists y \in \mathbb{Q} \ \mid \ xy = 1$. Questa proposizione è vera o falsa? Scrivetela per esteso e confrontatela con la proposizione $\mathcal{P}1$.
Soluzione Es. 2 La proposizione è vera; i numeri razionali $\mathbb{Q}$ sono costruiti precisamente per soddisfare questa proprietà, esistenza dell'elemento inverso per i numeri razionali non nulli.