Corso di Laurea in Fisica. Geometria. a.a. 2012-13. Canale L-PE.
Prof. P. Piazza
Complementi sui polinomi a coefficienti reali e complessi

Sia $P(\lambda)$ un polinomio di grado n: $P(\lambda) = a_n\lambda^n + \cdots + a_1\lambda + a_0$. Possiamo supporre senza perdita di generalità per quanto segue che $a_n = 1$. Si dice che il polinomio è monico.
Cominciamo con il richiamare il

Teorema fondamentale dell'algebra. *Sia $P(\lambda)$ un polinomio monico a coefficienti complessi; esistono n numeri complessi $\mu_1,\ldots,\mu_n$ tali che*

$$P(\lambda) = (\lambda - \mu_1)\cdots(\lambda - \mu_n).$$

Questi numeri $\mu_j \in \mathbb{C}$ sono quindi **le** radici di $P(\lambda)$ e cioè sono tutte e sole le soluzioni dell'equazione $P(\lambda) = 0$. Le radici di un polinomio complesso di grado n sono quindi in numero di n. Fra questi μ_j alcuni saranno coincidenti. Siano $\{\mu_1, \ldots, \mu_k\}$ le radici distinte; allora

$$P(\lambda) = (\lambda - \mu_1)^{h(\mu_1)} \cdots\cdots (\lambda - \mu_k)^{h(\mu_k)}.$$

Il numero intero $h(\mu_j)$ è, per definizione, la molteplicità di μ_j come radice del polinomio [1]. Il Teorema fondamentale dell'algebra viene anche enunciato come segue: *ogni polinomio complesso di grado n ammmette n radici contate con la loro molteplicità.*
Supponiamo ora che $P(\lambda)$ sia un polinomio *reale*; questo vuol dire che i coefficienti a_j sono numeri reali. Se consideriamo $P(\lambda)$ come polinomio a coefficienti complessi (cosa lecita dato che $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$) allora possiamo applicare quanto appena visto e concludere che esistono n numeri complessi $\mu_1, \ldots, \mu_n \in \mathbb{C}$ tali che

$$P(\lambda) = (\lambda - \mu_1)\cdots(\lambda - \mu_n).$$

Dato che il polinomio ha i coefficienti reali si ha che che se $\mu \in \mathbb{C}$ è una radice complessa di $P(\lambda)$ allora anche $\overline{\mu} \in \mathbb{C}$ [2] è una radice complessa di $P(\lambda)$. [3] Quindi le radici di $P(\lambda)$ sono reali oppure complesse-coniugate (non-reali). Siano

$$c_1 = \mu_1,\ \ \overline{c_1} = \mu_2, \ldots\ldots,\ \ c_k = \mu_{2k-1},\ \ \overline{c_k} = \mu_{2k}, \quad 0 \leq 2k \leq n$$

le radici complesse coniugate, e siano

$$r_1 = \mu_{2k+1}\,, \ldots\ldots, r_{n-2k} = \mu_n$$

le radici reali. Allora

$$P(\lambda) = (\lambda - c_1)\cdot(\lambda - \overline{c_1})\cdots(\lambda - c_k)\cdot(\lambda - \overline{c_k})\cdot(\lambda - r_1)\cdots(\lambda - r_{n-2k}).$$

Quindi

$$P(\lambda) = (\lambda^2 - (c_1 + \overline{c_1})\lambda + |c_1|^2)\cdots(\lambda^2 - (c_k + \overline{c_k})\lambda + |c_k|^2)\cdot(\lambda - r_1)\cdots(\lambda - r_{n-2k}).$$

In parole: ogni polinomio reale si decompone nel prodotto di polinomi *reali* di secondo grado [4] che non ammettono radici reali e di polinomi reali di primo grado

[1] Attenzione: sto adottando una notazione leggermente diversa rispetto al libro di testo...
[2] Vi ricordo che $\overline{a + ib} := a - ib$ e $|a + ib|^2 := a^2 + b^2 = (a + ib)\cdot(\overline{a + ib})$
[3] Infatti: $P(\mu) = 0 \ \Rightarrow a_n\mu^n + \cdots + a_1\mu + a_0 = 0 \ \Rightarrow \overline{a_n\mu^n + \cdots + a_1\mu + a_0} = 0 \ \Rightarrow a_n\overline{\mu}^n + \cdots + a_1\overline{\mu} + a_0 = 0 \ \Rightarrow P(\overline{\mu}) = 0$.
[4] Perché $c_j\overline{c_j} = |c_j|^2 \in \mathbb{R}$ e $(c_j + \overline{c_j}) \in \mathbb{R}$

(che quindi ammettono una radice reale). Se $k = 0$ le radici sono tutte reali; in altre parole, in questo caso il polinomio reale ha tutte le sue radici nel campo $\mathbb{R}$; notiamo che $P(\lambda)$ ha tutte le sue radici in $\mathbb{R}$ se e solo se *la somma delle molteplicità delle sue radici reali è prorio* n. Notiamo anche che se $2k < n$ allora esiste almeno una radice reale.
È importante notare che se $n = 2m + 1$ allora, ovviamente, $2k < 2m + 1 \equiv n$; quindi un polinomio reale di grado *dispari* ammette sempre (almeno) una radice reale. Detto in parole; le radici complesse non reali vengono in coppie complesse-coniugate e se il grado del polinomio è dispari allora rimane qualche radice "spaiata" che deve essere necessariamente reale.
Sia ora V uno spazio vettoriale reale di dimensione n. Sia $F : V \to V$ lineare e sia $P_F(T)$ il polinomio caratteristico di F; $P_F(T)$ è un polinomio a coefficienti reali di grado n e le sue radici **reali** sono tutti e soli gli autovalori di F. Notiamo che se $\dim V = 2m+1$ allora F ammette autovettori (perché esiste almeno un autovalore).