Corso di Laurea in Fisica. Geometria. a.a. 2020-21. Canale 3.
Prof. P. Piazza
Alcune informazioni importanti sui polinomi

1. Radici e molteplicità

Sia $\mathbb{K}$ un campo. Denotiamo con 1 e 0 rispettivamente l'unità moltiplicativa e l'elemento neutro additivo del campo $\mathbb{K}$.
Consideriamo l'insieme $\mathbb{K}[\lambda]$ dei polinomi a coefficienti in $\mathbb{K}$. Con le usuali operazioni di somma e prodotto l'insieme $\mathbb{K}[\lambda]$ ha una struttura di anello commutativo unitario, con unità il polinomio $1\lambda^0 + 0\lambda^1 + 0\lambda^2 + \cdots$.
Un elemento $\lambda_0 \in \mathbb{K}$ è una radice di un polinomio $P(\lambda)$ se $P(\lambda_0) = 0$. Vale la seguente importante

Proposizione. $\lambda_0 \in \mathbb{K}$ è una radice di $P(\lambda)$ se e solo se esiste $Q(\lambda) \in \mathbb{K}[\lambda]$ tale che

$$P(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)Q(\lambda)\,.$$

Dimostrazione. Se esiste $Q(\lambda) \in \mathbb{K}[\lambda]$ tale che $P(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)Q(\lambda)$ allora è ovvio che $P(\lambda_0) = 0$ e che λ_0 è quindi una radice. Vediamo il viceversa. Supponiamo quindi che λ_0 sia una radice di $P(\lambda)$ e facciamo vedere che esiste $Q(\lambda) \in \mathbb{K}[\lambda]$ tale che $P(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)Q(\lambda)$. Se $\lambda_0 = 0$ allora $P(0) = 0$ e quindi $P(\lambda)$ non ha termine noto. Si ha quindi

$$P(\lambda) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_2\lambda^2 + a_1\lambda = \lambda(a_n\lambda^{n-1} + a_{n-1}\lambda^{n-2} + \cdots + a_2\lambda + a_1)$$

e quindi la tesi con $Q(\lambda) = a_n\lambda^{n-1} + a_{n-1}\lambda^{n-2} + \cdots + a_2\lambda + a_1$. Passiamo al caso generale. Fissiamo un qualsiasi $\alpha \in \mathbb{K}$; possiamo scrivere $P(\lambda) = P((\lambda - \alpha) + \alpha)$; sostituiamo $(\lambda - \alpha) + \alpha$ nell'espressione di P e sviluppiamo le potenze di tutti i binomi. Otteniamo un nuovo polinomio $R(\mu)$ tale che $P((\lambda - \alpha) + \alpha) = R(\lambda - \alpha)$. Notiamo che $R(0) = P(\alpha)$. [1] Scegliamo in particolare $\alpha = \lambda_0$; per costruzione abbiamo che $R(0) = P(\lambda_0) = 0$, perché λ_0 è una radice di P. Ma allora, per il caso precedente, esiste un polinomio S tale che $R(\mu) = \mu S(\mu)$ e quindi

$$R(\lambda - \lambda_0) = (\lambda - \lambda_0)S(\lambda - \lambda_0)$$

A sinistra, per definizione, abbiamo $P(\lambda)$. Inoltre, ragionando come sopra, capiamo che $S(\lambda - \lambda_0) = Q(\lambda)$ per un qualche polinomio $Q(\lambda)$. Riassumendo: $P(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)Q(\lambda)$ che è quello che dovevamo dimostrare.

Ovviamente può accadere che λ_0 sia anche una radice di $Q(\lambda)$ e quindi esiste un polinomio $G(\lambda)$ tale che $Q(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)G(\lambda)$. Otteniamo allora

$$P(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^2 G(\lambda)\,.$$

Procedendo induttivamente possiamo dare la seguente

Definizione. Sia $\lambda_0 \in \mathbb{K}$ una radice di $P(\lambda)$. Allora λ_0 ha molteplicità h come radice di $P(\lambda)$ se esiste $F(\lambda) \in \mathbb{K}[\lambda]$ tale che $F(\lambda_0) \neq 0$ e

$$P(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^h F(\lambda)\,.$$

---

[1] Vediamo un esempio: sia $P(\lambda) = 3\lambda^2 + 2\lambda - 4$ e sia $\alpha = 1$; sostituiamo al posto di λ il binomio $(\lambda - 1) + 1$ e sviluppiamo $3((\lambda - 1) + 1)^2 + 2((\lambda - 1) + 1) - 4$ ottenendo $3(\lambda - 1)^2 + 8(\lambda - 1) + 1$ che è il polinomio $R(\mu) = 3\mu^2 + 8\mu + 1$ calcolato in $(\lambda - 1)$; si ha $R(0) = 1$; notiamo che $P(1)$ è anche uguale a 1, come enunciato.

2. Polinomi reali e complessi

Sia $P(\lambda)$ un polinomio di grado n: $P(\lambda) = a_n\lambda^n + \cdots + a_1\lambda + a_0$. Possiamo supporre senza perdita di generalità per quanto segue che $a_n = 1$. Si dice che il polinomio è *monico.*
Cominciamo con il richiamare il

Teorema fondamentale dell'algebra. *Sia $P(\lambda)$ un polinomio monico a coefficienti complessi; esistono n numeri complessi $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ tali che*

$$P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)\cdots(\lambda - \lambda_n).$$

Questi numeri $\lambda_j \in \mathbb{C}$ sono quindi **le** radici di $P(\lambda)$ e cioè sono tutte e sole le soluzioni dell'equazione $P(\lambda) = 0$. Le radici di un polinomio complesso di grado n sono quindi in numero di n. Fra questi λ_j alcuni saranno coincidenti. Siano $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$ le radici distinte; allora

$$P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{h(\lambda_1)} \cdots\cdots (\lambda - \lambda_k)^{h(\lambda_k)}.$$

È chiaro che il numero intero $h(\lambda_j)$ è la molteplicità di λ_j come radice del polinomio $P(\lambda)$ [2]. Il Teorema fondamentale dell'algebra viene anche enunciato come segue: *ogni polinomio complesso di grado n ammmette n radici contate con la loro molteplicità.*

Supponiamo ora che $P(\lambda)$ sia un polinomio *reale*; questo vuol dire che i coefficienti a_j sono numeri reali. Se consideriamo $P(\lambda)$ come polinomio a coefficienti complessi (cosa lecita dato che $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$) allora possiamo applicare quanto appena visto e concludere che esistono n numeri complessi $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ tali che

$$P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)\cdots(\lambda - \lambda_n).$$

Dato che il polinomio ha i coefficienti reali si ha che che se $\mu \in \mathbb{C}$ è una radice complessa di $P(\lambda)$ allora anche $\overline{\mu} \in \mathbb{C}$ [3] è una radice complessa di $P(\lambda)$. [4] Quindi le radici di $P(\lambda)$ sono reali oppure complesse-coniugate (non-reali). Siano

$$c_1 = \lambda_1,\ \ \overline{c_1} = \lambda_2, \ldots\ldots,\ \ c_k = \lambda_{2k-1},\ \ \overline{c_k} = \lambda_{2k}, \quad 0 \le 2k \le n$$

le radici complesse coniugate, e siano

$$r_1 = \lambda_{2k+1}\,, \ldots\ldots, r_{n-2k} = \lambda_n$$

le radici reali. Allora

$$P(\lambda) = (\lambda - c_1)\cdot(\lambda - \overline{c_1})\cdots(\lambda - c_k)\cdot(\lambda - \overline{c_k})\cdot(\lambda - r_1)\cdots(\lambda - r_{n-2k}).$$

Quindi

$$P(\lambda) = (\lambda^2 - (c_1 + \overline{c_1})\lambda + |c_1|^2)\cdots(\lambda^2 - (c_k + \overline{c_k})\lambda + |c_k|^2)\cdot(\lambda - r_1)\cdots(\lambda - r_{n-2k}).$$

In parole: ogni polinomio reale si decompone nel prodotto di polinomi *reali* di secondo grado [5] che non ammettono radici reali e di polinomi reali di primo grado (che quindi ammettono un'unica radice reale). Se $k = 0$ le radici sono tutte reali; in altre parole, in questo caso il polinomio reale ha tutte le sue radici nel campo $\mathbb{R}$;

[2] Attenzione: sto adottando una notazione leggermente diversa rispetto al libro di testo...

[3] Vi ricordo che $\overline{a + ib} := a - ib$ e $|a + ib|^2 := a^2 + b^2 = (a + ib)\cdot\overline{(a + ib)}$

[4] Infatti: $P(\mu) = 0 \ \Rightarrow a_n\mu^n + \cdots + a_1\mu + a_0 = 0 \ \Rightarrow \overline{a_n\mu^n + \cdots + a_1\mu + a_0} = 0 \Rightarrow a_n\overline{\mu}^n + \cdots + a_1\overline{\mu} + a_0 = 0 \ \Rightarrow P(\overline{\mu}) = 0$.

[5] Perché $c_j\overline{c_j} = |c_j|^2 \in \mathbb{R}$ e $(c_j + \overline{c_j}) \in \mathbb{R}$

notiamo che $P(\lambda)$ ha tutte le sue radici in $\mathbb{R}$ se e solo se *la somma delle molteplicità delle sue radici reali è prorio* n. Notiamo anche che se $2k < n$ allora esiste almeno una radice reale.
È importante notare che se $n = 2m+1$ allora, ovviamente, $2k < 2m+1 \equiv n$; quindi un polinomio reale di grado *dispari* ammette sempre (almeno) una radice reale. [6]

Sia ora V uno spazio vettoriale **reale** di dimensione n. Sia $F : V \to V$ lineare e sia $P_F(\lambda)$ il polinomio caratteristico di F; $P_F(\lambda)$ è un polinomio a coefficienti reali di grado n e le sue radici **reali** sono tutti e soli gli autovalori di F. La molteplicita algebrica di un autovalore è la sua molteplicità in quanto radice del polinomio caratteristico. Diciamo che F ammette tutti gli autovalori in $\mathbb{R}$ se $k = 0$; in tal caso

$$P_F(\lambda) = (\lambda - r_1)(\lambda - r_2)\cdots(\lambda - r_n)\,, \quad \text{con} \ \ r_j \in \mathbb{R}\,.$$

Notiamo che se $\dim V = 2m+1$ allora F ammette autovettori (perché esiste almeno un autovalore).

[6] Intuitivamente: le radici complesse non reali vengono in coppie complesse-coniugate e se il grado del polinomio è dispari allora rimane qualche radice "spaiata" che deve essere necessariamente reale.