Esercizio 1. Calcolare i seguenti limiti di successione

$$\lim_{n\to+\infty}\left(n-\frac{4}{n}\right)\left(\sqrt{1+\frac{3}{n}}-1\right), \qquad \lim_{n\to+\infty}\left(1+\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n$$

Risoluzione:

(1) $$\lim_{n\to+\infty}\left(n-\frac{4}{n}\right)\left(\sqrt{1+\frac{3}{n}}-1\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(n-\frac{4}{n}\right)\left(1+\frac{3}{n}-1\right)}{\sqrt{1+\frac{3}{n}}+1} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{3(n^2-4)}{n^2\left(\sqrt{1+\frac{3}{n}}+1\right)} = \lim_{n\to\infty}\frac{3-4/n^2}{\sqrt{1+\frac{3}{n}}+1} = 3/2$$

(2) $$\lim_{n\to\infty}\left(1+\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n = \lim_{n\to\infty} e^{n\log(1+\sin\frac{1}{n})}$$

$$\log(\cancel{s}1+\sin\tfrac{1}{n}) = \frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} e^{n\log(\cancel{s1}1+\sin(\frac{1}{n}))} = \lim_{n\to\infty} e^{1+n\,o(\frac{1}{n})} = e$$

Esercizio 2. Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(\cos(x)) + \frac{1}{2}x^2}{x\sin(x^2)} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\log(1+\sin(3x)) - 3x}{1-\cos(3x) - 3x^2}.$$

Risoluzione:

(1) $\sin x^2 = x^2 + o(x^3)$

Quindi $x \sin x^2 = x^3 + o(x^4)$ e basta ottenere uno sviluppo del numeratore a meno di $o(x^3)$.

Poiché $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)$

$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

In realtà basta sviluppare $\log(1+x)$ come $\log(1+x) = x + o(x)$.

Si ottiene

$$\log(\cos x) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) = -\frac{x^2}{2} + o(x^3) \quad \text{e}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(\cos x) + \frac{1}{2}x^2}{x \operatorname{sen} x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{o(x^3)}{x^3 + o(x^3)} = 0$$

(2) Il denominatore si sviluppa con

$$1 - \cos(3x) - 3x^2 = 1 - 1 + \frac{(3x)^2}{2} - 3x^2 + o(x^3) = \frac{3}{2}x^2 + o(x^3)$$

Quindi basta ottenere uno sviluppo del numeratore al secondo ordine

$$\log(1 + \operatorname{sen}(3x)) - 3x = (3x + o(x^2)) - \frac{(3x + o(x^2))^2}{2} - 3x =$$
$$= -\frac{9}{2}x^2 + o(x^2)$$

Quindi

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1 + \operatorname{sen}(3x)) - 3x^3}{1 - \cos(3x) - 3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{9}{2}x^2 + o(x^2)}{\frac{3}{2}x^2 + o(x^2)} = -3$$

Esercizio 3. Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{e^{|x-1|}}{x}.$$

Determinarne dominio naturale, eventuali asintoti, intervalli di crescenza e decrescenza, intervalli di concavità e convessità. Tracciare un grafico approssimativo.

Risoluzione:

La funzione ha per dominio naturale $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, Risulta $f(x) > 0$ per $x > 0$ e $f(x) < 0$ per $x < 0$.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \quad , \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to 0^{\pm}} f(x) = \pm\infty$$

Non ci sono asintoti obliqui.

Se $x > 1$ $\quad f'(x) = \dfrac{e^{x-1}(x-1)}{x^2}$

Se $x < 1$ $\quad f'(x) = -\dfrac{e^{1-x}(1+x)}{x^2}$

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{e^{h-1} - 1}{h} = 1$$

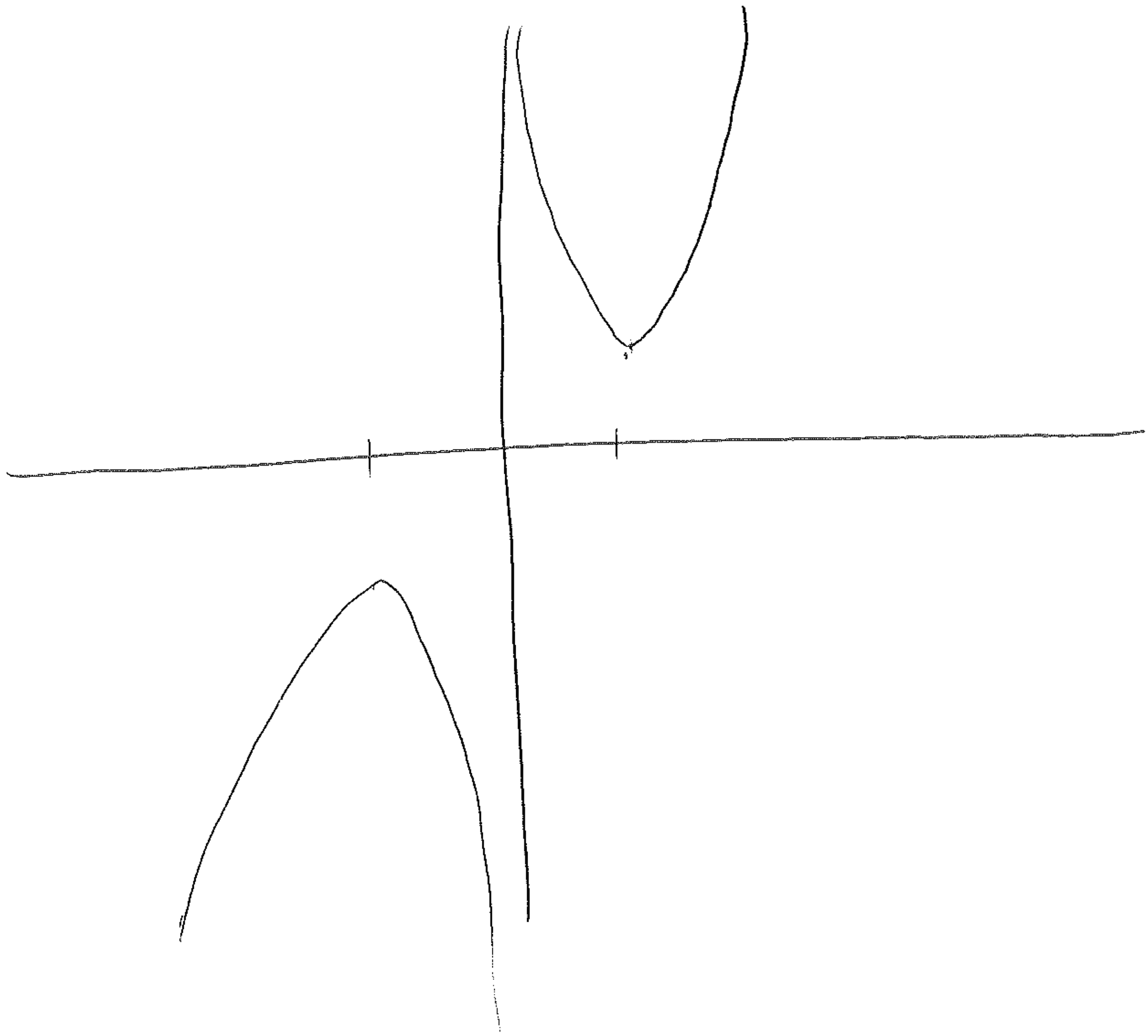
$$\lim_{h \to 0^-} \frac{e^{1-h} - 1}{h} = -1$$

Quindi $f(x)$ non è derivabile in $x = 1$.

$f'(x) = 0 \iff x = -1$. Dallo studio del segno di $f'(x)$ deduciamo che $x = -1$ è un punto di massimo relativo

$$f''(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{x-1}(x^2-2x+2)}{x^3} \\[2ex] \dfrac{e^{1-x}(x^2+2x+2)}{x^3} \end{cases}$$

$f''(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $f''(x) > 0$ se e solo se $x > 0$



Esercizio 4. Determinare il valore del parametro reale a per cui la funzione

$$f(x) = \begin{cases} a + ex & x \leq -1 \\ (x+1)e^{|x|} & x > -1 \end{cases}$$

è continua su $\mathbb{R}$.

Risoluzione:

La funzione è continua in ogni $x \neq -1$ per ogni valore di a perché somma, prodotto, composizione di funzioni continue.

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1} (x+1) e^{|x|} = 0$$

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1} (a+ex) = a - e = f(-1)$$

Per avere continuità anche in $x = -1$ deve essere

$$a - e = 0$$

cioè $a = e$

Esercizio 5. 1. Enunciare il teorema di Lagrange;

2. Dimostrare il teorema di Lagrange, assumendo il teorema di Rolle;

3. Vero o falso: se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è costante allora $f'(x) = 0$ per ogni $x \in [a, b]$.

4. Vero o falso: se $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}$ è una funzione derivabile in A tale che $f'(x) = 0$ per ogni $x \in A$, allora f è costante.

(Nota: nelle domande 3, 4, dare una dimostrazione se l'affermazione è vera o esibire un controesempio se falsa.)

1. 2. Si vedano i testi consigliati.

3. Se $f(x) = K$, $x_0 \in [a, b]$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{K - K}{h} = 0$$

4. Falso: se $f : [1, 2] \cup [3, 4] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [1,2] \\ 1 & x \in [3,4] \end{cases}$$

Allora $f'(x) = 0 \quad \forall x \in [1, 2] \cup [3, 4]$ ma f non è costante