Paolo Piazza

Corso di dottorato

Operatori Ellittici e Topologia

a.a. 2005-06

Contents

1. **Lezione 1.** 4
1.1. Definizione di fibrato vettoriale. 4
1.2. Funzioni di transizione. 4
1.3. Morfismi di fibrati. 5
1.4. Esempi notevoli. 5
1.5. Sezioni di un fibrato. 6
2. **Lezione 2.** 9
2.1. Operazioni sui fibrati. 9
2.2. Fibrato indotto da un'applicazione (pull-back). 9
2.3. Il semigruppo $\mathrm{Vect}(X)$. Teorema di omotopia 10
2.4. Sottofibrato. 11
2.5. Metrica su un fibrato. 12
2.6. Matrice locale della metrica rispetto ad una base locale. 12
2.7. Fibrato normale. 12
2.8. Complementi: il teorema di classificazione. 13
3. **Lezione 3.** 14
3.1. Connessioni su un fibrato. 14
3.2. Descrizione locale delle connessioni. 15
3.3. Esistenza di una connessione. 15
3.4. Cambiamento di base locale. 16
3.5. Trasporto parallelo 16
3.6. Esempi. 17
3.7. Ulteriori proprietà 18
4. **Lezione 4.** 19
4.1. Curvatura 19
4.2. Polinomi invarianti. 20
4.3. L'omomorfismo di Chern-Weil. 21
4.4. Riduzione del gruppo di struttura. 24
4.5. Definizione di classi di Chern. 24
5. **Lezione 5.** 26
5.1. Le classi di Chern di un fibrato hermitiano. 26
5.2. Classe totale di Chern. Carattere di Chern. Classe di Todd. 27
5.3. Classi di Pontryagin di un fibrato reale riemanniano. 28
5.4. Classe di Pontryagin totale. Classe L di Hirzebruch. Classe $\hat{A}$. 31
6. **Lezione 6.** 33
6.1. Fibrati orientabili. 33
6.2. Polinomi $SO(k)$-invarianti. Classe di Eulero. 33
7. **Lezione 7.** 38
7.1. Connessione di Levi-Civita. 38
7.2. Descrizione locale della connessione di Levi-Civita. 38
7.3. Geodetiche di una varietà. 40
7.4. Coordinate Normali. 40
8. **Lezione 8.** 43
8.1. Varietà complesse. 43
8.2. Metriche hermitiane. Forma di Kähler 45

8.3. Tre *best sellers* della geometria moderna. 48
9. **Lezione 9.** 50
9.1. Algebre di Clifford 50
9.2. Moduli di Clifford. 50
9.3. Graduazione e filtrazione di $Cl(V,q)$. 51
9.4. Operatori di Dirac. 52
9.5. Esempio 1: l'operatore di Gauss-Bonnet. 53
10. **Lezione 10.** 56
10.1. Moduli di Clifford $\mathbb{Z}_2$-graduati. 56
10.2. Esempio 2. L'operatore di segnatura D^{sign}. 56
10.3. Esempio 3. L'operatore $\bar{\partial} + \bar{\partial}^*$ su una varietà quasi-complessa. 56
10.4. Operatori differenziali. 57
10.5. Simbolo principale. 58
10.6. Laplaciani generalizzati. 59
10.7. Ancora un (lungo) commento sulle varietà complesse. 59
11. **Lezione 11.** 63
11.1. Gli operatori di Dirac sono formalmente autoaggiunti. 63
11.2. Chiralità. Il modulo degli spinori 64
11.3. Il gruppo Spin. 65
12. **Lezione 12.** 69
12.1. Rappresentazioni del gruppo Spin. 69
12.2. Varietà Spin. 69
12.3. Fibrato degli spinori. 71
12.4. L'operatore di Atiyah-Singer sulle varietà spin. 71
12.5. Enunciato del teorema di Atiyah–Singer su varietà spin. 72
References 73

1. **Lezione 1.**

1.1. **Definizione di fibrato vettoriale.**

Definizione 1. Un *fibrato vettoriale* C^∞ di rango k è una terna (E, π, M), dove E e M sono varietà C^∞, $\pi : E \to M$ è un'applicazione C^∞ suriettiva, tale che per ogni $m \in M$

(i) la fibra $E_m = \pi^{-1}(m)$ ha una struttura di spazio vettoriale di dimensione k;

(ii) esiste un intorno U di m e un diffeomorfismo $\varphi_U : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^k$ tale che per ogni $m' \in U$

a) $\varphi_U(E_{m'}) \subseteq \{m'\} \times \mathbb{R}^k$

b) $\varphi_U|_{E_{m'}} : E_{m'} \to \{m'\} \times \mathbb{R}^k$ è un isomorfismo di spazi vettoriali.

La varietà M è detta *base* del fibrato; la varietà E è detta *spazio totale* del fibrato.
Gli intorni U sono detti *intorni banalizzanti*, i diffeomorfismi φ_U *banalizzazioni locali.*
Se per ogni $m \in M$ l'intorno U può essere scelto uguale ad M, il fibrato vettoriale si dice *banale.*

Notazione. Denoteremo spesso il fibrato (E, π, M) con $(E \to M)$, oppure, semplicemente con E.

Definizioni analoghe.

- Fibrati vettoriali nella categoria degli spazi topologici e applicazioni continue.
- Fibrati vettoriali su $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$.
- Se M ed E sono varietà complesse (quindi le carte $\psi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{C}^n$ hanno valori in $\mathbb{C}^n$ e le funzioni di transizione $\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1} : \psi_\alpha(U_\alpha) \subseteq \mathbb{C}^n \to \psi_\beta(U_\beta) \subseteq \mathbb{C}^n$ sono biolomorfe) allora (E, π, M) è un fibrato vettoriale complesso *olomorfo* se ogni banalizzazione locale $\varphi_U : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{C}^k$ è biolomorfa.

1.2. **Funzioni di transizione.**

Dalla definizione segue che M ammette un ricoprimento $\{U_\alpha\}$ con intorni banalizzanti, che chiameremo *ricoprimento banalizzante.* Per ogni coppia di aperti U_α, U_β del ricoprimento, con $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, e per ogni $m \in U_\alpha \cap U_\beta$ l'applicazione

$$g_{\alpha\beta}(m) = \varphi_{U_\alpha}|_{E_m} \circ \left(\varphi_{U_\beta}^{-1}\Big|_{\{m\}\times\mathbb{R}^k} \right) :$$
$$\{m\} \times \mathbb{R}^k \to \{m\} \times \mathbb{R}^k$$

è un isomorfismo di spazi vettoriali.
Allora possiamo pensare alle $g_{\alpha\beta}(m)$ come applicazioni

$$g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to GL(k, \mathbb{R}).$$

Queste vengono dette *funzioni di transizione* e verificano due proprietà:
1) $g_{\alpha\beta}^{-1} = g_{\beta\alpha}$ in $U_\alpha \cap U_\beta$,
2) $g_{\alpha\beta} \circ g_{\beta\gamma} = g_{\alpha\gamma}$ in $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$.

Se M è una varietà differenziabile e se sono dati un ricoprimento $\{U_\alpha\}$ di M e mappe $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to GL(k, \mathbb{R})$ soddisfacenti le proprietà 1) e 2), allora è possibile definire un fibrato vettoriale

(E, π, M) che ammetta le $g_{\alpha\beta}$ come funzioni di transizione. Precisamente, consideriamo l'insieme $\widehat{E}$ ottenuto prendendo l'unione disgiunta di tutti gli intorni $U_\alpha \times \mathbb{R}^k$; introduciamo una relazione d'equivalenza $\mathcal{R}$ in $\widehat{E}$ come segue

$$U_\alpha \times \mathbb{R}^k \ni (x, e)\, \mathcal{R}\, (y, f) \in U_\beta \times \mathbb{R}^k \Leftrightarrow x = y \text{ e } f = g_{\alpha\beta}(x)e$$

Sia E lo spazio quoziente dotato della topologia indotta e sia $\pi : E \to M$ la mappa che associa alla classe d'equivalenza di (x, e) il punto $x \in M$. Uno degli esercizi del *primo compito a casa* consiste nel dimostrare che (E, π, M) ha una naturale struttura di fibrato vettoriale.

Quindi si può dare una definizione alternativa di fibrato vettoriale, come una varietà M su cui siano dati un ricoprimento $\{U_\alpha\}$ e una collezione di mappe $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to GL(k, \mathbb{R})$ soddisfacenti le proprietà 1) e 2).

1.3. **Morfismi di fibrati.**

Definizione 2. Siano (E, π, M) e (F, π', M) due fibrati vettoriali (sulla stessa base). Una *mappa di fibrati* (o un *morfismo di fibrati*) da (E, π, M) a (F, π', M) è un'applicazione differenziabile $f : E \to F$ che manda omomorficamente fibre in fibre corrispondenti, ovvero tale che per ogni $m \in M$

1) $f(E_m) \subseteq F_m$
2) $f|_{E_m} : E_m \to F_m$ è un omomorfismo di spazi vettoriali.

Una mappa di fibrati $f : E \to F$ si dice *isomorfismo di fibrati* se è un diffeomorphismo e manda isomorficamente fibre in fibre corrispondenti, ovvero se per ogni $m \in M$

$$f|_{E_m} : E_m \to F_m$$

è un isomorfismo di spazi vettoriali. Un'analoga definizione vale nel caso topologico (richiederemo semplicemente che f sia continua e, nel caso di un isomorfismo, che sia un omeomorfismo).
Il seguente lemma è di facile dimostrazione (altro esercizio del *primo compito a casa*).

Lemma 1. Siano (E, π_E, M) e (F, π_F, M) due fibrati vettoriali. Sia $f : E \to F$ un morfismo di fibrati e supponiamo che $f|_{E_m}$ sia un isomorfismo per ogni $m \in M$. Verificare che f è allora un isomorfismo di fibrati (e cioè f è anche un diffeomorfismo).

1.4. **Esempi notevoli.**

Esempio 1. Sia M una varietà differenziabile. Per ogni punto $m \in M$ indichiamo con T_mM lo spazio tangente alla varietà M nel punto m. Poniamo

$$TM = \bigcup_{m \in M} T_mM$$

e definiamo $\pi : TM \to M$ ponendo $\pi(x) = m$ se $x \in T_mM$. Si verifica che (TM, π, M) è un fibrato vettoriale il cui rango è uguale alla dimensione di M. Tale fibrato vettoriale si dice *fibrato tangente* ad M. Per ulteriori informazioni sul fibrato tangente potete consultare [9].

Esempio 2. Sia $\mathbb{R}P^n$ lo spazio proiettivo di dimensione n. Ricordiamo che $\mathbb{R}P^n \cong S^n/\sim$, dove $\sim$ è la relazione che identifica i vettori $\underline{x}$ e $-\underline{x}$. Sappiamo che $\mathbb{R}P^n$ è una varietà differenziabile compatta. Consideriamo l'insieme

$$E_{1,n+1}(\mathbb{R}) = \left\{ ([\underline{x}], \underline{v}) \in \mathbb{R}P^n \times \mathbb{R}^{n+1} : \underline{v} = \lambda \underline{x} \right\}$$

e l'applicazione $\pi : E_{1,n+1}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}P^n$ definita da $\pi([\underline{x}], \underline{v}) = [\underline{x}]$. La terna $(E_{1,n+1}(\mathbb{R}), \pi, \mathbb{R}P^n)$ è un fibrato vettoriale di rango 1. Facciamo vedere come trovare banalizzazioni locali: per ogni

$[\underline{x}] \in \mathbb{R}P^n$, consideriamo U_1, un intorno di $\underline{x}$ in S^n ad intesezione vuota con la sua immagine tramite la mappa antipodale; l'aperto $U = U_1/\sim \subseteq \mathbb{R}P^n$ è un intorno banalizzante di $[\underline{x}]$ e il diffeomorfismo $\varphi_U : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}$ definito da $\varphi_U([\underline{x}], t\underline{x}) = ([\underline{x}], t)$ è una banalizzazione locale.
Analogamente la terna $(E_{1,n+1}(\mathbb{C}), \pi, \mathbb{C}P^n)$ è un fibrato vettoriale complesso olomorfo di rango 1.

Esempio 3. Sia $n > k$. Poniamo

$$G_k(\mathbb{R}^n) = \{\text{sottospazi vettoriali } k\text{−dimensionali di } \mathbb{R}^n\}.$$

Lo spazio $G_k(\mathbb{R}^n)$ ha una naturale topologia: sia $V_k(\mathbb{R}^n)$ l'aperto di $\mathbb{R}^n \times \times \cdots \times \mathbb{R}^n$ k-volte costituito dalle k-ple di vettori linearmente indipendenti. Esiste una suriezione $\pi : V_k(\mathbb{R}^n) \to G_k(\mathbb{R}^n)$

$$\pi(\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_k) = \mathrm{Span}(\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_k).$$

Dotiamo $G_k(\mathbb{R}^n)$ della topologia quoziente: U è aperto in $G_k(\mathbb{R}^n)$ se e solo se $\pi^{-1}(U)$ è aperto in $V_k(\mathbb{R}^n)$.
$G_k(\mathbb{R}^n)$ ha una naturale struttura di varietà differenziabile compatta di dimensione $n(n-k)$. Consideriamo l'insieme

$$E_k(\mathbb{R}^n) = \{(p, \underline{v}) \in G_k(\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n : \underline{v} \in p\}$$

e l'applicazione $\pi : E_k(\mathbb{R}^n) \to G_k(\mathbb{R}^n)$ definita da $\pi(p, \underline{v}) = p$. La terna $(E_k(\mathbb{R}^n), \pi, G_k(\mathbb{R}^n))$ è un fibrato vettoriale di rango k e C^∞. Le verifiche di tutte queste affermazioni costituiscono un interessante esercizio del *Primo compito a casa* (con suggerimenti). Si noti che per $k = 1$ riotteniamo l'esempio 2.
$G_k(\mathbb{R}^n)$ è detta la Grassmanniana dei k-piani in $\mathbb{R}^n$. $(E_k(\mathbb{R}^n), \pi, G_k(\mathbb{R}^n))$ è detto *fibrato universale* sulla Grassmanniana.

Esempio 4. Analogamente lo spazio $G_k(\mathbb{C}^n)$ è una varietà complessa compatta di dimensione complessa $n(n-k)$ e la terna $(E_n(\mathbb{C}^n), \pi, G_k(\mathbb{C}^n))$ è un fibrato vettoriale complesso olomorfo di rango k, detto *fibrato universale* su $G_k(\mathbb{C}^n)$.

Osservazioni.
1. Se $T \in GL(n, \mathbb{C})$ allora T induce un'applicazione $T_\sharp : G_k(\mathbb{C}^n) \to G_k(\mathbb{C}^n)$, che è un diffeomorfismo.
2. C'è un'applicazione naturale

$$\psi : G_k(\mathbb{C}^n) \to G_{n-k}(\mathbb{C}^n) \tag{1}$$

ottenuta mandando V in $V^\perp$. Quest'applicazione è un diffeomorfismo.
3. Alcuni autori definiscono la Grassmanniana $G_k(\mathbb{C}^n)$ come l'insieme dei sottospazi di *codimensione k* in $\mathbb{C}^n$. Le due definizioni sono compatibili tramite l'applicazione ψ in (1).

1.5. Sezioni di un fibrato.

Definizione 3. Sia (E, π, M) un fibrato vettoriale. Una *sezione* C^∞ del fibrato è un'appl. differenziabile $s : M \to E$ tale che $\pi \circ s = \mathrm{Id}|_M$ ovvero tale che per ogni $m \in M$ risulti $s(m) \in E_m = \pi^{-1}(m)$.

Denotiamo con $C^\infty(M, E)$ l'insieme delle sezioni C^∞ del fibrato (E, π, M). Si noti che, poiché ogni fibra è una spazio vettoriale, anche $C^\infty(M, E)$ è uno spazio vettoriale, le cui operazioni sono definite punto per punto. Notiamo anche che $C^\infty(M, E)$ ha una naturale struttura di $C^\infty(M)$-mudulo.

Proposizione 1. *Un fibrato vettoriale (E, π, M) di rango k è banale se e solo se esistono k sezioni C^∞ $s_1, \ldots, s_k$ linearmente indipendenti, ovvero tali che $s_1(m), \ldots, s_k(m)$ siano linearmente indipendenti per ogni $m \in M$.*

Dimostrazione.
$\boxed{\Rightarrow}$ Supponiamo (E, π, M) banale. Allora esiste una mappa di fibrati $\Phi : E \to M \times \mathbb{R}^k$ che induce un isomorfismo $\Phi : E_m \to \{m\} \times \mathbb{R}^k$ su ogni fibra. Sia $\Psi = \Phi^{-1} : M \times \mathbb{R}^k \to E$ e definiamo le applicazioni $s_i : M \to E$ ponendo $s_i(m) = \Psi(m, \underline{e}_i)$ (dove $\underline{e}_i$ è l'i -simo vettore canonico di $\mathbb{R}^k$). Le applicazioni $s_1, ..., s_k$ sono sezioni C^∞ e per costruzione sono linearmente indipendenti.
$\boxed{\Leftarrow}$ Supponiamo che esistano k sezioni C^∞ $s_1, ..., s_k$ linearmente indipendenti. Definiamo $\Psi : M \times \mathbb{R}^k \to E$ ponendo $\Psi(m, \underline{x}) = x^1 s_1(m) + ... + x^k s_k(m)$. L'applicazione Ψ è C^∞ e induce un isomorfismo su ogni fibra. Allora è facile vedere che Ψ è un diffeomorfismo. Quindi (E, π, M) è banale. $\square$

Osservazione. Notiamo che la dimostrazione stabilisce l'esistenza *locale* di k sezioni linearmente indipendenti su ogni aperto banalizzante. Si dice che queste sezioni costituiscono una **base locale**.

Esempio. Il fibrato $(E_{1,n+1}(\mathbb{R}), \pi, \mathbb{R}P^n)$ non è banale.

Dimostrazione. Basta far vedere che ogni $s \in C^\infty(\mathbb{R}P^n, E_{1,n+1}(\mathbb{R}))$ si annulla in un punto. Sia $s : \mathbb{R}P^n \to E_{1,n+1}(\mathbb{R})$ una sezione. Sia $p : S^n \to \mathbb{R}P^n$ la proiezione canonica. L'applicazione $q = s \circ p : S^n \to E_{1,n+1}(\mathbb{R})$ è tale che $q(\underline{x}) = ([\underline{x}], t(\underline{x})\underline{x})$, con $t \in C^\infty(S^n)$. Inoltre, poiché $q(-\underline{x}) = q(\underline{x})$, si deve avere $t(-\underline{x}) = -t(\underline{x})$. Allora, poiché S^n è connessa e in particolare $t \in C^0(S^n)$, deve esistere $\underline{x}_0 \in S_n$ tale che $t(\underline{x}_0) = 0$, ovvero tale che $s([\underline{x}_0]) = ([\underline{x}_0], \underline{0})$. $\square$

Possiamo dare anche una definizione alternativa di sezione. Sia (E, π, M) un fibrato vettoriale, con ricoprimento $\{U_\alpha\}$ e funzioni di transizione $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to GL(k, \mathbb{R})$. Una *sezione* C^∞ del fibrato è allora una collezione $\{s_\alpha\}$ di mappe $s_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}^k$ differenziabili tali che per ogni coppia di aperti U_α e U_β non disgiunti e per ogni $m \in U_\alpha \cap U_\beta$ risulti

$$s_\alpha(m) = g_{\alpha\beta}(m)\, s_\beta(m).$$

Le due definizioni sono equivalenti come ora mostreremo.
Sia s una sezione C^∞ (nel senso della prima definizione). Occorre verificare che esiste una collezione $\{s_\alpha\}$ di mappe che soddisfa le condizioni richieste nella seconda definizione. Sia $m \in M$ e siano U_α un intorno di m banalizzante e φ_α una banalizzazione locale su U_α. Se $\underline{e}_1, ..., \underline{e}_k$ sono i vettori della base canonica di $\mathbb{R}^n$, $\varphi_\alpha^{-1}(m, \underline{e}_1), ..., \varphi_\alpha^{-1}(m, \underline{e}_k)$ sono una base di E_m. Quindi esistono k numeri, che chiamo

$$s_\alpha^1(m), ..., s_\alpha^k(m)$$

tali che

$$s(m) = \sum_{i=1}^{k} s_\alpha^i(m)\, \varphi_\alpha^{-1}(m, \underline{e}_i).$$

Allora, considerando la restrizione di s a $U_\alpha \cap U_\beta$, si ha

$$s|_{U_\alpha \cap U_\beta} = \sum_{i=1}^{k} s_\alpha^i(m)\, \varphi_\alpha^{-1}(m, \underline{e}_i) = \sum_{i=1}^{k} s_\beta^i(m)\, \varphi_\beta^{-1}(m, \underline{e}_i).$$

Applicando φ_α al secondo e terzo membro, si ha

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k} s_\alpha^i(m)\,\underline{e}_i &= \sum_{i=1}^{k} s_\beta^i(m)\left(\varphi_\alpha\circ\varphi_\beta^{-1}\right)(m,\underline{e}_i) = \\ &= \sum_{i=1}^{k} s_\beta^i(m)\,g_{\alpha\beta}(m)\,(\underline{e}_i) = \\ &= \sum_{i=1}^{k} s_\beta^i(m)\,(g_{\alpha\beta}(m))_i^j\left(\underline{e}_j\right).\end{aligned}$$

Quindi

$$s_\alpha^k(m) = s_\beta^i(m)\,(g_{\alpha\beta}(m))_i^k\,,$$

Allora, ponendo $s_\alpha = \left(s_\alpha^1, ..., s_\alpha^k\right)^t$, si ottiene

$$s_\alpha = g_{\alpha\beta}\,s_\beta.$$

Quindi la collezione $\{s_\alpha\}$ soddisfa le condizioni richieste nella seconda definizione.
Il viceversa è chiaro: se sono date le $\{s_\alpha\}$ e le banalizzazioni, allora possiamo definire una sezione globale s.

2. **Lezione 2.**

2.1. **Operazioni sui fibrati.**

Dati 2 fibrati su M (E, π^E, M), (F, π^F, M) si possono definire i fibrati

$$E^*\,,\quad E\otimes F\,,\quad E\oplus F\,,\quad \Lambda^n E\,,\quad \mathrm{Hom}(E,F)\equiv E\otimes F^*$$

a partire dalle corrispondenti operazioni sulle fibre. Ad esempio, poniamo

$$E\oplus F := \cup_{m\in M} E_m \oplus F_m\,;$$

rimane allora definito il fibrato $(E\oplus F, \pi^{E\oplus F}, M)$ che per costruzione ha come fibre $(\pi^{E\oplus F})^{-1}(m) = E_m \oplus F_m$. La banalità locale è ereditata da quella di E ed F: per ipotesi $\forall m \in M$ esistono aperti U^E , U^F e diffeomorfismi locali

$$\phi^E : (\pi^E)^{-1}(U^E) \to U^E \times \mathbb{R}^k$$
$$\phi^F : (\pi^F)^{-1}(U^F) \to U^F \times \mathbb{R}^n$$

con cui si costruisce il diffeomorfismo

$$\phi^{E\oplus F} : (\pi^{E\oplus F})^{-1}(U^E\cap U^F) \to U^E\cap U^F \times \mathbb{R}^{k+n}$$

che dà la banalizzazione di $E\oplus F$. Lascio a voi i dettagli.

Osservazione 1. Consideriamo un morfismo di fibrati $f : E \to F$. È allora chiaro che f definise in maniera naturale una sezione $s_f \in C^\infty(M, \mathrm{Hom}(E, F))$: basterà porre $s_f(m) := f|_{E_m}$. Supponiamo che $m_0 \in M$ sia tale che $s_f(m_0) \in \mathrm{Iso}(E_{m_0}, F_{m_0})$, allora esiste un intorno aperto di m_0, U, tale che $s_f(m) \in \mathrm{Iso}(E_m, F_m)$ $\forall m \in U$ (per la dimostrazione basterà considerare un intorno banalizzante di m_0 ed utilizzare il fatto che $GL(k,\mathbb{R})$ è aperto in $M_{k\times k}(\mathbb{R})$).

2.2. **Fibrato indotto da un'applicazione (pull-back).**

Sia $f : N \to M$ un'applicazione tra le varietà differenziabili M ed N e sia (E, π, M) un fibrato su M. Si consideri l'insieme

$$f^*E = \{(n, v) \in N \times E | f(n) = \pi(v)\}.$$

Esistono due applicazioni naturali $\hat{f}$ e π^{ind}:

$$\hat{f} : f^*E \to E \text{ con } \hat{f}(n, v) = v$$
$$\pi^{ind} : f^*E \to N \text{ con } \pi^{ind}(n, v) = n$$

(f^*E, π^{ind}, N) ha una naturale struttura di fibrato vettoriale; esso è, per definizione, il *fibrato indotto da f su N*. La fibra di f^*E su n è $E_{f(n)}$, come segue subito dalla definizione.
Facciamo vedere la banalità locale:
sia U un intorno banalizzante di M; $f^{-1}(U)$ è allora un aperto di N e si ponga $f^{-1}(U) = \tilde{U}$. Sia

$$\psi : U \times \mathbb{R}^k \to \pi^{-1}(U)$$

una banalizzazione di $\pi^{-1}(U)$. Si definisca:

$$\tilde{\psi} : \tilde{U} \times \mathbb{R}^k \to (\pi^{ind})^{-1}(\tilde{U})$$

con

$$\tilde{\psi}(n, v) = (n, \psi(f(n), v))$$

Si ha $\pi(\psi(f(n), v)) = f(n)$ come deve essere ed è facile verificare che $\tilde{\psi}$ è un diffeomorfismo, con inversa $\tilde{\psi}^{-1} : (\pi^{ind})^{-1}(\tilde{U}) \to \tilde{U} \times \mathbb{R}^k$ definita da $\tilde{\psi}^{-1}(n, w) = (n, \hat{w})$ con $\hat{w} = \psi^{-1}(w)$.

Osservazioni.
1. Se (E, π, M) è banale e $f : N \to M$ è un morfismo di fibrati allora il fibrato indotto su N , f^*E, è anche banale.
2. Se $g : Z \to Y$ e $f : Y \to X$ sono due mappe C^∞, allora $(f \circ g)^*E$ è isomorfo a $g^*(f^*E)$: $(f \circ g)^*E \cong g^*(f^*E)$: basterà mandare $(z, e) \in (f \circ g)^*E$ in $(z, (g(z), e)) \in g^*(f^*E)$.
3. Se $i : Y \hookrightarrow X$ è un'inclusione allora $E|_Y \cong i^*E$: basterà mandare $e \in E|_U$ in $(\pi(e), e)$.
4. Si può dare una definizione di fibrato indotto utilizzando le funzioni di transizione: se $E = \{(U_\alpha, g_{\alpha\beta})\}$, si ponga

$$f^*E = \{(f^{-1}(U_\alpha), g_{\alpha\beta} \circ f)\}.$$

5. Se $f : N \to M$ è una mappa C^∞ allora otteniamo una mappa lineare indotta $f^* : C^\infty(M; E) \to C^\infty(N, f^*E)$ associando a s la sezione f^*s, con $(f^*s)(m) := s(f(m))$.

2.3. **Il semigruppo** $\mathrm{Vect}(X)$**. Teorema di omotopia.**

In questa sottosezione lavoreremo nella categoria degli spazi topologici e funzioni continue.

Definizione 4. Sia X uno spazio topologico compatto di Hausdorff [1]. $\mathrm{Vect}_k(X)$ è per definizione l'insieme delle classi di isomorfismo di fibrati vettoriali *complessi* di rango k. Analogamente si definisce $\mathrm{Vect}_k^{\mathbb{R}}(X)$, le classi di isomorfismo di fibrati vettoriali *reali* di rango k. Poniamo $\mathrm{Vect}(X) = \cup_k \mathrm{Vect}_k(X)$.

È importante notare che $\mathrm{Vect}(X)$ è un *semigruppo* abeliano rispetto all'operazione $\oplus$, con elemento neutro uguale al fibrato banale $X \times \{0\}$. Notiamo anche che se $f : Y \to X$ è continua allora l'operazione di pull-back induce un morfismo di semigruppi $f^* : \mathrm{Vect}(X) \to \mathrm{Vect}(Y)$. Abbiamo quindi definito un funtore $\mathrm{Vect}(\quad)$ dalla categoria degli spazi topologici compatti e applicazioni continue alla categoria dei semigruppi abeliani e morfismi di semigruppi. Questo funtore risulta essere *omotopico*: questa fatto fondamentale è conseguenza del seguente teorema

Teorema 1. *(di omotopia) Sia Y compatto e siano f_0, f_1, due applicazioni continue $Y \to X$. Sia $(E \to X)$ un fibrato vettoriale su X. Se f_0 è omotopa a f_1, $f_0 \sim f_1$, allora f_0^*E è isomorfo a f_1^*E.*

Il teorema vale nell'ipotesi più generale che Y sia paracompatto.
Dimostrazione.
Sia $\{f_t\}_{t\in[0,1]}$ l'omotopia fra f_0 e f_1. Basta dimostrare che la classe di isomorfismo di f_t^*E è localmente costante in t.
In generale sia $H \to Y \times [0, 1]$ un fibrato; utilizzeremo le notazioni

$$Y \times \{\tau\} := Y_\tau\,, \quad H|_{Y\times\{\tau\}} := H_\tau$$

Sia $s_\tau \in C(Y_\tau, H_\tau)$: allora esiste un'estensione $s \in C(Y \times [0, 1], H)$ tale che $s|_{Y_\tau} = s_\tau$. Dimostriamo questo fatto: sia $x \in Y_\tau$ ed U un intorno di x che sia banalizzante per H; la sezione s_τ ristretta a $Y_\tau \cap U$ può essere considerata come una funzione a valori vettoriali definita su un chiuso di uno spazio topologico normale; per il teorema di Tietze esiste un'estensione $t_U \in C(U, H|_U)$ di s_τ ristretta a $Y_\tau \cap U$. Dato che Y è compatto esiste un ricoprimento finito di Y_τ, $\{U_1, \ldots, U_m\}$ con U_j aperto, ed estensioni t_j di s_τ ristretta a $Y_\tau \cap U_j$. Sia $\{\phi_j\}$ una partizione dell'unità subordinata al ricoprimento $\{U_1, \ldots, U_m\}$. È chiaro che $\phi_j t_j$ ha una naturale estensione ad una sezione in $C(Y \times [0, 1, H)$: concludiamo che $\sum_j \phi_j t_j$ è un'estensione cercata.
La stessa identica dimostrazione stabilisce il seguente

[1] **tutti i nostri spazi topologici sono di Hausdorff se non specificato diversamente**

Lemma 2. (di estensione) Sia X uno spazio topologico compatto di Hausdorff e $W \subseteq X$ un sottoinsieme chiuso. Sia $(E \to X)$ un fibrato vettoriale. Allora ogni sezione $s_W : W \to E|_W$ può essere estesa ad una sezione $s \in C(X, E)$.

La dimostrazione dipende solo dall'esistenza di una partizione dell'unità ed infatti il Lemma vale nell'ipotesi più generale che X sia paracompatto di Hausdorff.
Abbiamo ora bisogno di un altro risultato preliminare:

Lemma 3. Siano E ed F due fibrati su X, X compatto. Sia $W \subseteq X$ un chiuso e supponiamo che esista un isomorfismo di fibrati $\phi : E|_W \to F|_W$. Allora esiste un aperto $U \supseteq W$ ed un morfismo di fibrati $\Phi : E \to F$ che estende ϕ ed è un isomorfismo su U.

Dimostrazione. Per l'osservazione 1, l'isomorfismo ϕ definisce in maniera naturale una sezione che chiameremo ancora ϕ del fibrato $\mathrm{Hom}(E, F)$ ristretto a W. Per il Lemma precedente esiste un'estensione Φ di ϕ che definisce quindi un morfismo di fibrati $E \to F$ su tuto X. Dato che $\Phi|_W = \phi$ è un isomorfismo, segue esiste un aperto U contente W tale che $\Phi|_U$ è un isomorfismo.Il lemma è dimostrato.
Possiamo ora concludere la dimostrazione del teorema. Sia $f : Y \times [0,1] \to X$ l'omotopia fra f_0 e f_1, quindi $f(y, \tau) = f_\tau$. Sia $\pi : Y \times [0,1] \to Y$ la proiezione sul primo fattore. Fissiamo $\tau \in [0,1]$ Per le proprietà funtoriali del pull-back è chiaro che i fibrati f^*E e $\pi^* f_\tau^*(E)$ sono isomorfi quando ristretti a Y_τ. Per il lemma appena enunciato sappiamo che questo isomorfismo si estende ad un intorno aperto di Y_τ: quindi esiste un $\epsilon > 0$ tale che f^*E e $\pi^* f_\tau^*(E)$ sono isomorfi se ristretti a $Y \times (\tau - \epsilon, \tau + \epsilon)$ e ciò è sufficiente per concludere.

Corollario 1. *Se X ed Y sono due spazi compatti ed $f : Y \to X$ è un'equivalenza omotopica* [2] *allora $f^* : \mathrm{Vect}(X) \to \mathrm{Vect}(Y)$ è un isomorfismo di semigruppi*

Corollario 2. *Se X è contraibile* [3] *allora ogni fibrato su X è banale ed esiste quindi un isomorfismo di semigruppi* $\mathrm{Vect}(X) \cong \mathbb{N}$.

2.4. **Sottofibrato.**

Sia (E, π, M) un fibrato vettoriale. Sia F una sottovarietà di E e supponiamo che $F \cap E_m$, con $E_m := \pi^{-1}(m)$, sia un sottospazio vettoriale di E_m. La terna $(F, \pi|_F, M)$ è per definizione un sottofibrato di E. Dalla condizione che F è una sottovarietà segue che $\forall x \in M\ \exists\, U$, intorno di x, e banalizzazioni locali di E :

$$\phi_U : E_U := \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^k$$

tali che la loro restrizione ad F fornisce banalizzazioni locali di F:

$$\phi_U|_F : F_U \to U \times \mathbb{R}^\ell \subset U \times \mathbb{R}^k.$$

In termini delle funzioni di transizione: possiamo scrivere in una tale banalizzazione

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} h_{\alpha\beta} & k_{\alpha\beta} \\ 0 & j_{\alpha\beta} \end{pmatrix}$$

e le $h_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to GL(l, \mathbb{R})$ sono le funzioni di transizione di (F, π, M).

Con la stessa tecnica si può costruire il fibrato quoziente $(E/F, \pi, M)$ le cui funzioni di transizione sono le $j_{\alpha\beta}$.

[2] esiste $g : X \to Y$ tale che $f \circ g \sim \mathrm{id}_X$ e $g \circ f \sim \mathrm{id}_Y$
[3] e cioè X è omotopicamente equivalente ad un punto

2.5. **Metrica su un fibrato.**

Dato un fibrato reale (E, π, M), si definisce una metrica g come una sezione del fibrato $E^* \otimes E^*$, $g \in C^\infty(M, E^* \otimes E^*)$, tale che $g(m)$, forma bilineare su $E \times E$, sia *simmetrica* $g(m)(u, v) = g(m)(v, u)$ e definita positiva:

$$g(m)(v, v) \geq 0 \ \forall v \in E_m$$

Inoltre g si dice metrica riemanniana su M se $E = TM$.

2.6. **Matrice locale della metrica rispetto ad una base locale.**

Tramite le banalizzazioni locali abbiamo $\forall \ U_\alpha$, intorno banalizzante, una base locale di sezioni (già visto). Infatti se $\psi_\alpha : U_\alpha \times \mathbb{R}^k \to \pi^{-1}(U_\alpha)$ è una banalizzazione locale, fissata una base e_i in $\mathbb{R}^k$, si ha una base locale di sezioni definita da:

$$s_i^\alpha(m) := \psi_\alpha(m, e_i) \in C^\infty(U_\alpha, E)$$

(Attenzione: indici in basso, queste sono **sezioni** del fibrato $E|_{U_\alpha}$...)
Se u, v sono sezioni di $\pi^{-1}(U_\alpha)$, allora $u = \lambda^i s_i^\alpha$ e $v = \mu^i s_i^\alpha$, dove si è utilizzata la convenzione della somma su indici ripetuti e:

$$g(u, v) = \lambda^i \mu^j g(s_i^\alpha, s_j^\alpha)$$

Dunque $\forall m \in U_\alpha$, $g(s_i^\alpha, s_j^\alpha)(m) := g_{ij}(\alpha)(m)$ è la matrice locale della metrica rispetto alla base locale $\{s_i^\alpha\}$ calcolata in m.
Sia $\{\sigma_i^\alpha\}$ un'altra base locale con

$$\sigma_i^\alpha = G_i^j s_j^\alpha$$

allora la matrice locale della metrica rispetto a σ_j^α, e cioè $g(\sigma_i^\alpha, \sigma_j^\alpha)$, è uguale a $G^T g \, G$. In particolare, si considerino due intorni banalizzanti U_α, U_β ed in $U_\alpha \cap U_\beta$ le basi $\{s_i^\alpha\}$, $\{s_i^\beta\}$ definite come sopra utilizzando le due banalizzazioni, allora $s_i^\beta = (g_{\alpha\beta})_i^j s_j^\alpha$, dove vi ricordo ancora una volta che queste sono sezioni.
Se $g(\alpha)(m)$ è la matrice della metrica $\forall m \in U_\alpha$, si ha quindi :

$$g(\beta) = g_{\alpha\beta}^T \, g(\alpha) \, g_{\alpha\beta}$$

Quest'ultima relazione può essere utilizzata per definire la metrica mediante le funzioni di transizione $g_{\alpha\beta}$.

Se (E, π, M) è un fibrato complesso analogamente si definisce la nozione di metrica hermitiana su (E, π, M).

2.7. **Fibrato normale.**

Sia F un sottofibrato di E dotato di metrica g, allora è ben definito il sottofibrato:

$$F^\perp = \bigcup_{m \in M} F_m^\perp$$

Valgono le seguenti proprietà:

- $E/F \simeq F^\perp$
- $F \oplus F^\perp \simeq E$
- Se $M \subseteq \mathbb{R}^n$ è una sottovarietà e si considera il sottofibrato $TM \subseteq M \times \mathbb{R}^n = T\mathbb{R}^n|_M$, allora $N_M \equiv (TM)^\perp$ è il fibrato normale ad M.
- Analogamente se $M \subseteq (X, g)$ è una sottovarietà di una varietà riemanniana X dotata di metrica g, allora $(TM)^\perp \equiv N_{M/X}$, l'ortogonale di TM in $TX|_M$, è il fibrato normale ad M in X.

2.8. **Complementi: il teorema di classificazione.**

Ci si può giustamente domandare perché i fibrati $(E_k(\mathbb{R}^n), \pi, G_k(\mathbb{R}^n))$ sono detti *universali.* Vale il seguente notevole

Teorema 2. *Sia X uno spazio topologico compatto e sia (E, π, X) un fibrato vettoriale complesso di rango k. Allora esiste $m \geq k$ ed un'applicazione continua $f : X \to G_k(\mathbb{C}^m)$ tale che $f^*E_k(\mathbb{C}^m) \simeq E$. Se (E, π, X) ammette n intorni banalizzanti, allora possiamo scegliere $m = nk$.*

Detto a parole, ogni fibrato vettoriale è il pull-back tramite un'applicazione continua di un fibrato universale su una Grassmanniana. L'applicazione $f : X \to G_k(\mathbb{C}^m)$ che viene costruita nel corso della dimostrazione del teorema 2 è detta *applicazione classificante* per E.
Come sono collegate due applicazioni classificanti ? Prima di dare la risposta facciamo un'osservazione preliminare. Se consideriamo l'inclusione naturale di $\mathbb{C}^n$ in $\mathbb{C}^{n+j}$, $(z_1, \ldots, z_n) \to (z_1, \ldots, z_n, 0, \ldots, 0)$, allora rimane definita in maniera naturale una mappa $j_{n,n+j} : G_k(\mathbb{C}^n) \to G_k(\mathbb{C}^{n+j})$ ed è chiaro che $j^*_{n,n+j}(E_k(\mathbb{C}^{n+j})) \simeq E_k(\mathbb{C}^n)$.

Teorema 3. *Sia X uno spazio compatto e siano $f_0 : X \to G_k(\mathbb{C}^m)$, $f_1 : X \to G_k(\mathbb{C}^\ell)$ due applicazioni continue.*
Supponiamo che $f_0^*E_k(\mathbb{C}^m) \simeq f_1^*E_k(\mathbb{C}^\ell)$; allora $j_{m,m+\ell} \circ f_0 : X \to G_k(\mathbb{C}^{m+\ell})$ è omotopa a $j_{\ell,m+\ell} \circ f_1 : X \to G_k(\mathbb{C}^{m+\ell})$:

$$j_{m,m+\ell} \circ f_0 \sim j_{\ell,m+\ell} \circ f_1 \tag{2}$$

Corollario 3. *(Teorema di classificazione) Supponiamo che X ammetta un ricoprimento costituito da n intorni contraibili (ad esempio X è una varietà differenziabile compatta). Allora esiste una biezione*

$$\mathrm{Vect}_k(X) \leftrightarrow [X, G_k(\mathbb{C}^{2nk})] \tag{3}$$

con $[Z, W]$ che denota le classi di omotopia di applicazioni continue da Z a W.

Il corollario è una conseguenza diretta dei due teoremi: ogni fibrato su X ammette gli intorni di cui nell'enunciato come intorni banalizzanti (perché abbiamo visto che un fibrato su uno spazio contraibile è banale) . Sia $f \in [X, G_k(\mathbb{C}^{2nk})]$; allora posssiamo associare ad f la classe di isomorfismo del fibrato $f^*E_k(\mathbb{C}^{2nk})$. L'applicazione è ben definita per il Teorema di omotopia. L'inversa di quest'applicazione si ottiene assegnando ad un fibrato E l'applicazione classificante $j_{nk,2nk} \circ f$, con $f : X \to G_k(\mathbb{C}^{nk})$ l'applicazione classificante per E di cui nel teorema 2. Per il teorema 3 quest'applicazione è ben definita ed è l'inversa dell'applicazione $[X, G_k(\mathbb{C}^{2nk})] \ni f \to f^*E_k(\mathbb{C}^{2nk})$.

Per una varietà compatta X che ammetta un ricoprimento di n-intorni contraibili, la Grassmanniana $G_k(\mathbb{C}^{2nk})$ è detto uno **spazio classificante**.

3. **Lezione 3.**

3.1. **Connessioni su un fibrato.**

Sia X un campo di vettori su M e cioè un elemento di $C^\infty(M,TM)$. Data una sezione $s \in C^\infty(M,E)$, vogliamo derivare s lungo X. Se $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ è una collezione di intorni banalizzanti e se $s \in C^\infty(M,E)$ corrisponde alla collezione $\{s^\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}^k\}$ con $s^\beta = g_{\beta\alpha}s^\alpha$ allora potremmo considerare il vettore di $1-$forme $(ds^{\alpha,1},..,ds^{\alpha,k})$ e porre la derivata di s lungo X pari a

$$(ds^{\alpha,1}(X),..,ds^{\alpha,k}(X))$$

Tale procedimento, però, non si globalizza: cambiando base si avrebbe

$$ds^\beta = d(g_{\beta\alpha}s^\alpha) = dg_{\beta\alpha}s^\alpha + g_{\beta\alpha}ds^\alpha$$

dunque se $dg_{\beta\alpha} \neq 0$ le ds^β non si trasformano mediante le sole funzioni di transizione ma anche attraverso $dg_{\beta\alpha}$ ed s^α. Ci domandiamo quindi come poter derivare una sezione lungo un campo di vettori. La nozione di *connessione* è introdotta proprio a questo scopo.

Definizione 5. Una connessione su un fibrato (E,π,M) è un operatore lineare

$$\nabla : C^\infty(M,E) \to C^\infty(M,T^*M\otimes E)$$

verificante la regola di Leibnitz: $\forall f \in C^\infty(M)$ e $\forall\ s \in C^\infty(M,E)$

$$\nabla(fs) = df\otimes s + f\nabla s$$

Osservazioni.
1. Utilizzando la dualità fra T^*M e TM è chiaro che possiamo applicare un elemento di $C^\infty(M,T^*M\otimes E)$ ad un elemento di $C^\infty(M,TM)$ e ottenere una sezione in $C^\infty(M,E)$. Ponendo quindi $\nabla s(X) := \nabla_X s$ si ha un operatore

$$\nabla_X : C^\infty(M,E) \to C^\infty(M,E)$$

detto *derivata covariante di $s \in C^\infty(M,E)$ lungo $X \in C^\infty(M,TM)$.* Si noti che $\forall f \in C^\infty(M)$, $\forall X_1,X_2 \in C^\infty(M,TM)$ si ha

$$\nabla_{fX}(s) = \nabla s(fX) = f\nabla s(X) = f\nabla_X s \tag{4}$$

$$\nabla_{X_1+X_2}(s) = \nabla(s)(X_1+X_2) = \nabla_{X_1}(s) + \nabla_{X_2}(s) \tag{5}$$

essendo ∇s lineare su TM. Inoltre $\forall s_1,s_2 \in C^\infty(M,E)$

$$\nabla_X(s_1+s_2) = \nabla_X(s_1) + \nabla_X(s_2) \tag{6}$$

$$\nabla_X(fs) = \nabla(fs)(X) = (df\otimes s)(X) + f\nabla s(X) = X(f)s + f\nabla_X s. \tag{7}$$

La definizione di connessione è data in alcuni testi richiedento che $\forall X \in C^\infty(M,TM)$ sia definito un operatore $\nabla_X : C^\infty(M,E) \to C^\infty(M,E)$ verificante l'uguaglianza del primo e dell'ultimo membro delle (4), (5), (6), (7).

2. L'operatore ∇ è *locale*: se $s|U \equiv 0$ allora $\nabla(s)|U$ è anche la sezione nulla su U. Sia infatti $m \in U$ e sia f una funzione identicamente uguale ad uno in un intorno di m e uguale a zero sul complementare di U. È chiaro che $fs \equiv 0$; d'altra parte $\nabla(fs) = df\otimes s + f\nabla(s)$ da cui segue che $\nabla(s)(m) = 0$ come si voleva.
In particolare, ha senso considerare $\nabla|_U$, la restrizione di ∇ ad un aperto $U \subset M$: utilizzeremo spesso il simbolo ∇ anziché $\nabla|_U$, a meno che ciò generi confusione.

3. Sia $T : C^\infty(M,E) \to C^\infty(M,E)$ un operatore lineare e tale che $T(fs) = fT(s)$ se $f \in C^\infty(M)$ e $s \in C^\infty(M,E)$. Si può definire in maniera naturale un operatore $\hat{T} \in C^\infty(M,\mathrm{End}(E))$. Infatti

sia $e_m \in E_m$, allora esiste $e \in C^\infty(M,E)$ tale che $e(m) = e_m$ e si ponga $\hat{T}(m)(e_m) := T(e)(m)$. Per l'ipotesi la definizione è ben posta ed è facile vedere che $\hat{T}_m$ è effettivamente un'applicazione lineare da E_m a E_m. Viceversa è ovvio che dato un $\hat{T} \in C^\infty(M, \mathrm{End}(E))$ si possa definire $T : C^\infty(M,E) \to C^\infty(M,E)$ tramite $T(e)(m) := \hat{T}(e(m))$. Dunque vi è una corrispondenza biunivoca $T \leftrightarrow \hat{T}$ ed in seguito non faremo distinzione fra T e $\hat{T}$.
Analogamente, un operatore $T : C^\infty(M,E) \to C^\infty(M, T^*M \otimes E)$ tale che $T(fs) = fT(s)$ definisce in maniera naturale una sezione di $C^\infty(M, T^*M \otimes \mathrm{End}(E))$ e similmente un operatore $T : C^\infty(M,E) \to C^\infty(M, \Lambda^2(T^*M) \otimes E)$ tale che $T(fs) = fT(s)$ definisce un elemento $C^\infty(M, \Lambda^2(T^*M) \otimes \mathrm{End}(E))$

4. Siano ∇ e ∇' due connessioni, allora $(\nabla - \nabla')(fs) = \nabla(fs) - \nabla'(fs) = df \otimes s + f\nabla s - df \otimes s + f\nabla' s = f(\nabla - \nabla')(s)$ ossia $(\nabla - \nabla')$ soddisfa la proprietà sopra enunciata per l'operatore T e dunque si può scrivere:

$$\nabla = \nabla' + \omega$$

ove $\omega \in C^\infty(M, T^*M \otimes \mathrm{End}(E))$ (dove stiamo quindi identificando gli operatori T con $\hat{T}$).

3.2. **Descrizione locale delle connessioni.**

Sia U un aperto banalizzante ed e_i una base locale di $\pi^{-1}(U)$. Allora $\nabla e_i \in C^\infty(U, \pi^{-1}(U) \otimes T^*U)$ e dunque

$$\nabla e_i = \omega_i^j \otimes e_j$$

con $\omega_i^j \in C^\infty(U, T^*U) \equiv \Omega^1(U)$. La (ω_i^j) è per definizione la matrice locale di 1-forme associata alla connessione ∇ nella base locale scelta. Data $s \in C^\infty(U, \pi^{-1}(U))$ si ha $s = s^i e_i$ e quindi $\nabla s = \nabla(s^i e_i) = ds^i \otimes e_i + s^i \nabla e_i = ds^k \otimes e_k + s^i \omega_i^k \otimes e_k = (ds^k + s^i \omega_i^k) \otimes e_k$. In forma compatta $\nabla s = ds + \omega s$ ovvero

$$\nabla = d + \omega \quad \text{su} \quad U \quad \text{aperto banalizzante rispetto alla base locale } \{e_i\}$$

Si ha allora, per $s \in C^\infty(M,E)$, $X \in C^\infty(M, TM)$,

$$\nabla_X s|_U = (ds^j + \omega_i^j s^i)(X) e_j, \tag{8}$$

e se su U, $X = X^l \frac{\partial}{\partial x^l}$,

$$\nabla_X s|_U = \left(\frac{\partial s^j}{\partial x^l} X^l + s^i \Gamma_{il}^j X^l \right) e_j, \tag{9}$$

dove $\Gamma_{il}^j \in C^\infty(U)$, sono le componenti di ω_i^j,

$$\omega_i^j = \Gamma_{il}^j dx^l. \tag{10}$$

Da queste formule si vede che fissato $m \in M$, $\nabla_X s(m)$ dipende dalle componenti $X^l(m)$, di $X(m)$, ma non dalle loro derivate. Dato allora un vettore $X_m \in T_m M$, si potrá definire $\nabla_{X_m} s \in E_m$ come $\nabla_{\tilde{X}} s(m)$, con $\tilde{X}$ estensione arbitraria di X_m ad M, non dipendendo, per quanto appena osservato, il valore di questo dall'estensione scelta.

3.3. **Esistenza di una connessione.**

Si noti che se ∇ e ∇' sono due connessioni e $g \in C^\infty(M)$ allora $g\nabla + (1-g)\nabla'$ è ancora una connessione. Utilizzando un ricoprimento $\{U_\alpha\}$ banalizzante, una partizione subordinata ad esso e le ovvie connessioni banali (e cioè date dai differenziali) su $\pi^{-1}(U_\alpha)$, si ottiene una connessione su tutto E.

3.4. Cambiamento di base locale.

Sia $\tilde{e}_i = G_i^j e_j$ allora si ha:

$$\begin{aligned}\nabla(\tilde{e}_i) &= \nabla(G_i^j e_j) = dG_i^j \otimes e_j + G_i^j \nabla e_j \\ &= dG_i^j \otimes e_j + G_i^j \omega_j^k \otimes e_k = (dG_i^k + G_i^j \omega_j^k) \otimes e_k\end{aligned}$$

Il primo membro a sinistra è anche uguale a $\nabla(\tilde{e}_i) = \tilde{\omega}_i^j \otimes \tilde{e}_j = \tilde{\omega}_i^j G_j^m \otimes e_m$ ed essendo $\{e_m\}$ una base si ha:

$$\tilde{\omega}_i^j G_j^k = dG_i^k + G_i^j \omega_j^k$$

ossia in forma compatta:

$$\tilde{\omega} = G^{-1} dG + G^{-1} \omega G$$

In particolare in $U_\alpha \cap U_\beta$ si ha:

$$\nabla = d + \omega_\alpha \text{ rispetto a } \{s_i^\alpha\}$$

$$\nabla = d + \omega_\beta \text{ rispetto a } \{s_i^\beta\}$$

e $s_i^\beta = (g_{\alpha\beta})_i^j s_j^\alpha$, dunque:

$$\omega_\beta = (g_{\alpha\beta})^{-1} dg_{\alpha\beta} + (g_{\alpha\beta})^{-1} \omega_\alpha g_{\alpha\beta} \tag{11}$$

formula che lega le matrici locali di 1-forme della connesione in due intorni banalizzanti differenti. Potremmo come al solito prendere spunto dalla (11) per dare una definizione alternativa di connessione.

3.5. Trasporto parallelo.

Sia (E, π, M) un fibrato di rango k. Sia $\gamma : I \to M$, $I \subseteq \mathbb{R}$ aperto, una curva C^∞.

Definizione 6. Una *sezione di E lungo γ* è una funzione C^∞ $s : I \to E$, tale che $s(t) \in E_{\gamma(t)}$ per ogni $t \in I$. Equivalentemente, una sezione di E lungo γ è un elemento di $C^\infty(I, \gamma^* E)$ (infatti $(\gamma^* E)_t = E_{\gamma(t)}$).

Sia, in generale, $f : N \to M$ un'applicazione C^∞ e consideriamo il fibrato indotto $f^* E \to N$. Si è visto allora che, se $\{U_\alpha\}$ è un atlante banalizzante per E e $\{g_{\alpha\beta}\}$ sono le relative funzioni di transizione, si ottiene un atlante banalizzante per $f^* E$, con relative funzioni di transizione, considerando $\{f^{-1}(U_\alpha)\}$ e $\{g_{\alpha\beta} \circ f\}$. Se allora ∇^E è una connessione su E e $\{\omega_\alpha\}$ è la famiglia di matrici di 1-forme determinata da ∇^E su $\{U_\alpha\}$, consideriamo le matrici di 1-forme $\omega_\alpha^* := f^* \omega_\alpha := (f^*(\omega_\alpha)_i^j)_{j,i=1,\dots,k}$ e verifichiamo che definiscono una connessione su $f^* E$: si ha, su $f^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)$:

$$\begin{aligned}\omega_\beta^* &= f^* \left(g_{\alpha\beta}^{-1} dg_{\alpha\beta} + g_{\alpha\beta}^{-1} \omega_\alpha g_{\alpha\beta} \right) \\ &= f^*(g_{\alpha\beta}^{-1}) f^* dg_{\alpha\beta} + f^*(g_{\alpha\beta}^{-1}) f^* \omega_\alpha f^* g_{\alpha\beta} \\ &= (g_{\alpha\beta} \circ f)^{-1} d(g_{\alpha\beta} \circ f) + (g_{\alpha\beta} \circ f)^{-1} \omega_\alpha^* (g_{\alpha\beta} \circ f)\end{aligned}$$

avendo usato il fatto che il pull-back commuta con il differenziale, e che, essendo $g_{\alpha\beta}$ una funzione (a valori matrici), $f^* g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} \circ f$. Ha dunque senso la seguente

Definizione 7. Siano E, f e ∇^E come sopra. Le matrici di 1-forme $\{\omega_\alpha^*\}$ considerate sopra definiscono una connessione $\nabla^{f^* E}$ su $f^* E$, detta *connessione indotta da ∇^E tramite f*.

Consideriamo il fibrato γ^*E su I indotto dalla curva $\gamma : I \to M$; Se allora ∇^{γ^*E} è la connessione indotta su γ^*E, definiremo una derivazione delle sezioni lungo γ ponendo $\nabla_{\dot\gamma} := \nabla^{\gamma^*E}_{\frac{d}{dt}}$. Osserviamo che poiché ogni fibrato vettoriale su un intervallo di $\mathbb{R}$ è banale, si avrà, globalmente, $\nabla^{\gamma^*E} = d+\varphi$, con $\varphi = (\varphi^j_i dt)_{j,i=1,\dots,k}$, rispetto ad una base globale di sezioni di γ^*E. Allora per ogni fissato $s_0 \in E_{\gamma(t_0)}$, $t_0 \in I$, esisterà un'unica sezione $s_{s_0} \in C^\infty(I, \gamma^*E)$ che sia soluzione (globale, perché l'equazione è lineare), del problema di Cauchy

$$
\begin{aligned}
&(\nabla_{\dot\gamma} s)^j = \frac{ds^j}{dt} + \varphi^j_i s^i = 0, \qquad j = 1, \dots, k, \\
&s(t_0) = s_0.
\end{aligned}
\tag{12}
$$

Rimane così definita, per ogni curva $\gamma : I \to M$, un'applicazione

$$\tau^\gamma_{t_0,t} : s_0 \in E_{\gamma(t_0)} \to s_{s_0}(t) \in E_{\gamma(t)},$$

evidentemente lineare ed iniettiva (e quindi un isomorfismo), detta **trasporto parallelo lungo** γ. La possibilità di *connettere* fibre distanti è proprio all'origine dell'uso della parola *connessione.*

Risulta inoltre che è possibile recuperare la connessione a partire dal trasporto parallelo: si può infatti dimostrare [8] che per ogni sezione s di E ed ogni campo tangente X ad M vale

$$(\nabla_X s)(m) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left[(\tau^\gamma_{0,t})^{-1} s(\gamma(t)) - s(m)\right],$$

dove γ è una qualunque curva su M tale che $\gamma(0) = m$ e $\dot\gamma(0) = X_m$.

3.6. **Esempi.**

1. Sia M una sottovarietà differenziabile di $\mathbb{R}^N$. Sul fibrato banale $T\mathbb{R}^N|_M = M \times \mathbb{R}^N$ c'è la connessione banale d. Sia poi $p : T\mathbb{R}^N|_M \to TM$ la proiezione canonica sul primo addendo della decomposizione in somma diretta $T\mathbb{R}^N|_M = TM \oplus N$, dove N è il fibrato normale ad M, cioè il fibrato ortogonale a $TM \subseteq M \times \mathbb{R}^N$ rispetto alla metrica canonica. Allora la posizione

$$\nabla_X Y := p(dY(X)), \qquad X, Y \in C^\infty(M, TM),$$

definisce una connessione su TM, come si verifica facilmente tenendo conto del fatto che sia p che dY sono $C^\infty(M)$-lineari, e che $pY = Y$.

2. Sia $M = G_k(\mathbb{R}^{n+k})$ la grassmanniana dei k-sottospazi in $\mathbb{R}^{n+k}$, e sia

$$E_{k,n+k}(\mathbb{R}) = \left\{(p, \underline{v}) \in G_k(\mathbb{R}^{n+k}) \times \mathbb{R}^{n+k} : \underline{v} \in p\right\}$$

il fibrato tautologico su M. Rispetto alla metrica canonica sul fibrato banale $M \times \mathbb{R}^{n+k}$ vale allora la decomposizione in somma diretta

$$M \times \mathbb{R}^{n+k} = E_{k,n+k}(\mathbb{R}) \oplus E_{k,n+k}(\mathbb{R})^\perp,$$

e sia p la proiezione sul primo addendo. Allora anche in questo caso si verifica facilmente che si ottiene una connessione su $E_{k,n+k}(\mathbb{R})$ ponendo

$$\nabla_X s := p(ds(X)), \quad s \in C^\infty(M, E_{k,n+k}(\mathbb{R})), X \in C^\infty(M, TM).$$

3.7. **Ulteriori proprietà.**

Siano E,F fibrati su M, con rispettive connessioni ∇^E, ∇^F. È facile verificare che

$$\nabla^{E\oplus F} := \begin{pmatrix} \nabla^E & 0 \\ 0 & \nabla^F \end{pmatrix}$$

definisce una connessione su $E \oplus F$, con matrice locale di 1-forme

$$\omega^{E\oplus F} = \begin{pmatrix} \omega^E & 0 \\ 0 & \omega^F \end{pmatrix},$$

e che

$$\nabla^{E\otimes F} := \nabla^E \otimes \mathbb{I}_{C^\infty(M,F)} + \mathbb{I}_{C^\infty(M,E)} \otimes \nabla^F$$

definisce una connessione su $E \otimes F$, con matrice di 1-forme $\omega^{E\otimes F} = \omega^E \otimes \mathbb{I} + \mathbb{I} \otimes \omega^F$, prodotti tensoriali di matrici.
Inoltre si definisce una connessione ∇^{E^*} sul fibrato duale E^* di E, richiedendo che, se $\{e_i\}$ è una base locale di E ed $\{e^i\}$ è la relativa base duale, valga

$$0 = d(e^i, e_j) = (\nabla^{E^*} e^i, e_j) + (e^i, \nabla^E e_j),$$

dove con $(\cdot,\cdot)$ si è indicata la dualità naturale tra E ed E^*. Si trova allora che $\omega^{E^*} = -(\omega^E)^T$.
Notiamo che, per definizione, se $\theta \in C^\infty(M, E^*)$ e $s \in C^\infty(M, E)$ allora

$$(\nabla_X \theta)(s) = -\theta(\nabla_X s) + X(\theta(s)) \tag{13}$$

Se il fibrato E ha una metrica $\langle\cdot,\cdot\rangle_E$, la connessione ∇^E si dirà *compatibile con la metrica* se

$$d\langle s,t\rangle_E = \langle \nabla^E s, t\rangle_E + \langle s, \nabla^E t\rangle_E, \qquad s,t \in C^\infty(M,E), \tag{14}$$

dove naturalmente si intende $\langle \omega \otimes s, t\rangle_E = \omega\langle s,t\rangle_E = \langle s, \omega \otimes t\rangle_E$, per $\omega \in \Omega^1(M)$, o equivalentemente, per $X \in C^\infty(M, TM)$,

$$X\langle s,t\rangle_E = \langle \nabla^E_X s, t\rangle_E + \langle s, \nabla^E_X t\rangle_E;$$

se poi E è reale e $\langle\cdot,\cdot\rangle_E$ è simmetrica ed $\{e_i\}$ è una base locale ortonormale, dalla (14) si ha:

$$\begin{aligned} 0 = d\langle e_i, e_j\rangle_E &= \langle \omega_i^k \otimes e_k, e_j\rangle_E + \langle e_i, \omega_j^l \otimes e_l\rangle_E \\ &= \omega_i^j + \omega_j^i, \end{aligned}$$

e quindi la matrice di 1-forme di connessione è antisimmetrica. Analogamente si verifica che se E è complesso e la metrica è hermitiana, la matrice di connessione rispetto ad una base ortonormale è antihermitiana.

4. **Lezione 4.**

4.1. **Curvatura.**

Sia (E, π, M) un fibrato vettoriale di rango k. Una connessione ∇ su E è un'applicazione $\nabla : C^\infty(M,E) \to C^\infty(M, T^*M \otimes E)$ soddisfacente la regola di Leibniz. La si può poi estendere ad una applicazione $\mathbb{R}$-lineare (o meglio, ad una famiglia di applicazioni), $\tilde{\nabla} : C^\infty(M, \bigwedge^p T^*M \otimes E) \to C^\infty(M, \bigwedge^{p+1} T^*M \otimes E)$, richiedendo che valga

$$\tilde{\nabla}(\varphi \otimes s) = d\varphi \otimes s + (-1)^p \varphi \wedge \nabla s, \qquad \varphi \in C^\infty(M, \bigwedge^p T^*M), s \in C^\infty(M,E),$$

dove naturalmente si intende $\varphi \wedge (\omega \otimes s) = (\varphi \wedge \omega) \otimes s$, $\omega \in \Omega^1(M)$. Poiché, se $f \in C^\infty(M)$, $(f\varphi) \otimes s = \varphi \otimes (fs)$, affinché la definizione di $\tilde{\nabla}$ sia sensata è necessario verificare che $\tilde{\nabla}((f\varphi) \otimes s) = \tilde{\nabla}(\varphi \otimes (fs))$. Si ha:

$$\begin{aligned}\tilde{\nabla}((f\varphi) \otimes s) &= d(f\varphi) \otimes s + (-1)^p (f\varphi) \wedge \nabla s \\ &= df \wedge \varphi \otimes s + f d\varphi \otimes s + (-1)^p f\varphi \wedge \nabla s = df \wedge \varphi \otimes s + f\tilde{\nabla}(\varphi \otimes s),\end{aligned}$$

e, d'altra parte,

$$\begin{aligned}\tilde{\nabla}(\varphi \otimes (fs)) &= d\varphi \otimes (fs) + (-1)^p \varphi \wedge \nabla(fs) \\ &= f(d\varphi \otimes s) + (-1)^p (\varphi \wedge df) \otimes s + (-1)^p f(\varphi \wedge \nabla s) \\ &= df \wedge \varphi \otimes s + f\tilde{\nabla}(\varphi \otimes s),\end{aligned}$$

avendo usato nell'ultimo passaggio $\varphi \wedge df = (-1)^p df \wedge \varphi$. La definizione è dunque ben posta. D'ora in poi, con un piccolo abuso di notazione, porremo $\tilde{\nabla} = \nabla$.

In particolare da quanto appena visto segue $\nabla(f\nabla s) = df \wedge \nabla s + f\nabla^2 s$, ed allora per $\nabla^2 : C^\infty(M,E) \to C^\infty(M, \bigwedge^2 T^*M \otimes E)$, si ha

$$\begin{aligned}\nabla^2(fs) &= \nabla(df \otimes s + f\nabla s) \\ &= d^2 f \otimes s - df \wedge \nabla s + df \wedge \nabla s + f\nabla^2 s = f\nabla^2 s,\end{aligned}$$

poiché $d^2 f = 0$. Dunque ∇^2 si identifica con una sezione del fibrato $\bigwedge^2 T^*M \otimes \mathrm{End}(E)$, definisce cioè una 2-forma su M a valori endomorfismi di E.

Definizione 8. Siano E, ∇ come sopra. La sezione $\nabla^2 \in C^\infty(M, \bigwedge^2 T^*M \otimes \mathrm{End}(E))$ è detta la *curvatura* della connessione ∇.

Vediamo l'espressione della curvatura in coordinate locali. Sia $\{e_i\}$ una base locale di E, allora con le notazioni usuali:

$$\begin{aligned}\nabla^2(e_i) &= \nabla(\omega_i^j \otimes e_j) \\ &= d\omega_i^j \otimes e_j - \omega_i^j \wedge \omega_j^h \otimes e_h \\ &= (d\omega_i^h + \omega_j^h \wedge \omega_i^j) \otimes e_h = \Omega_i^h \otimes e_h.\end{aligned}$$

Dunque localmente la curvatura ∇^2 è determinata da una matrice di 2-forme, $\Omega = (\Omega_i^h)_{h,i=1,\ldots,k}$, calcolabile a partire dalle 1-forme di connessione ω_i^j tramite le

$$\Omega_i^h = d\omega_i^h + \omega_j^h \wedge \omega_i^j, \qquad h, i = 1, \ldots, k, \tag{15}$$

che si riscrivono anche, in forma matriciale,

$$\Omega = d\omega + \omega \wedge \omega,$$

dove il prodotto esterno a secondo membro è un prodotto righe per colonne di matrici di 1-forme. Poiché inoltre, come osservato sopra, la curvatura definisce una sezione globale di $\bigwedge^2 T^*M \otimes \mathrm{End}(E)$, si ha che se Ω_α (risp. Ω_β) è la matrice di curvatura in un aperto banalizzante U_α (risp. U_β), e se, come al solito, $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to GL(k,\mathbb{R})$ è la funzione di trasizione relativa, su $U_\alpha \cap U_\beta$ vale $\Omega_\beta = g_{\alpha\beta}^{-1}\Omega_\alpha g_{\alpha\beta}$.

Proposizione 2 (Identità di Bianchi)**.** *Con le notazioni di sopra:*

$$d\Omega = [\Omega, \omega] = \Omega \wedge \omega - \omega \wedge \Omega. \tag{16}$$

Proof. È un semplice calcolo:

$$\begin{aligned} d\Omega &= d(d\omega + \omega \wedge \omega) \\ &= d\omega \wedge \omega - \omega \wedge d\omega \\ &= (d\omega + \omega \wedge \omega) \wedge \omega - \omega \wedge (d\omega + \omega \wedge \omega) = [\Omega, \omega]\,. \quad \square \end{aligned}$$

Osservazione 2. Siano X, Y campi di vettori su M e $s \in C^\infty(M, E)$ una sezione di E. Consideriamo

$$R(X,Y)(s) := \left(\nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X,Y]}\right)(s). \tag{17}$$

Utilizzando la formula di Leibnitz e le proprietà di linearità della derivata covariante si verifica senza difficoltà che

$$R \in C^\infty(M, \Lambda^2 M \otimes \mathrm{End}(E)) \tag{18}$$

Passando a coordinate locali si verifica anche che

$$R = \nabla^2 \quad \text{in} \quad C^\infty(M, \Lambda^2 M \otimes \mathrm{End}(E)) \tag{19}$$

4.2. **Polinomi invarianti.**

Denotiamo con $M_k(\mathbb{C})$ l'algebra delle matrici $k \times k$ a coefficienti complessi.

Definizione 9. Sia $P : M_k(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ una funzione polinomiale. Diremo che P è un polinomio invariante se

$$P(gAg^{-1}) = P(A)\,, \quad \forall g \in GL(k,\mathbb{C})\,, \forall A \in M_k(\mathbb{C}) \tag{20}$$

L'insieme dei polinomi invarianti ha una struttura naturale di algebra; la notazione standard per quest' algebra è $\mathrm{I}(GL(k,\mathbb{C}))$.
Più in generale, se G è un gruppo di Lie allora ha senso considerare l'algebra $\mathrm{I}(G)$ delle funzioni polinomiali $P : \mathrm{Lie}(G) \to \mathbb{C}$ che sono invarianti rispetto alla rappresentazione aggiunta $\mathrm{Ad} : G \to \mathrm{End}(\mathrm{Lie}(G))$:

$$P(\mathrm{Ad}_g(A)) = P(A) \;\; \forall g \in G\,, \forall A \in \mathrm{Lie}(G)\,.$$

Noi saremo principalmente interessati alle algebre

$$\mathrm{I}(GL(k,\mathbb{C}))\,, \quad \mathrm{I}(U(k))\,, \quad \mathrm{I}(O(k))\,, \quad \mathrm{I}(SO(k))\,.$$

Vi ricordo che in questi quattro casi si ha:

$$\mathrm{Lie}(GL(k,\mathbb{C})) = M_k(\mathbb{C})\,, \quad \mathrm{Lie}(U(k)) = \{\text{matrici antihermitiane}\}$$

$$\mathrm{Lie}(O(k)) = \mathrm{Lie}(SO(k)) = \{\text{matrici antisimmetriche}\};$$

inoltre la rappresentazione aggiunta è proprio data $\mathrm{Ad}_g(A) = gAg^{-1}$.

Esempio 1. La traccia e il determinante di una matrice sono due esempi di polinomi invarianti.

Esempio 2. Consideriamo i polinomi $P_\ell(A)$ definiti dall'identità
$$\det(I+tA)=\sum_{\ell=0}^{k}P_\ell(A)t^\ell\,.$$
I polinomi $P_\ell(A)$ sono invarianti; si noti che $P_1(A)=\mathrm{Tr}(A)$, $P_k(A)=\det(A)$. Più in generale $P_\ell(A)=\mathrm{Tr}(\Lambda^\ell A)$. Per dimostrare quest'ultima identità notiamo che essa è facilmente dimostrabile sulle matrici diagonali; ne segue, per invarianza, che essa è vera sulle matrici diagonalizzabili e quindi, per densità, su tutte le matrici. Torneremo a parlare in maniera più estesa dei polinomi $P\ell$ durante la prossima lezione.

4.3. **L'omomorfismo di Chern-Weil.**

Sia ora E un fibrato complesso di rango k su una varietà differenziabile M munito di una connessione ∇^E. Consideriamo la curvatura
$$(\nabla^E)^2\in\mathcal{C}^\infty(M,\Lambda^2(T^*M)\otimes\mathrm{End}(E))\,.$$
Localmente la curvatura di ∇^E è data da una matrice Ω di 2 forme; se U_α e U_β sono due aperti banalizzanti, allora per le relative matrici di curvatura Ω_α, Ω_β si ha (Lezione 3):
$$\Omega_\alpha=g\,\Omega_\beta\,g^{-1}\,, \tag{21}$$
con $g\equiv g_{\alpha\,\beta}:U_\alpha\cap U_\beta\to GL(k,\mathbb{C})$ le funzioni di transizione.
Sia ora $P\in\mathrm{I}(GL(k,\mathbb{C}))$; dato che la curvatura è una matrice di *due* forme e dato che il prodotto wedge è commutativo sulle 2 forme, ha senso considerare $P(\Omega_\alpha)\in\mathcal{C}^\infty(U_\alpha,\Lambda^*T^*U_\alpha)$ e analogamente $P(\Omega_\beta)$. Per l'invarianza di P e per (21) abbiamo che
$$P(\Omega_\alpha)=P(\Omega_\beta)\,,\quad \text{su } U_\alpha\cap U_\beta\,;$$
Otteniamo quindi una forma differenziale di grado pari *globalmente definita* che denotiamo con $P(E,\nabla^E)$. Si noti che se P è un polinomio omogeneo di gradi j allora $P(E,\nabla^E)\in\mathcal{C}^\infty(M,\Lambda^{2j}(T^*M))$.

Teorema 4. *Sia $P\in\mathrm{I}(GL(k,\mathbb{C}))$ e sia ∇^E una connessione su E. Si ha*
$$dP(E,\nabla^E)=0\,. \tag{22}$$
Inoltre, se ∇^E_0 e ∇^E_1 sono due connessioni su E allora esiste una forma differenziale $TP(\nabla^E_1,\nabla^E_0)\in\mathcal{C}^\infty(M,\Lambda^*(T^*M))$ tale che
$$P(E,\nabla^E_1)-P(E,\nabla^E_0)=d(TP(\nabla^E_1,\nabla^E_0)) \tag{23}$$

Dimostrazione. Basta dimostrare il teorema per i polinomi omogenei. Sia P un polinomio omogeneo invariante di grado j. A partire da P possiamo definire un'applicazione multilineare $\widetilde{P}(A_1,\dots,A_j)$ tale che

(i) $\widetilde{P}(A,\dots,A)=P(A)$

(ii) $\widetilde{P}(A_1,\dots,A_j)=\widetilde{P}(A_{\sigma(1)},\dots,A_{\sigma(j)})\,,\quad\forall\sigma\in S_j$

(iii) $\widetilde{P}(gA_1g^{-1},\dots,gA_jg^{-1})=\widetilde{P}(A_1,\dots,A_j)$.

L'applicazione multilineare $\widetilde{P}$ è definita come segue
$$\widetilde{P}(A_1,\dots,A_j)=\frac{1}{j!}(\text{coefficiente di } t_1\cdots t_j\ \text{ in }\ P(t_1A_1+\cdots+t_jA_j))$$
Ad esempio, per il polinomio invariante $Q(A)=\mathrm{Tr}(A^2)$ si ha:
$$Q(t_1A_1+t_2A_2)=\mathrm{Tr}(t_1^2A_1^2+t_1t_2(A_1A_2+A_2A_1)+t_2^2A_2^2)\,;$$

ne segue che $\widetilde{Q}(A_1, A_2) = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(A_1A_2 + A_2A_1) = \mathrm{Tr}(A_1A_2)$.
Sia ora $X \in M_k(\mathbb{C}) \equiv \mathrm{Lie}(GL(k,\mathbb{C}))$. Si ha

$$\sum_i \widetilde{P}(A_1, \dots, [A_i, X], \dots, A_j) = 0 \tag{24}$$

Per dimostrare questa identità consideriamo $\exp(tX) \equiv \sum_j (tX)^j/j\,!$. Poniamo $\exp(-tX) := g_t \in GL(k,\mathbb{C})$. È facile verificare che

$$\frac{d}{dt}(g_t A g_t^{-1})|_{t=0} = [A, X]\,. \tag{25}$$

Per ipotesi

$$\widetilde{P}(g_t A_1 g_t^{-1}, \dots, g_t A_j g_t^{-1}) = \widetilde{P}(A_1, \dots, A_j) \quad \forall t \in \mathbb{R}\,;$$

derivando rispetto a t questa uguaglianza, utilizzando la multilinearità di $\widetilde{P}$ e (25) otteniamo subito (24).
Supponiamo ora che $\mathcal{A}_m$ sia una matrice di j_m forme e che $\mathcal{X}$ sia una matrice di 1 forme. Sotto queste ipotesi:

$$\sum_i (-1)^{j_1+\cdots+j_i} \widetilde{P}(\mathcal{A}_1, \dots, [\mathcal{A}_i, \mathcal{X}], \dots, \mathcal{A}_j) = 0 \tag{26}$$

In questa formula il commutatore è, per definizione, il commutatore graduato:

$$[\mathcal{A}_i, \mathcal{X}] := \mathcal{A}_i\mathcal{X} - (-1)^{j_i \cdot 1}\mathcal{X}\mathcal{A}_i \equiv \mathcal{A}_i\mathcal{X} - (-1)^{j_i}\mathcal{X}\mathcal{A}_i\,.$$

Per dimostrare (26) possiamo assumere che $\mathcal{A}_m = A_m\omega_m$, con $A_m \in \mathrm{Lie}(GL(k,\mathbb{C}))$ e $\omega_m \in \mathcal{C}^\infty(M, \Lambda^{j_m}(T^*M))$, e che $\mathcal{X}_i = X\alpha$, con $X \in \mathrm{Lie}GL(k,\mathbb{C})$ e α una 1-forma su M. Con calcoli elementari si dimostra allora che

$$\sum_i (-1)^{j_1+\cdots+j_i} \widetilde{P}(\mathcal{A}_1, \dots, [\mathcal{A}_i, \mathcal{X}], \dots, \mathcal{A}_j)$$

è uguale a

$$\sum_i \widetilde{P}(A_1, \dots, [A_i, X], \dots, A_j)(\alpha \wedge \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_j)$$

che è zero per (24). Siamo ora nella posizione di dimostrare (22). Sia ω la matrice di 1-forme associata a ∇^E in un aperto banalizzante $U \subset M$; sia Ω la relativa matrice di curvatura; vi ricordo l'identità di Bianchi:

$$d\Omega = [\Omega, \omega]\,. \tag{27}$$

Certamente $dP(\Omega) = d\widetilde{P}(\Omega, \dots, \Omega)$; utilizzando la multilinearità di $\widetilde{P}$ ed il fatto che Ω è una matrice di 2-forme [4], possiamo eguagliare questa espressione a

$$\sum \widetilde{P}(\Omega, \dots, d\Omega, \dots, \Omega)$$

e utilizzando Bianchi e (26) otteniamo

$$\sum \widetilde{P}(\Omega, \dots, d\Omega, \dots, \Omega) = \sum \widetilde{P}(\Omega, \dots, [\Omega, \omega], \dots, \Omega) = 0;$$

quindi $dP(\Omega) = 0$ che è quello che dovevamo dimostrare.
Passiamo alla seconda parte dell'enunciato. Siano ∇_0^E e ∇_1^E due connessioni. Abbiamo visto (lezione 2) che

$$\nabla_1^E - \nabla_0^E \in \mathcal{C}^\infty(M, T^*M \otimes \mathrm{End}(E)).$$

[4] gli eventuali segni dovuti a commutazioni di prodotti esterni sono quindi tutti positivi

Poniamo $\theta = \nabla_1^E - \nabla_0^E$ e consideriamo $\nabla_t^E = (1-t)\nabla_0^E + t\nabla_1^E = \nabla_0^E + t\theta$. Sia U un aperto banalizzante per E e denotiamo con ω_t e Ω_t le corrispondenti matrici di connessione e di curvatura. La formula precedente ci dà

$$\omega_t = \omega_0 + t\theta\,.$$

Da quest'equazione e dall'equazione di struttura ($\Omega_t = d\omega_t + \omega_t \wedge \omega_t$) otteniamo immediatamente

$$\frac{d\Omega_t}{dt} = d\theta + [\theta, \omega_t] \tag{28}$$

Facendo uso di (28), della multilinearità e simmetria di $\widetilde{P}$ e del fatto che Ω_t è una matrice di due forme otteniamo

$$\begin{aligned}
P(\Omega_1) - P(\Omega_0) &= \int_0^1 \frac{d}{dt} P(\Omega_t)dt \\
&= \int_0^1 \frac{d}{dt} \widetilde{P}(\Omega_t, \ldots, \Omega_t)dt \\
&= j\int_0^1 \widetilde{P}(\frac{d\Omega_t}{dt}, \Omega_t, \ldots, \Omega_t)dt \\
&= j\int_0^1 \widetilde{P}(d\theta + [\theta, \omega], \Omega_t, \ldots, \Omega_t)dt \\
&= j\int_0^1 \widetilde{P}(d\theta, \Omega_t, \ldots, \Omega_t)dt + j\int_0^1 \widetilde{P}([\theta, \omega_t], \Omega_t, \ldots, \Omega_t)dt
\end{aligned}$$

Per (26) sappiamo che:

$$-\widetilde{P}([\theta, \omega_t], \Omega_t, \ldots, \Omega_t) = \widetilde{P}(\theta, [\Omega_t, \omega_t], \ldots, \Omega_t) + \cdots + \widetilde{P}(\theta, \Omega_t, \ldots, \Omega_t, [\Omega_t, \omega_t])$$

Sostituendo e utilizzando Bianchi ancora una volta otteniamo

$$\begin{aligned}
P(\Omega_1) - P(\Omega_0) &= j\int_0^1 \widetilde{P}(d\theta, \Omega_t, \ldots, \Omega_t)dt \\
&- j\int_0^1 \sum_{j \geq 2} \widetilde{P}(\theta, \Omega_t, \ldots, d\Omega_t, \ldots, \Omega_t)dt \\
&= d\left(j\int_0^1 \widetilde{P}(\theta, \Omega_t, \ldots, \Omega_t)dt\right)
\end{aligned}$$

Ponendo

$$TP(\nabla_1^E, \nabla_0^E) = j\int_0^1 \widetilde{P}(\theta, \Omega_t, \ldots, \Omega_t)dt$$

otteniamo la dimostrazione completa del teorema.

Corollario 4. *Per ogni fibrato complesso di rango k su M è definito un omomorfismo di algebre*

$$\mathrm{CW}^E : \mathrm{I}(GL(k, \mathbb{C})) \to H^{2*}_{\mathrm{dR}}(M, \mathbb{C}) \tag{29}$$

$$\mathrm{CW}^E(P) = [P(E, \nabla^E)]$$

che è detto omomorfismo di Chern-Weil. Scriveremo brevemente CW *invece di* CW^E.

L'omomorfismo di Chern-Weil dà una misuta della non-banalità di un fibrato: se E è banale allora possiamo scegliere la connessione banale che ha curvatura nulla; in questo caso $\mathrm{CW}(P) = 0\ \forall P$. È anche chiaro che se E ed F sono isomorfi allora $P(E) = P(F)$ in $H^{2*}_{\mathrm{dR}}(M, \mathbb{C})$ per ogni $P \in \mathrm{I}(GL(k, \mathbb{C}))$.

4.4. **Riduzione del gruppo di struttura.**

Sia G un sottogruppo di Lie di $GL(k,\mathbb{C})$. Supponiamo che sia possibile scegliere le funzioni di transizione di E a valori in G (si dice in tal caso che il gruppo di struttura di E è riducibile a G). Fissiamo una volta per tutte una ricoprimento $\{U_\alpha\}$ che ammetta funzioni di transizione a valori in G. Possiamo allora introdurre una connessione ∇^E che abbia matrici di connessione ω_α a valori in $\mathrm{Lie}(G)$. Diremo che ∇^E è una G-connessione. [5] Si noti che in questo caso le matrici di curvatura sono anche a valori in $\mathrm{Lie}(G)$ e sono invarianti per la rappresentazione aggiunta di G. Dato $P \in \mathrm{I}(G)$ ha quindi senso considerare $P(E,\nabla^E) \in \mathcal{C}^\infty(M,\Lambda^{2*}T^*M)$. La dimostrazione del seguente teorema è del tutto analoga a quella del Teorema 4

Teorema 5. *Sia E un fibrato complesso di rango k con gruppo di struttura G, sottogruppo di Lie di $GL(k,\mathbb{C})$. Sia $P \in \mathrm{I}(G)$ e sia ∇^E una G-connessione su E. Si ha*

$$dP(E,\nabla^E) = 0\,. \tag{30}$$

Se ∇^E_0 e ∇^E_1 sono due G-connessioni su E allora esiste una forma differenziale $TP(\nabla^E_1,\nabla^E_0) \in \mathcal{C}^\infty(M,\Lambda^*(T^*M))$ tale che

$$P(E,\nabla^E_1) - P(E,\nabla^E_0) = d(TP(\nabla^E_1,\nabla^E_0)) \tag{31}$$

Rimane definito un omomorfismo di algebre

$$\begin{gathered}\mathrm{CW}_G : \mathrm{I}(G) \to H^{2*}_{\mathrm{dR}}(M,\mathbb{C}) \\ \mathrm{CW}_G(P) = [P(E,\nabla^E)]\end{gathered} \tag{32}$$

Osservazione. Abbiamo fino ad ora considerato fibrati *complessi* di rango k con gruppo di struttura G, sottogruppo di Lie di $GL(k,\mathbb{C})$. Possiamo analogamente considerare fibrati *reali* di rango k con gruppo di struttura G, sottogruppo di Lie di $GL(k,\mathbb{R})$. Saremo principalmente interessati ai seguenti 3 gruppi di Lie:

$$U(k) \le GL(k,\mathbb{C})\,, \quad O(k) \le GL(k,\mathbb{R})\,, \quad SO(k) \le GL(k,\mathbb{R}).$$

Vi faccio notare che un fibrato complesso con metrica hermitiana ha gruppo di struttura riducibile a $U(k)$ e, analogamente, un fibrato reale con metrica riemanniana ha gruppo di struttura riducibile a $O(k)$. La dimostrazione è semplice ed utilizza le banalizzazioni locali definite da basi locali *ortonormali* (sempre esistenti per Gram-Schmidt).

4.5. **Definizione di classi di Chern.**

Torniamo al caso complesso. Tramite l'identità

$$\det(\mathrm{Id} + tA) = \sum P_\ell(A)t^\ell$$

abbiamo definito i polinomi invarianti $P_\ell(\ )$; questi polinomi sono detti *polinomi simmetrici elementari* (per matrici diagonali sono infatti uguali alle funzioni simmetriche elementari). Notare che $P_j(\ )$ è un polinomio omogeneo di grado j. Definiamo

$$c_j(A) := P_j(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}A)$$

Definizione 10. Sia E un fibrato complesso su M. La j-ma classe di Chern di E è per definizione la classe

$$c_j(E) := [c_j(E,\nabla^E)] \in H^{2j}_{dR}(M,\mathbb{C})$$

[5] non è difficile dimostrare che se E ha gruppo di struttura riducibile a G, allora E ammette una G-connessione.

Esempi. Segue dalla definizione e dall'Esempio 2 che

$$c_1(E) = [\mathrm{Tr}(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\Omega)]\,, \quad c_2(E) = [\frac{1}{8\pi^2}(\mathrm{Tr}(\Omega \wedge \Omega) - \mathrm{Tr}(\Omega) \wedge \mathrm{Tr}(\Omega))]\,. \tag{33}$$

dove abbiamo denotato con Ω la matrice di curvatura di una qualsiasi connessione su E.

La classe di Chern *totale* è la classe

$$c(E) = [\det(\mathrm{Id} + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\Omega)] = 1 + c_1(E) + c_2(E) + \cdots + c_k(E)$$

5. **Lezione 5.**

5.1. **Le classi di Chern di un fibrato hermitiano.**

Sia $E \to M$ un fibrato hermitiano di rango k. Il suo gruppo di struttura è il gruppo $U(k)$ delle matrici hermitiane $k \times k$. Siamo interessati ai polinomi su $\mathrm{Lie}(U(k))$ invarianti per l'azione di $U(k)$ per coniugio, che al solito indicheremo con $I(U(k))$.

Proposizione 3. *Si ha un isomorfismo di anelli:* $I(U(k)) \simeq \mathbb{C}[c_1, \dots, c_k]$

Dimostrazione. Sia $P \in I(U(k))$ allora
$$P : \mathrm{Lie}(U(k)) \to \mathbb{C}$$
con
$$P(gAg^{-1}) = P(A), \quad \forall A \in \mathrm{Lie}(U(k)),\ g \in U(k)$$
Poiché $A \in \mathrm{Lie}(U(k))$, A è anti-hermitiana. Ne segue che $\sqrt{-1}A$ è hermitiana e dunque esiste $g \in U(k)$ tale che
$$g \cdot \sqrt{-1}\ A \cdot g^{-1} = diag\{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_k\}$$
con gli η_i reali. Ma allora
$$gAg^{-1} = \sqrt{-1}\ diag\{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_k\} =: diag\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k\}$$
con i λ_i immaginari puri. Se poniamo
$$\check{P}(\lambda_1, \dots, \lambda_k) := P(diag\{\lambda_1, \dots, \lambda_k\})$$
abbiamo, per l'invarianza di P,
$$P(A) = P(gAg^{-1}) = \check{P}(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$$
Sia adesso $h_{ij} \in U(k)$ l'applicazione che scambia i vettori e_i ed e_j della base canonica. Poiché
$$h_{ij} \cdot diag\{\lambda_1, \dots, \lambda_i, \dots, \lambda_j, \dots, \lambda_k\} \cdot h_{ij}^{-1} = diag\{\lambda_1, \dots, \lambda_j, \dots, \lambda_i, \dots, \lambda_k\}$$
la $U(k)$ invarianza di P implica
$$\check{P}(\lambda_1, \dots, \lambda_i, \dots, \lambda_j, \dots, \lambda_k) = \check{P}(\lambda_1, \dots, \lambda_j, \dots, \lambda_i, \dots, \lambda_k)$$
ovvero il polinomio $\check{P}$ è S_k-invariante. A questo punto un ben noto teorema di algebra commutativa ci dice che $\check{P}$ è un polinomio nelle funzioni simmetriche elementari. Più precisamente esiste ed è unico un polinomio F tale che
$$\check{P}(\lambda_1, \dots, \lambda_k) = F(\sigma_1(\lambda_1, \dots, \lambda_k), \sigma_2(\lambda_1, \dots, \lambda_k), \dots, \sigma_k(\lambda_1, \dots, \lambda_k))$$
dove i polinomi $\sigma_i(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ sono definiti dall'equazione
$$\prod_i (1 + \lambda_i\ t) = \sum_i \sigma_i(\lambda_1, \dots, \lambda_k) t^i$$
Osserviamo che si ha
$$\prod_i (1 + \lambda_i\ t) = \det(I + t \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_k \end{pmatrix}) = \det(I + tA)$$
da cui
$$\sigma_i(\lambda_1, \dots, \lambda_k) = P_i(A)$$

In conclusione, abbiamo dimostrato

$$P(A) = \tilde{F}\left(c_1(A), \dots, c_k(A)\right)$$

dove, al solito,

$$c_i(A) := P_i\left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}A\right)$$

sono i polinomi di Chern. Per definizione, la i-esima classe di Chern del fibrato hermitiano $E \to M$ è

$$c_i(E) := [c_i(E, \nabla^E) \equiv [c_i(\Omega)]] \in H^{2i}_{dR}(M, \mathbb{C})$$

5.2. **Classe totale di Chern. Carattere di Chern. Classe di Todd.**

Vediamo ora alcuni esempi di classi caratteristiche ottenibili come polinomi nelle classi di Chern di un fibrato hermitiano $E \to M$. Notiamo innanzi tutto che, poiché le classi di coomologia di una varietà di dimensione finita sono nilpotenti, ha perfettamente senso valutare una serie di potenze definita in $\mathrm{Lie}(U(k))$ su una matrice di due forme.

i) La classe di Chern totale. Si tratta, per definizione, della classe

$$c(E) := 1 + c_1(E) + \cdots + c_k(E) = \left[\det\left(1 + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\Omega\right)\right]$$

Dalla definizione seguono immediatamente le proprietà seguenti:

$$c(E \oplus F) = c(E) \wedge c(F)$$

$$c(f^*E) = f^*c(E)$$

$$c(E^*) = 1 - c_1(E) + c_2(E) + \cdots + (-1)^k c_k(E)$$

$$\overline{c(E)} = c(E) \quad \text{(e quindi} \quad c_j(E) \in H^{2j}(M, \mathbb{R}))$$

dato che $\Omega^i_j = -\overline{\Omega}^j_i$. In particolare da $c(E \oplus F) = c(E) \wedge c(F)$ si ha

$$c(E \oplus 1) = c(E)$$

ovvero la classe di Chern totale è *stabile.* Dalla formula $c(E \oplus F) = c(E) \wedge c(F)$, prendendo la componente in grado i in ambo i membri dell'uguaglianza, si ottiene

$$c_i(E \oplus F) = \sum_{l=0}^{i} c_l(E) \wedge c_{i-l}(F)$$

Notiamo anche che $c_i(E^*) = (-1)^i c_i(E)$ e che $c_i(f^*E) = f^*c_i(E)$.
ii) Il carattere di Chern $Ch(E)$. Si tratta della classe definita dalla serie

$$\mathrm{Ch}(E) := \left[\mathrm{Tr}\exp\left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\Omega\right)\right] = \left[\sum_j \frac{\mathrm{Tr}\left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\Omega\right)^j}{j!}\right]$$

Dalla definizione di $\mathrm{Ch}(E)$ segue immediatamente che

$$\mathrm{Ch}(E \oplus F) = \mathrm{Ch}(E) + \mathrm{Ch}(F)$$

$$\mathrm{Ch}(E \otimes F) = \mathrm{Ch}(E) \wedge \mathrm{Ch}(F)$$

$$\overline{\mathrm{Ch}(E)} = \mathrm{Ch}(E) \quad \text{(e quindi} \quad \mathrm{Ch}(E) \in H^*(M, \mathbb{R}))$$

I primi termini della serie $\mathrm{Ch}(E)$ sono

$$\mathrm{Ch}(E) = k + c_1(E) + \frac{1}{2}\left(c_1(E)^2 - 2c_2(E)\right) + \dots$$

iii) La classe di Todd. Definiamo la serie di Todd come

$$\mathrm{Td}(A) := \det\left(\frac{A}{1-e^{-A}}\right)$$

dove A è una matrice antihermitiana. Con queste notazioni, la classe di Todd di E è, per definizione,

$$\mathrm{Td}(E) := \left[\mathrm{Td}\left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\Omega\right)\right]$$

I primi termini della serie $\mathrm{Td}(E)$ sono

$$\mathrm{Td}(E) = 1 + \frac{1}{2}c_1(E) + \frac{1}{12}\left(c_1(E)^2 + c_2(E)\right) + \dots$$

Vale inoltre

$$\mathrm{Td}(E \oplus 1) = \mathrm{Td}(E)$$

ovvero la classe di Todd è stabile. Per concludere, se M è una varietà complessa compatta e senza bordo, si pone

$$\mathrm{Td}(M) := \int_M \mathrm{Td}(T^{1,0}M)$$

dove $T^{1,0}M$ indica il fibrato tangente olomorfo di M (per la definizione vi rimando alla Lezione 8). Il numero $\mathrm{Td}(M)$ prende il nome di *genere di Todd* della varietà. Vedremo come conseguenza del teorema dell'indice che $\mathrm{Td}(M)$ è un intero.

5.3. **Classi di Pontryagin di un fibrato reale riemanniano.**

Sia $E \to M$ un fibrato reale riemanniano di rango k. Il suo gruppo di struttura è quindi riducibile al gruppo $O(k)$ delle matrici ortogonali $k \times k$. Siamo interessati ai polinomi su $\mathrm{Lie}(O(k))$ invarianti per l'azione di $O(k)$ per coniugio, che al solito indicheremo con $I(O(k))$.

Proposizione 4. *Si ha un idomorfismo di anelli $I(O(k)) \simeq \mathbb{C}[p_1, \dots, p_{[k/2]}]$, dove $[x]$ indica la parte intera di x.*

Dimostrazione. Sia $P \in I(O(k))$ allora

$$P : \mathrm{Lie}(O(k)) \to \mathbb{C}$$

con

$$P(gAg^{-1}) = P(A), \quad \forall A \in \mathrm{Lie}(O(k)),\ g \in O(k)$$

Poiché $A \in \mathrm{Lie}(O(k))$, A è anti-simmetrica. Dunque A, vista come matrice complessa, è anti-hermitiana. Ne segue che $A_{\mathbb{C}}$ è diagonalizzabile sui complessi e che i suoi autovalori sono tutti immaginari puri. Poichè A è reale, il suo polinomio caratteristico lo è, e dunque i suoi autovalori sono a due a due coniugati. Sia $\sqrt{-1}\lambda$ uno di questi autovalori, e sia $e \in \mathbb{C}^k$ un autovettore. Il vettore $\overline{e}$ è un autovettore di autovalore $-\sqrt{-1}\lambda$. Poniamo $e_1 = e, e_2 = \overline{e}$, e siano

$$\begin{cases} v_1 = \frac{(1-\sqrt{-1})}{2}(e_1 + \sqrt{-1}e_2) \\ v_2 = \frac{(1-\sqrt{-1})}{2}(e_2 + \sqrt{-1}e_1) \end{cases}$$

Si ha

$$\begin{gathered} Av_1 = \lambda v_2 \\ Av_2 = -\lambda v_1 \end{gathered}$$

Inoltre

$$\overline{v_1} = \tfrac{(1+\sqrt{-1})}{2}(e_2 - \sqrt{-1}e_1) = \tfrac{(1-\sqrt{-1})}{2}(e_1 + \sqrt{-1}e_2) = v_1$$
$$\overline{v_2} = \tfrac{(1+\sqrt{-1})}{2}(e_1 - \sqrt{-1}e_2) = \tfrac{(1-\sqrt{-1})}{2}(e_2 + \sqrt{-1}e_1) = v_2$$

dunque i vettori $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^k$. Un rapido calcolo mostra che v_1 e v_2 sono ortonormali rispetto all'usuale prodotto scalare su $\mathbb{R}^k$. Effettuando questo procedimento per tutti gli autovalori di $A_{\mathbb{C}}$ troviamo una base ortonormale $\{v_i\}$ di $\mathbb{R}^k$ nella quale A ha la forma

$$\begin{pmatrix} 0 & \lambda_1 & & & & \\ -\lambda_1 & 0 & & & & \\ & & 0 & \lambda_2 & & \\ & & -\lambda_2 & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & * \end{pmatrix} \tag{34}$$

dove il blocco $(*)$ è (0) se k è dispari ed è assente se k è pari. Indicheremo la matrice a blocchi (34) con il simbolo $Bl(\lambda_1, \ldots, \lambda_{[k/2]})$. Tutto quanto abbiamo fin qui dimostrato si riassume dicendo che, se $A \in Lie(O(k))$, esiste $g \in O(k)$ tale che

$$gAg^{-1} = Bl(\lambda_1, \ldots, \lambda_{[k/2]})$$

con i λ_i reali. Se poniamo

$$\check{P}(\lambda_1, \ldots, \lambda_{[k/2]}) := P(Bl(\lambda_1, \ldots, \lambda_{[k/2]}))$$

abbiamo, per l'invarianza di P,

$$P(A) = P(gAg^{-1}) = \check{P}(\lambda_1, \ldots, \lambda_{[k/2]})$$

Sia adesso $h_{12|34} \in O(k)$ l'applicazione definita da

$$v_1 \leftrightarrow v_3$$
$$v_2 \leftrightarrow v_4$$

Il coniugio con $h_{12|34}$ permuta il primo e il secondo blocco della matrice $Bl(\lambda_1, \ldots, \lambda_{[k/2]})$; ne segue la S_k-invarianza del polinomio $\check{P}$, ovvero $\check{P}$ è un polinomio simmetrico nelle λ_i. Sia ora $h_{1|2} \in O(k)$ l'applicazione definita da

$$v_1 \leftrightarrow v_2$$

Si ha

$$h_{1|2} \cdot Bl(\lambda_1, \ldots, \lambda_{[k/2]}) \cdot h_{1|2}^{-1} = Bl(-\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$$

dunque la $O(k)$ invarianza di P implica che il polinomio $\check{P}$ è un polinomio pari nella variabile λ_1. Ripetendo questo ragionamento per le altre varibili, troviamo che $\check{P}$ è un *polinomio simmetrico pari* nelle variabili λ_i, ovvero che è un polinomio simmetrico nelle variabili λ_i^2. Ne segue che esiste ed è unico un polinomio F tale che

$$\check{P}(\lambda_1, \ldots, \lambda_{[k/2]}) = F(\gamma_1(\lambda_1, \ldots, \lambda_{[k/2]}), \gamma_2(\lambda_1, \ldots, \lambda_{[k/2]}), \ldots, \gamma_{[k/2]}(\lambda_1, \ldots, \lambda_{[k/2]}))$$

dove i polinomi $\gamma_i(\lambda_1, \ldots, \lambda_{[k/2]})$ sono definiti dall'equazione

$$\prod_i (1 + \lambda_i^2\, t^2) = \sum_i \gamma_i(\lambda_1, \ldots, \lambda_{[k/2]}) t^{2i}$$

Osserviamo che si ha

$$\prod_i (1 + \lambda_i^2\, t^2) = \det(I + t \cdot Bl(\lambda_1, \ldots, \lambda_{[k/2]}))$$

da cui

$$\gamma_i(\lambda_1,\dots,\lambda_{[k/2]}) = P_{2i}(A)$$

Poniamo

$$p_i(A) := \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{2i} P_{2i}(A)$$

Il polinomio $p_i(A)$ prende il nome di i-esimo polinomio di Pontryagin di A. In conclusione, abbiamo dimostrato che esiste ed è unico il polinomio $\tilde{F}$ tale che

$$P(A) = \tilde{F}\left(p_1(A),\dots,p_{[k/2]}(A)\right)$$

il che conclude la dimostrazione.

Per definizione la i-esima classe di Pontryagin di un fibrato riemanniano $E \to M$ è

$$p_i(E) := [p_i(\Omega)] \in H^{4i}_{dR}(M,\mathbb{C})$$

Dalla definizione risulta immediatamente che, se indichiamo con $E_{\mathbb{C}} := E \otimes \mathbb{C}$ il complessificato del fibrato reale E , si ha

$$p_i(E) = (-1)^i c_{2i}(E_{\mathbb{C}})$$

dove abbiamo esteso la connessione ∇ su E ad una connessione su $E_{\mathbb{C}}$ semplicemente estendendola per $\mathbb{C}$-linearità.

Sia ora E è un fibrato *complesso* di rango k; E è definito da funzioni di transizione $\{g_{\alpha\beta}\}$ a valori in $GL(k,\mathbb{C})$. Il fibrato con funzioni di transizione $\overline{g_{\alpha\beta}}$ è il fibrato coniugato di E ed è denotato con $\overline{E}$. Sia $E_{\mathbb{R}}$ il fibrato reale di rango $2k$ definito dalle funzioni di transizione $(g_{\alpha\beta})_{\mathbb{R}}$ a valori in $GL(2k,\mathbb{R})$. Facciamo una pausa per chiarire come associamo ad un elemento A in $GL(k,\mathbb{C})$ un elemento $A_{\mathbb{R}}$ in $GL(2k,\mathbb{R})$. $A_{\mathbb{R}}$ è definito dalla composizione

$$\mathbb{R}^{2k} \to \mathbb{C}^k \xrightarrow{A} \mathbb{C}^k \to \mathbb{R}^{2k}$$

con la prima e l'ultima mappa date dall'identificazione $z_\ell = x_{2\ell-1} + ix_{2\ell}$, quindi

$$\mathbb{R}^{2k} \ni (x_1, x_2,\dots,x_{2k-1},x_{2k}) \to (z_1,\dots,z_k) \in \mathbb{C}^k.$$

(Un ragionamento analogo può essere fatto per un qualsiasi spazio vettoriale complesso e per un operatore $T: E \to E$. Si veda la dimostrazione della Proposizione 7 nella prossima lezione.) Non è difficile dimostrare che se consideriamo $A_{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C} \in GL(2k,\mathbb{C})$ allora esiste una matrice $B \in GL(2k,\mathbb{C})$ tale che

$$B^{-1}\left(A_{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C}\right) B = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & \overline{A} \end{pmatrix} \tag{35}$$

B può essere espicitamente descritta: se B_j è la j-ma colonna allora

$$B_j = (0,\dots,0,b_j^j,b_j^{j+1},0,\dots,0)^T \;\text{ con }\; b_j^j = 1\,, b_j^{j+1} = -i \;\text{ se }\; j \leq k$$

e analogamente $B_{j+k} = (0,\dots,0,b_{j+k}^j,b_{j+k}^{j+1},0,\dots,0)^T$ con $b_{j+k}^j = 1\,, b_{j+k}^{j+1} = i$.
Torniamo al nostro fibrato complesso E; abbiamo definito $E_{\mathbb{R}}$. Il complessificato di $E_{\mathbb{R}}$ è un fibrato complesso di rango $2k$ e risulta

$$E_{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C} \simeq E \oplus \overline{E} \simeq E \oplus E^*$$

dove $\overline{E}$ indica il fibrato coniugato di E, mentre E^* indica il fibrato duale. Il primo isomorfismo risulta dalla (35), il secondo dal fatto che le funzioni di transizione del duale sono $(g_{\alpha\beta}^{-1})^t$ (possiamo ovviamente sempre supporre che in E ci sia una metrica hermitiana e ridurre le funzioni di transizione a $U(k)$). Si ha pertanto

$$p_i(E_{\mathbb{R}}) = (-1)^i c_{2i}(E \oplus E^*) = \sum_{l=0}^{2i} (-1)^{l-i} c_l(E)\ c_{2i-l}(E)$$

5.4. **Classe di Pontryagin totale. Classe L di Hirzebruch. Classe $\hat{A}$.**

In analogia a quanto fatto per i fibrati hermitiani, vediamo ora alcuni esempi di classi caratteristiche ottenibili come polinomi nelle classi di Pontryagin di un fibrato riemanniano $E \to M$.
i) La classe di Pontryagin totale. Si tratta, per definizione, della classe

$$p(E) := 1 + p_1(E) + \cdots + p_{[k/2]}(E) = \left[\det\left(1 + \frac{1}{2\pi}\Omega\right)\right]$$

Dalla definizione seguono immediatamente le proprietà seguenti:

$$p(E \oplus F) = p(E) \wedge p(F)$$

$$p(f^*E) = f^*p(E)$$

In particolare si ha

$$p(E \oplus 1) = p(E)$$

ovvero la classe di Pontryagin totale è stabile.
ii) La classe di Hirzebruch. Definiamo la serie di Hirzebruch come

$$L(A) := \left(\det\left(\frac{A}{\tanh\ A}\right)\right)^{1/2}$$

dove A è una matrice antisimmetrica. Con queste notazioni, la classe di Hirzebruch di E è, per definizione,

$$L(E) := \left[L\left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\Omega\right)\right]$$

I primi termini della serie $L(E)$ sono

$$L(E) = 1 + \frac{1}{3}p_1(E) + \frac{1}{45}\left(-p_1(E)^2 + 7c_2(E)\right) + \dots$$

Vale inoltre

$$L(E \oplus F) = L(E) \wedge L(F)$$

e dunque, in particolare, la classe di Hirzebruch è stabile. Infine, la classe $L(TM)$ prende il nome di classe di Hirzebruch della varietà M.
iii) La classe $\hat{A}$. Definiamo la serie $\hat{A}$

$$\hat{A}(B) := \left(\det\left(\frac{B}{\sinh\ B}\right)\right)^{1/2}$$

dove B è una matrice antisimmetrica. Con queste notazioni, la classe $\hat{A}$ di E è, per definizione,

$$\hat{A}(E) := \left[\hat{A}\left(\frac{\sqrt{-1}}{4\pi}\Omega\right)\right]$$

I primi termini della serie $\hat{A}(E)$ sono

$$\hat{A}(E) = 1 - \frac{1}{24} p_1(E) + \frac{1}{5760} \big(7p_1(E)^2 - 4c_2(E)\big) + \dots$$

Vale inoltre

$$\hat{A}(E \oplus F) = \hat{A}(E) \wedge \hat{A}(F)$$

e dunque, in particolare, la classe $\hat{A}$ è stabile. Al solito, la classe $\hat{A}(TM)$ prende il nome di classe $\hat{A}$ della varietà M. Il numero

$$\hat{A}(M) := \int_M \hat{A}(TM)$$

prende il nome di *genere* $\hat{A}$ della varietà.

6. **Lezione 6.**

6.1. **Fibrati orientabili.**

Un fibrato reale E di rango k sulla varietà M è detto *orientabile* se $\bigwedge^k E = \bigwedge^{max} E$ è banale. In questo caso il fibrato in rette $(\bigwedge^{max} E, \pi, M)$ possiede una sezione globale non nulla.

Se E è orientabile allora $\bigwedge^{max} E \setminus 0 = \cup_{m \in M} (\bigwedge^{max} E_m \setminus 0)$ ha due componenti connesse; la scelta di una di esse è detta scelta di una *orientazione* per E. Fissata un'orientazione per E, e quindi una sezione banalizzante per $\bigwedge^{max} E$, è chiaro come dati comunque due intorni trivializzanti U_α e U_β sia possibile scegliere due basi locali ortonormali $\{s_1^\alpha, \dots s_k^\alpha\}$ e $\{s_1^\beta, \dots s_k^\beta\}$ tali che

$$s_1^\alpha, \wedge \cdots \wedge s_k^\alpha = c\, s_1^\beta, \wedge \cdots \wedge s_k^\beta\,, \qquad c > 0\,.$$

Quindi, se E è orientabile e dotato di metrica, le funzioni di transizione possono essere scelte a valore in $SO(k)$ invece che in $O(k)$, ossia

$$g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow SO(k).$$

Viceversa, se il gruppo di struttura di E può essere ridotto da $O(k)$ a $SO(k)$, allora è chiaro che possiamo definire una sezione non nulla di $\bigwedge^{max} E$ e quindi banalizzare $\bigwedge^{max} E$ ottenendo che E è orientabile.

6.2. **Polinomi $SO(k)$-invarianti. Classe di Eulero.**

Si indichi con $I(SO(k))$ l'algebra dei polinomi invarianti per $SO(k)$. Lo studio di questi polinomi porta a due casi, a seconda della parità di k.

Primo caso, k dispari: $k = 2m + 1$.
Analogamente al caso visto per $I(O(k))$, data una matrice antisimmetrica A, ossia $A \in \mathrm{Lie}\,(SO(2m+1)) = \mathrm{Lie}\,(O(2m+1))$, esiste sempre una matrice $g \in SO(2m+1)$ la cui azione aggiunta trasforma A in una matrice diagonale a blocchi, con $m+1$ blocchi:

$$gAg^{-1} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \lambda_1 \\ -\lambda_1 & 0 \end{pmatrix} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \begin{pmatrix} 0 & \lambda_2 \\ -\lambda_2 & 0 \end{pmatrix} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \begin{pmatrix} 0 & \lambda_m \\ -\lambda_m & 0 \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & (\,0\,) \end{pmatrix}$$

Come per il caso di $I(O(k))$, si trovano polinomi $\check{P}$ che dipendono solo dagli autovalori λ_i:

$$P(A) \;=\; P(gAg^{-1}) \;=\; \check{P}(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$$

L'azione della matrice $h \in SO(2m+1)$ definita sulla base canonica come

$$h : \begin{cases} e_1 & \longrightarrow \quad e_3 \\ e_2 & \longrightarrow \quad e_4 \\ e_3 & \longrightarrow \quad e_1 \\ e_4 & \longrightarrow \quad e_2 \end{cases}$$

scambia il primo con il secondo blocco della matrice, lasciando invariati i polinomi $\check{P}$. Analogamente tramite $h \in SO(2m+1)$ opportuna si possono scambiare due blocchi qualsiasi, ottenendo

$$\check{P}(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \;=\; \check{P}(\lambda_{\sigma(1)}, \dots, \lambda_{\sigma(m)})\,, \quad \sigma \in S_m.$$

Nel caso $I(O(2m+1))$, per verificare che $\check{P}(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) = \check{P}(-\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ si è utilizzata la trasformazione $h \in O(k)$, $h : \begin{cases} e_1 & \rightarrow & e_2 \\ e_2 & \rightarrow & e_1 \end{cases}$. Ma h ha matrice

$$h = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \notin SO(2m+1)\,.$$

Si considera allora la trasformazione $\widetilde{h}$ con matrice

$$\widetilde{h} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & (-1) \end{pmatrix} \in SO(2m+1)$$

che scambia λ_1 con $-\lambda_1$, ottenendo $\check{P}(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) = \check{P}(-\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$. Quindi vale:

$$\check{P}(\lambda_1, \ldots, \lambda_i, \ldots, \lambda_m) = \check{P}(\lambda_1, \ldots, -\lambda_i, \ldots, \lambda_m)\,,$$

ossia $\check{P}$ è un polinomio simmetrico nelle λ_i^2. Si ottiene quindi, come nel caso di $O(2m+1)$, che esiste un unico polinomio simmetrico F, tale che

$$\check{P}(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) = F(\sigma_1(\lambda_1^2, \ldots, \lambda_m^2), \ldots, \sigma_m(\lambda_1^2, \ldots, \lambda_m^2))$$

e $P(A) = F(p_1(A), \ldots p_m(A))$ dove p_i sono i polinomi di Pontryagin, ottenendo ancora

$$I(SO(2m+1)) = \mathbb{C}[p_1, \ldots, p_m]$$

e non ci sono quindi nuove classi caratteristiche in questo primo caso.

Secondo caso, k pari: $k = 2m$. Non c'è più la possibilità di utilizzare (-1) nel blocco finale della matrice per definire $\widetilde{h}$ e quindi non è più possibile scambiare λ_i con $-\lambda_i$.

Si procede allora come segue: fissato $g_0 \in O(k) \backslash SO(k)$ si può scivere

$$P(A) = \frac{1}{2}(P(g_0 A g_0^{-1}) + P(A)) + \frac{1}{2}(P(A) - P(g_0 A g_0^{-1})) \stackrel{def}{=} P_0(A) + P_1(A)$$

Si verifica facilmente che

- $P_0(A)$ e $P_1(A)$ sono $SO(k)-$invarianti,
- $P_0(A)$ è $O(k)-$invariante
- $P_1(hAh^{-1}) = -P_1(A)$, per $h \in O(k) \backslash SO(k)$.

Scelto h come sopra che realizza lo scambio $e_1 \leftrightarrow e_2$, $\ldots$, $e_{2m-1} \leftrightarrow e_{2m}$, si ottiene analogamente ai casi visti:

$$P_1(A) = \check{P}_1(\lambda_1, \ldots, \lambda_i, \ldots, \lambda_m) = -\check{P}_1(\lambda_1, \ldots, -\lambda_i, \ldots, \lambda_m)\,,\ i = 1, \ldots, m$$

ossia λ_i divide $\check{P}_1(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ per ogni $i = 1, \ldots, m$, e allora vale

$$\check{P}_1(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) = \lambda_1 \cdot \cdots \cdot \lambda_m \cdot \check{p}_2(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$$

dove $\check{p}_2$ è una funzione simmetrica delle λ_i^2. Quindi in questo caso $P(A)$ si scrive come

$$P(A) = \check{P}(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) = \check{P}_0(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) + H\check{p}_2(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$$

dove si è posto $H = \lambda_1 \cdot \cdots \cdot \lambda_m$. Notiamo che $\det A = H^2$.

Vogliamo definire un polinomio invariante $e(A)$ tale che $e(A) = e(Bl(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)) = H$ (a meno di costanti normalizzanti). Sia V uno spazio vettoriale euclideo orientato, con base ortonormale $\{v_1, \ldots, v_k\}$ e con orientazione $v_1 \wedge \cdots \wedge v_k$.

L'integrale di Berezin è il funzionale lineare $T : \bigwedge^* V \rightarrow \mathbb{R}$ che vale 1 su $v_1 \wedge \cdots \wedge v_k$ e zero su

$v_{i_1} \wedge \cdots \wedge v_{i_\ell}$ con $\ell < k$. Se $\{v_1, \ldots, v_k\}$ e $\{w_1, \ldots, w_k\}$ sono due basi ortonormali equiorientate allora è chiaro che

$$T(v_1 \wedge \cdots \wedge v_k) = T(w_1 \wedge \cdots \wedge w_k) \tag{36}$$

Si definisce il **polinomio di Pfaff** come:

$$Pf(A) \;=\; \frac{1}{(2m)!} \sum_{\sigma \in \mathbf{S}_{2m}} (-1)^\sigma A_{\sigma(1)\sigma(2)} \cdot \cdots \cdot A_{\sigma(2m-1)\sigma(2m)}$$

ed il **polinomio di Eulero** come

$$e(A) \;=\; \frac{1}{(2\pi)^m} \, Pf(A)$$

Proposizione 5. *Il polinomio di Eulero $e(A)$ è $SO(k)$ invariante. Se $gAg^{-1} = Bl(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$, con $g \in SO(k)$, allora $e(A) = \frac{1}{(2\pi)^m} \, (-1)^m \, \lambda_1 \cdot \cdots \cdot \lambda_m$*

Dimostrazione. Consideriamo la seguente forma esterna:

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{i<j} A_{ij} \, v_i \wedge v_j$$

dove $\mathcal{B} = \{v_i\}_{i=1,\ldots,2m}$ è una base ortonormale di $\mathbb{R}^{2m}$ equiorientata alla base standard. È facile verificare che se B è coniugata a A tramite $g \in SO(k)$ e se $\mathcal{C} = \{w_i\}_{i=1,\ldots,2m}$ è la base ortonormale di $\mathbb{R}^{2m}$ ottenuta da $\mathcal{B}$ tramite g allora vale la seguente identità in $\bigwedge^2 \mathbb{R}^{2m}$:

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{i<j} A_{ij} \, v_i \wedge v_j = \frac{1}{2\pi} \sum_{i<j} B_{ij} \, w_i \wedge w_j$$

Ne segue che in $\bigwedge^{2m} \mathbb{R}^{2m}$

$$(\frac{1}{2\pi} \sum_{i<j} A_{ij} \, v_i \wedge v_j)^m = (\frac{1}{2\pi} \sum_{i<j} B_{ij} \, w_i \wedge w_j)^m$$

da cui deduciamo, utilizzando la (36), che

$$T((\frac{1}{2\pi} \sum_{i<j} A_{ij} \, v_i \wedge v_j)^m) = T((\frac{1}{2\pi} \sum_{i<j} B_{ij} \, w_i \wedge w_j)^m) \in \mathbb{R}$$

D'altra parte si ha, con un semplice calcolo,

$$e(A) \;=\; \frac{1}{(2m)!} T(\frac{1}{2\pi} \sum_{i<j} A_{ij} \, v_i \wedge v_j)^m$$

e concludiamo quindi che $e(A)$ è $SO(k)$-invariante. Scelta una base diagonalizzante a blocchi per A, ossia tale che:

$$\begin{array}{rcl} Av_1 & = & \lambda_1 v_2 \\ Av_2 & = & -\lambda_1 v_1 \\ Av_3 & = & \lambda_2 v_4 \\ Av_4 & = & -\lambda_2 v_3 \\ \vdots & & \end{array}$$

possiamo scrivere la due forma associata ad A e alla base diagonalizzante come

$$-\frac{\lambda_1}{2\pi} v_1 \wedge v_2 - \frac{\lambda_2}{2\pi} v_3 \wedge v_4 \; - \ldots$$

da cui deduciamo che

$$e(A) \;=\; -\frac{\lambda_1}{2\pi}\cdot\dots\cdot -\frac{\lambda_m}{2\pi} \;=\; \frac{1}{(2\pi)^m}\,(-1)^m\,\lambda_1\cdot\dots\cdot\lambda_m.$$

La Proposizione è dimostrata.

Si noti che, in particolare,

$$e(A)^2 \;=\; \frac{1}{(2\pi)^k}\lambda_1^2\cdot\dots\cdot\lambda_m^2 \;=\; \frac{1}{(2\pi)^k}\,\det(A) \;=\; p_m(A)$$

ossia il quadrato del polinomio di Eulero è uguale all'ultimo polinomio di Pontryagin $p_m(A)$.

Abbiamo dimostrato il seguente risultato:

Proposizione 6. *Si ha un isomorfismo di anelli:*

$$I(SO(2m)) \;=\; \mathbb{C}[p_1,\dots,p_{m-1},p_m,e]/ < e^2 - p_m >$$

Si può allora dare la seguente

Definizione 11. Dato un fibrato reale orientabile E di rango $m = 2k$ sulla varietà M si indica con $e(E,\nabla^E) \in \Omega^{2m}(M)$ la **forma di Eulero** e si definisce la **classe di Eulero di** E come $[e(E,\nabla^E)] = e(E) \in H^{2m}(M,\mathbb{R})$. La sua espressione in coordinate locali è data attraverso la matrice della curvatura Ω come $e(\Omega)$.

Osservazione 1. Sia E un fibrato complesso e $E_{\mathbb{R}}$ la sua realizzazione; abbiamo visto che se E ha $\text{rango}_{\mathbb{C}} = m$ allora $E_{\mathbb{R}}$ ha $\text{rango}_{\mathbb{R}} = 2m$. Si osservi che poichè E è complesso segue che $E_{\mathbb{R}}$ è orientabile: infatti se $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to U(m)$ sono le funzioni di transizione di E, allora $(g_{\alpha\beta})_{\mathbb{R}} : U_\alpha \cap U_\beta \to SO(2m)$ sono per definizione le funzioni di transizione di $E_{\mathbb{R}}$ e sappiamo dalla formula (35) che

$$det(g_{\alpha\beta})_{\mathbb{R}} \;=\; det(g_{\alpha\beta})\cdot\overline{det(g_{\alpha\beta})} \;=\; |det(g_{\alpha\beta})|^2$$

Vale allora la seguente

Proposizione 7. *Risulta*

$$e(E_{\mathbb{R}}) \;=\; c_m(E) \qquad in \quad H^{2m}_{dR}(M,\mathbb{R}).$$

Dimostrazione: Basta ragionare su uno spazio vettoriale complesso E. Se $\langle\ ,\ \rangle_E$ indica la metrica hermitiana su E, la sua parte reale $\langle\ ,\ \rangle_{E_{\mathbb{R}}}$ è una metrica su $E_{\mathbb{R}}$; inoltre se $v_1,\dots,v_m$ è una base ortonormale di E allora $w_1 = v_1, w_2 = iv_1, w_3 = v_2,\dots,w_{2m} = iv_m$ è una base ortonormale di $E_{\mathbb{R}}$. Notiamo anche che una matrice antihermitiana A definisce un operatore antihermitiano su E una volta fissata una base ortonormale, e questo induce un operatore antisimmetrico su $E_{\mathbb{R}}$ con metrica $\langle\ ,\ \rangle_{E_{\mathbb{R}}}$; questo operatore ha matrice $A_{\mathbb{R}}$ rispetto alla base $\{w_1,\dots,w_{2m}\}$ e questa matrice è antisimmetrica. L'enunciato $e(A_{\mathbb{R}}) = c_m(A)$ ha quindi senso. Allora se $v_1,\dots,v_m$ è una base che diagonalizza A, ossia

$$\begin{array}{rcl} Av_1 & = & i\lambda_1 v_1 \\ \vdots & & \\ Av_m & = & i\lambda_m v_m \end{array} \quad , \qquad \lambda_i \in \mathbb{R}$$

si ottiene per la m-esima classe di Chern:

$$c_m(A) \;=\; \left(\frac{i}{2\pi}\right)^m (i\lambda_1)\cdot\dots\cdot(i\lambda_m) \;=\; \left(\frac{-1}{2\pi}\right)^m \lambda_1\cdot\dots\cdot\lambda_m.$$

D'altro canto

$$A_{\mathbb{R}}w_1 \;=\; Av_1 \;=\; i\lambda_1 v_1 = \lambda_1(iv_1) \;=\; \lambda_1 w_2\,, \qquad A_{\mathbb{R}}w_2 \;=\; -\lambda_1 w_1$$

quindi in questa base $A_{\mathbb{R}}$ si scrive in maniera diagonale a blocchi, ottenendo come visto

$$e(A_{\mathbb{R}}) = \left(\frac{-1}{2\pi}\right)^m \lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_m$$

e quindi il risultato.

Osservazione 2. Si verifica dalle definizioni che $e(A \oplus B) = e(a)\, e(B)$; in particolare anche la classe di Eulero è stabile.

7. **Lezione 7.**

7.1. **Connessione di Levi-Civita.**

Specializziamoci ora al caso $E = TM$. Si verifica facilmente che, per ogni connessione ∇ su TM,

$$T(X,Y) := \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]\,, \qquad X,Y \in C^\infty(M,TM),$$

è un tensore, detto *torsione* di ∇.

Definizione 12. Una connessione ∇ su TM è detta *simmetrica* se ha torsione nulla:

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X,Y]\,, \qquad X,Y \in C^\infty(M,TM).$$

Il risultato seguente è giustamente noto come il *teorema fondamentale della geometria riemanniana.*

Teorema 6. *Sia (M,g) una varietà riemanniana. Esiste un'unica connessione ∇ su TM simmetrica e compatibile con la metrica.*

La connessione di cui il teorema afferma l'esistenza è detta *connessione di Levi-Civita.*

Proof. Siano $X,Y,Z \in C^\infty(M,TM)$. Se ∇ esiste, dalla compatibilità con g segue:

$$X(g(Y,Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z).$$

Permutando ciclicamente X,Y e Z nella relazione precedente si ottengono altre due relazioni; sommando allora le prime due e sottraendo la terza si trova, tenendo conto della simmetria della connessione:

$$\begin{aligned}(37)\quad & X(g(Y,Z)) + Y(g(Z,X)) - Z(g(X,Y)) \\ &\qquad + g([X,Y],Z) - g([X,Z],Y) - g([Y,Z],X) = 2g(\nabla_X Y, Z).\end{aligned}$$

Da questa equazione e dalla non degeneratezza della metrica segue subito l'unicitá di ∇. Ma si ottiene subito anche l'esistenza: per X ed Y fissati il primo membro è un funzionale $C^\infty(M)$-lineare di Z, e dunque, per l'isomorfismo naturale tra T^*Me TM indotto dalla metrica, definisce un campo vettoriale $W_{X,Y}$ su M, che dipende $\mathbb{R}$-bilinearmente da X ed Y, e si verifica poi facilmente che $X \to W_{X,Y}$ è $C^\infty(M)$-lineare, e che $Y \to W_{X,Y}$ soddisfa la regola di Leibniz; pertanto $(X,Y) \to W_{X,Y}$ definisce una connessione su TM. $\square$

7.2. **Descrizione locale della connessione di Levi-Civita.**

La scorsa lezione abbiamo dimostrato il teorema fondamentale

Teorema 7. *Sia (M,g) una varietà riemanniana. Allora esiste ed è unica la connessione ∇ sul fibrato tangente TM che è simmetrica e compatibile con la metrica g.*

Questa connessione, detta di Levi-Civita, è esplicitamente definita dalla formula seguente:

$$(38)\qquad \begin{aligned} 2g(\nabla_X Y, Z) = \;& X(g(X,Z)) + Y(g(Z,X)) + \\ & -2(g(X,Y)) + g([X,Y],Z) + \\ & -g([X,Z],Y) - g([X,Z],Y) - g([Y,Z],X)\end{aligned}$$

Diamo ora una descrizione locale della connessione di Levi-Civita. Consideriamo una carta locale $(U,(x^1,...,x^n))$ e scegliamo X,Y,Z in una base locale per TM:

$$X := \frac{\partial}{\partial x^h} \quad , \quad Y := \frac{\partial}{\partial x^l} \quad , \quad Z := \frac{\partial}{\partial x^m}.$$

Ricordiamo allora che

$$\left[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right] = 0$$

e che

$$\nabla \frac{\partial}{\partial x^\ell} = \omega^i_\ell \frac{\partial}{\partial x^i}$$

dove $\omega^i_\ell \in \Omega^1(U)$. Esplicitando i coefficienti $\omega^i_\ell = \Gamma^i_{m\ell} dx^m$, $\Gamma^i_{m\ell} \in C^\infty(U)$ otteniamo la relazione

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^\ell} = \Gamma^i_{j\ell} \frac{\partial}{\partial x^i}. \tag{39}$$

I coefficienti Γ^i_{lm} si dicono *simboli di Christoffel.* Per darne un'espressione esplicita introduciamo le seguenti notazioni per gli elementi di matrice del tensore metrico:

$$g_{ij} := g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) \quad , \quad g^{ij} = (g_{ij})^{-1};$$

effettuando i prodotti scalari membro a membro nella (38) e sostituendo otteniamo

$$2\Gamma^l_{ij} = g^{lk}\left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right)$$

A partire dalla connesssione di Levi-Civita possiamo considerare la curvatura ∇^2. Sappiamo che localmente ∇^2 si presenta come una matrice di 2-forme Ω. Sappiamo anche, si veda l'Osservazione 2, che $\nabla^2 = R$ con

$$R(X,Y)(Z) = \left(\nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X,Y]}\right)(Z).$$

Si pone:

$$R\left(\frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^l}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) := R^i_{jkl} \frac{\partial}{\partial x_i}. \tag{40}$$

Classicamente i termini R^i_{jkl} sono i coefficienti di un tensore R, detto *tensore di curvatura.* Viene spesso utilizzato anche il tensore $R_{ijkl} := g_{im} R^m_{jkl}$ che può essere definito in maniera invariante come

$$R_{ijkl} := g\left(R\left(\frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^l}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right), \frac{\partial}{\partial x_i}\right).$$

Diamo l'espressione locale del tensore di curvatura della connessione di Levi-Civita in termini della metrica:

$$R^l_{kij} = \frac{\partial}{\partial x_i}\Gamma^l_{jk} - \frac{\partial}{\partial x_j}\Gamma^l_{ik} + \Gamma^l_{im}\Gamma^m_{jk} - \Gamma^l_{jm}\Gamma^m_{ik}$$

Il tensore di curvatura della connessione di Levi-Civita gode delle seguenti proprità:

$$\begin{aligned} &R(X,Y) = -R(Y,X)\,, \quad g(R(W,X)Y,Z) + g(Y, R(W,X)Z) = 0 \\ &R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0 \\ &g(R(W,X)Y,Z) = g(R(Y,Z)W,X) \end{aligned} \tag{41}$$

Le prime due relazioni esprimono rispettivamente il fatto che R è una due forma a valori endomorfismi e che $R_p(W,X)$ è un endomorfismo antisimmetrico di T_pM. La terza è ottenuta permutando ciclicamente X, Y, Z nella definizione di R, sommando e utilizzando il fatto che la connessione è priva di torsione. La quarta è una conseguenza algebrica delle prime tre. È ovvio come le (41) si traducano in proprietà di simmetria per gli indici di R^i_{jkl} e R_{ijkl}.

7.3. **Geodetiche di una varietà.**

Definizione 13. Sia M una varietà riemanniana, ∇ la connessione di Levi-Civita associata, $\gamma : I \to M$ una curva C^∞. γ si dice geodetica se è autoparallela, ovvero se $\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = 0$.

Osserviamo che poiché la connessione di Levi-Civita è compatibile con la metrica, il trasposto parallelo è un'isometria; ne segue che la norma di $\dot{\gamma}$ è costante lungo γ. A livello locale la condizione di autoparallelismo si esprime nel seguente sistema di equazioni differenziali ordinarie:

$$\frac{d^2\gamma}{dt^2} + \Gamma^i_{jk}(\gamma(t))\, \dot{\gamma}^j \dot{\gamma}^k = 0 \quad , \tag{42}$$

con $\gamma := (\gamma^1, ..., \gamma^n)$. Enunciamo ora un risultato di esistenza locale delle geodetiche. Osserviamo che se γ è una geodetica allora l'applicazione $t \mapsto \gamma(kt)$, $k \in \mathbb{R}$ definisce anch'essa una geodetica.

Teorema 8. *Sia m_0 appartenente ad una carta locale U in M. Allora esiste un intorno aperto U_{m_0} di m_0 ed un $\varepsilon > 0$ tali che per ogni $m \in U_{m_0}$, per ogni $v \in T_mM$ con $\|v\| < \varepsilon$ esiste ed è unica la geodetica $\gamma_v : (-2, 2) \to M$ tale che $\gamma_v(0) = m$, $\dot{\gamma}_v\,(0) = v$.*

La dimostrazione del teorema precedente si basa sul seguente risultato generale di esistenza ed unicità della soluzione locale di sistemi di equazioni differenziali, applicato alle (42).

Teorema 9. *Sia data $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un'applicazione C^∞, ed il sistema*

$$\frac{d^2x}{dt^2} = F\left(x, \frac{dx}{dt}\right) \quad , \quad x : I \subset \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{R}^n. \tag{43}$$

Allora per ogni $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ esiste un intorno $U \times V$ di (x_0, y_0) ed un $\varepsilon > 0$ tali che per ogni $(x, y) \in U \times V$ il sistema (43) ammette un'unica soluzione $x : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^n$ con $x(0) = x_0$, $\dot{x}\,(0) = y$.

Osserviamo che nel Teorema 8 ε è uniforme rispetto alla carta locale U. Abbiamo dunque un risultato di esistenza locale delle geodetiche; si puo dimostrare che tali curve sono quelle che minimizzano localmente la distanza tra due punti in una varietà riemanniana:

$$d(p, q) = \inf_\gamma L(\gamma)$$

dove l'estremo infreriore è valutato sulla classe delle curve che hanno estremi p e q. È importante notare che questa proprietà è solo locale. Per più dettagli si consulti, ad esempio, [6].

7.4. **Coordinate Normali.**

Definizione 14. Con la notazione del teorema 8, sia $m \in M$, V un intorno di m nel piano tangente T_mM. L'applicazione $exp_m(v) := \gamma_v(1) \in M$, con $v \in V$, si dice applicazione esponenziale.

Localmente exp_m è un diffeomorfismo. Per dimostrarlo facciamo l'identificazione $T_0(T_mM) \simeq T_mM$ e consideriamo il differenziale $dexp_m$ dell'applicazione esponenziale come un'applicazione da T_mM in sé; calcoliamo quindi, presa la curva $\gamma_w(t) := tw$ (ovviamente passante per l'origine e con vettore tangente w in 0),

$$\frac{d}{dt}(exp_w(tw))\bigg|_{t=0} = w.$$

L'identitá precedente ci dice che $dexp_m$, calcolata in 0, è l'identitá. Dunque il teorema delle funzioni implicite implica che exp_m è localmente un diffeomorfismo, come volevasi dimostrare.

Le coordinate definite dall'applicazione esponenziale exp_m si dicono *coordinate normali centrate in m*. Per costruzione i vettori $\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{m_0}$ costituiscono una base ortonormale di $T_{m_0}M$ e quindi

$$g_{ij}(x) = \delta_{ij} + O(|x|)$$

in un intorno di 0. Mostriamo come sia possibile migliorare questa stima utilizzando le coordinate normali.

Proposizione 8. *In coordinate normali* $\Gamma^k_{ij}(0) = 0$.

Dimostrazione Per avere l'asserto basta mostrare che nell'origine

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = 0; \tag{44}$$

Consideriamo il campo vettoriale costante

$$X := \sum_i a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad , \quad a_i \in \mathbb{R};$$

dimostreremo fra un attimo che $\nabla_X X = 0$ nell'origine. Assumendo questo risultato e scegliendo opportunamente i coefficienti a_i otteniamo la (44) dal seguente calcolo

$$\begin{aligned}
\nabla_{\left(\frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{\partial}{\partial x^j}\right)} \left(\frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{\partial}{\partial x^j}\right) &= \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \left(\frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{\partial}{\partial x^j}\right) + \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \left(\frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{\partial}{\partial x^j}\right) \\
&= \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^i} + \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^i} + \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} + \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^j} \\
&= 2\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j}.
\end{aligned}$$

dove abbiamo anche utilizzato la simmetria della connessione. Dunque rimane da dimostrare che $\nabla_X X = 0$ nell'origine. Ciò è però chiaro una volta osservato che X è il campo tangente ai raggi uscenti dall'origine, cioè alle geodetiche di M per il punto fissato; ne segue, dalla definizione stessa di geodetica, che $\nabla_X X = 0$ lungo tale raggio. La proposizione è dimostrata.

Ricordiamo ora che la connessione di Levi-Civita è compatibile con la metrica, ovvero

$$X(g(Y,Z)) = g(\nabla_X, Z) + g(Y, \nabla_X Z);$$

scrivendo l'uguaglianza precedente in termini di elementi della base otteniamo

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^p} = \Gamma^l_{pi} g_{lj} + \Gamma^l_{pj} g_{pi}$$

il che implica, scrivendo tali relazioni nell'origine e tenendo conto della proposizione precedente, che lo sviluppo di Taylor della metrica in un intorno di 0 non contiene termini lineari; in formule

$$g_{ij} = \delta_{ij} + O(|x|^2). \tag{45}$$

Più precisamente vale la seguente proposizione che non utilizzeremo e della quale omettiamo quindi la dimostrazione

Proposizione 9. *Sia* $m \in M$ *e fissiamo coordinate normali centrate in* m. *In un'intorno dell'origine si ha*

$$g_{ij}(x) = \delta_{ij} - \frac{1}{3} R_{ikjl}(0) x^k x^l + O(|x|^3).$$

Consideriamo ora un fibrato vettoriale $E \to M$ dotato di metrica $(\,,\,)$, una connessione compatibile ∇, un punto $m \in M$ e la fibra E_m. Fissata una base ortonormale di E_m possiamo effettuare il trasporto parallelo lungo le geodetiche ed ottenere una base locale $\{s_i\}$. Poiché ∇ è compatibile con la metrica, il trasporto paralleo è un'isometria e ne segue quindi che $\{s_i\}$ è ortonormale; l'espressione locale di ∇ è del tipo $\nabla s_i = \omega_i^j s_j$ con ω una matrice antisimmetrica di 1-forme. Scriviamo $\omega_i^j = \Delta_{ki}^j dx^k$, con Δ_{ik}^j funzioni C^∞ in un intorno opportuno di m. La seguente proposizione sarà utile nella dimostrazione del teorema dell'indice:

Proposizione 10. *Risulta*

$$\Delta_{jk}^l(x) = -\frac{1}{2}\Omega_{kij}^l(0)x^i + O(|x|^2).$$

Dimostrazione Innanzitutto osserviamo che deve essere, in modo del tutto analogo al caso in cui E è il fibrato tangente,

$$\Delta_{ki}^l(0) = 0 \tag{46}$$

(si veda la Proposizione 8). Calcoliamo ora (usando la notazione $\nabla_i := \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}}$)

$$\begin{aligned}
\Omega_{kij}^l(0) &= \left(\nabla^2(0)\left(\tfrac{\partial}{\partial x_i}, \tfrac{\partial}{\partial x_j}\right)(s_k), s_l^*\right) \\
&= (\nabla_i \nabla_j(s_k) - \nabla_j \nabla_i(s_k), s_l^*) \\
&= \left(\nabla_i\left(\Delta_{kj}^n s_n\right) - \nabla_j\left(\Delta_{ki}^m s_m\right), s_l^*\right) \\
&= \left(\tfrac{\partial}{\partial x_i}\Delta_{kj}^l - \tfrac{\partial}{\partial x_j}\Delta_{ki}^l\right)(0);
\end{aligned}$$

per avere l'asserto rimane dunque da dimostrare che $\frac{\partial}{\partial x_i}\Delta_{kj}^l = -\frac{\partial}{\partial x_j}\Delta_{ki}^l$ in 0. A tale scopo consideriamo il seguente campo di vettori tangenti alle geodetiche uscenti da m

$$X := \sum_i a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad , \quad a_i \in \mathbb{R}.$$

Per costruzione deve essere $\nabla_X s_j = 0$ lungo X. In particolare $\nabla_X \nabla_X s_j = 0$ nell'origine; scrivendo questa relazione in coordinate otteniamo

$$\begin{aligned}
\nabla_X \nabla_Y(s_j) &= \nabla_X\left(\sum_i a_i \nabla_i(s_j)\right) \\
&= \sum_i a_i \nabla_X \nabla_i(s_j) \\
&= \sum_{il} a_i a_l \nabla_l \nabla_i(s_j) \\
&= \sum_{il} a_i a_l \nabla_l\left(\Delta_{ji}^m s_m\right) \\
&= \sum_{il} a_i a_l\left(\tfrac{\partial}{\partial x_l}\Delta_{ji}^m\right)(s_m) = 0
\end{aligned}$$

nell'origine, avendo usato la regola di Leibniz e (46). Dunque, in 0

$$\sum_{il} a_i a_l\left(\frac{\partial}{\partial x_l}\Delta_{ji}^m\right)(s_m) = 0;$$

a questo punto scegliamo $X = \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_l}$, ovvero $a_i = 1$, $a_l = -1$, e $a_k = 0$ per $k \neq i, l$, ottenendo nell'origine, $-\frac{\partial}{\partial x_l}\Delta_{ji}^m - \frac{\partial}{\partial x_i}\Delta_{jl}^m = 0$ da cui l'asserto.

8. **Lezione 8.**

8.1. **Varietà complesse.**

Sia M una varietà complessa [6] di dimensione complessa n. Sia TM il suo fibrato tangente reale, un fibrato reale di rango $2n$. Sia $TM \otimes \mathbb{C}$ il complessificato di TM, un fibrato complesso di dimensione complessa $2n$.
Supponiamo dapprima che $M = \mathbb{C}^n$ e sia $p \in \mathbb{C}^n$. Sia $C_p^\infty(\mathbb{C}^n, \mathbb{R})$ l'algebra dei germi in p di funzioni C^∞ a valori reali; sia $C_p^\infty(\mathbb{C}^n, \mathbb{C})$ l'algebra dei germi in p di funzioni C^∞ a valori complessi; sia $\mathcal{O}_p(\mathbb{C}^n)$ (rispettivamente $\overline{\mathcal{O}}_p(\mathbb{C}^n)$) la sottoalgebra di $C_p^\infty(\mathbb{C}^n, \mathbb{C})$ costituita dai germi di funzioni olomorfe (rispettivamente antiolomorfe). Indichiamo le coordinate con $(z_1, \ldots, z_n) = (x_1 + iy_1, \ldots, x_n + iy_n)$. Sia $T_p\mathbb{C}^n$ lo spazio tangente a $\mathbb{C}^n$ in p e cioè, per definizione, lo spazio vettoriale reale costituito delle derivazioni $\mathbb{R}$-lineari di $C_p^\infty(\mathbb{C}^n, \mathbb{R})$. Una base per $T_p\mathbb{C}^n$ è costituita da

$$\{\frac{\partial}{\partial x_j}\big|_p, \frac{\partial}{\partial y_j}\big|_p; \; j = 1, \ldots, n\}$$

Lo spazio vettoriale $T_p\mathbb{C}^n \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$, che denoteremo semplicemente $T_p\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}$, è lo spazio vettoriale complesso delle derivazioni $\mathbb{C}$-lineari dell'algebra $C^\infty(\mathbb{C}^n, \mathbb{C})$. Se definiamo i campi di vettori

$$\frac{\partial}{\partial z_j} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x_j} - i\frac{\partial}{\partial y_j}), \qquad \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x_j} + i\frac{\partial}{\partial y_j}),$$

allora vediamo che una base complessa di $T_p\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}$ è data dalle derivazioni

$$\{\frac{\partial}{\partial z_j}\big|_p, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}\big|_p; \; j = 1, \ldots, n\}$$

Siano

$$T_p^{1,0}\mathbb{C}^n := \{v \in T_p\mathbb{C}^n \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \mid v[f] = 0 \;\; \forall [f] \in \overline{\mathcal{O}}_p(\mathbb{C}^n)\}$$

e

$$T_p^{0,1}\mathbb{C}^n := \{v \in T_p\mathbb{C}^n \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \mid v[f] = 0 \;\; \forall [f] \in \mathcal{O}_p(\mathbb{C}^n)\}$$

Allora è facile dimostrare che

$$T_p\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C} = T_p^{1,0}\mathbb{C}^n \oplus T_p^{0,1}\mathbb{C}^n \tag{47}$$

$$T_p^{1,0}\mathbb{C}^n = \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\,(\frac{\partial}{\partial z_1}\big|_p, \ldots, \frac{\partial}{\partial z_n}\big|_p) \tag{48}$$

$$T_p^{0,1}\mathbb{C}^n = \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\,(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_1}\big|_p, \ldots, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_n}\big|_p) \tag{49}$$

Esiste inoltre una naturale operazione di coniugio in $T_p\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}$ e

$$T_p^{0,1}\mathbb{C}^n = \overline{T_p^{1,0}\mathbb{C}^n} \tag{50}$$

Se ora M è una varietà complessa allora $\forall p \in M$ possiamo definire T_pM, $T_pM \otimes \mathbb{C}$, $T_p^{1,0}M$, $T_p^{1,0}M$ e considerando coordinate locali scopriamo che $T^{1,0}M := \cup_p T_p^{1,0}M$ è un sottofibrato di $TM \otimes \mathbb{C}$ con funzioni di transizione fra le carte $(U, (z_1, \ldots, z_n))$ e $(W, (w_1, \ldots, w_n))$ date da

$$\left(\frac{\partial w_j}{\partial z_i}\right)$$

[6] per nozioni di base di teoria delle funzioni di più variabili complesse vi rimando a [3] Capitolo 0, Sezione 1

Trattasi quindi di un fibrato *olomorfo*. Il fibrato $T^{1,0}M$ è detto il fibrato tangente olomorfo. Analogamente $T^{0,1}M := \cup_p T_p^{0,1}M$ è un sottofibrato di $TM \otimes \mathbb{C}$, detto il fibrato tangente antiolomorfo. Vale l'analoga di (50):

$$T^{0,1}M = \overline{T^{1,0}M} \tag{51}$$

Notiamo infine che $(T^{1,0}M)_{\mathbb{R}}$ è isomorfo a TM con isomorfismo indotto dalla mappa

$$(T^{1,0}M)_{\mathbb{R}} \ni v \to 2\mathrm{Re}(v) \equiv v + \overline{v} \in TM \otimes \mathbb{C}$$

che ha ovviamente valori in TM. [7] La moltiplicazione per i in $T^{1,0}M$ induce tramite l'isomorfismo 2Re( ) un operatore $J \in C^\infty(M, \mathrm{End}(TM))$ tale che $J_p^2 = -1\ \forall p \in M$. Possiamo utilizzare questo operatore per definire una struttura di fibrato vettoriale complesso in TM:

$$(\alpha + i\beta)v_p := \alpha v_p + J_p(\beta v_p)\,.$$

In generale, una struttura quasi-complessa su una varietà *reale* è un elemento $J \in C^\infty(M, \mathrm{End}(TM))$ tale che $J_p^2 = -1\ \forall p \in M$. Abbiamo appena dimostrato che la varietà reale associata ad una varietà complessa ha una naturale struttura quasi-complessa. Una struttura quasi-complessa su una varietà reale non è detto che esista [8]. Se esiste una struttura quasi-complessa allora possiamo definire, come sopra, una naturale struttura di fibrato complesso in TM. Esistono strutture quasi-complesse che non provongono da alcuna struttura complessa (ad esempio in S^6).

Analoghe considerazioni valgono per il duale T^*M di TM. Quindi

$$T^*M \otimes \mathbb{C} = \Lambda^{1,0}(M) \oplus \Lambda^{0,1}(M) \tag{52}$$

con descrizione locale data in termini delle 1-forme duali ai campi tangenti olomorfi e anti-olomorfi:

$$dz_j = dx_j + i\,dy_j\,, \qquad d\bar{z}_j = dx_j - i\,dy_j$$

Si ha anche, come nel caso del fibrato tangente,

$$\Lambda^{0,1}(M) = \overline{\Lambda^{1,0}(M)}. \tag{53}$$

Localmente $\bigwedge^{1,0}(M)$ ha base locale data da $dz_1, \ldots, dz_n$ e $\bigwedge^{0,1}(M)$ ha base locale $d\bar{z}_1, \ldots, d\bar{z}_n$. Osserviamo che, in generale, per due spazi vettoriali E, F

$$\Lambda^r(E \oplus F) = \oplus_{r=p+q}\Lambda^{p,q}$$

con $\bigwedge^{p,q} := \mathrm{Span}\{e \wedge f\,, e \in \bigwedge^p E\,, f \in \bigwedge^q F\,\}$. Ciò implica la decomposizione $\bigwedge^r(T^*M \otimes \mathbb{C}) = \oplus_{r=p+q}\bigwedge^{p,q}(M)$ dove $\bigwedge^{p,q}(M)$ sono le forme di grado $p+q$ localmente esprimibili come combinazioni lineari di $dz^{j_1} \wedge \cdots \wedge dz^{j_p} \wedge d\bar{z}^{i_1} \wedge \cdots \wedge d\bar{z}^{i_q}$. Si noti che si può scrivere l'operatore di derivazione d come:

$$d = \partial + \bar{\partial} \quad \text{con} \quad \partial^2 = \bar{\partial}^2 = \partial\bar{\partial} + \bar{\partial}\partial = 0$$

dove $\partial : \bigwedge^{p,q}(M) \to \bigwedge^{p+1,q}(M)$ e $\bar{\partial} : \bigwedge^{p,q}(M) \to \bigwedge^{p,q+1}(M)$ sono ottenuti per proiezione. Esplicitamente

$$\partial(a_{JI}dz^{j_1} \wedge \cdots \wedge dz^{j_p} \wedge d\bar{z}^{i_1} \wedge \cdots \wedge d\bar{z}^{i_q}) = \sum_\ell \frac{\partial}{\partial z_\ell} a_{JI} dz^\ell \wedge dz^{j_1} \wedge \cdots \wedge dz^{j_p} \wedge d\bar{z}^{i_1} \wedge \cdots \wedge d\bar{z}^{i_q}$$

e analogamente per $\overline{\partial}$.

[7] infatti, una base locale reale di $(T^{1,0}M)_{\mathbb{R}}$ è data da $\frac{\partial}{\partial z_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial z_n}, i\frac{\partial}{\partial z_1}, \ldots, i\frac{\partial}{\partial z_n}$ e questa base è chiaramente inviata in $\{\frac{\partial}{\partial x_j}\,, \frac{\partial}{\partial y_j}\}$

[8] È semplice convincersi, ad esempio, che M deve avere dimensione pari: tuttavia ciò non è sufficiente, S^4 ad esempio, non ammette strutture quasi-complesse

8.2. **Metriche hermitiane. Forma di Kähler.**

Una metrica hermitiana h su una varietà complessa M è, per definizione, una metrica hermitiana sul fibrato tangente olomorfo $T^{1,0}M$; in particolare

$$h \in C^\infty(M, (T^{1,0}M \otimes \overline{T^{1,0}M})^*) = C^\infty(M, (T^{1,0}M \otimes T^{0,1}M)^*) = C^\infty(M, \Lambda^{1,0}M \otimes \Lambda^{0,1}M)\,.$$

La coppia (M, h) è detta una varietà hermitiana. Localmente possiamo scrivere la metrica hermitiana come:

$$h = h_{ij}(z)dz_i \otimes d\overline{z}^j\,.$$

Se $\{\phi_j\,; j = 1, \dots, n\}$ è la base duale ad una base ortonormale di $T^{1,0}M$ allora

$$h = \sum_j \phi_j \otimes \overline{\phi_j}$$

La parte reale e la parte immaginaria di h definiscono rispettivamente una forma bilineare simmetrica e una forma bilineare antisimmetrica sul fibrato reale $(T^{1,0}M)_\mathbb{R}$. Tramite l'isomorfismo $(T^{1,0}M)_\mathbb{R} \simeq TM$ otteniamo una metrica riemanniana $g := \mathrm{Re}h$ su TM e una due-forma reale $\omega := -\frac{1}{2}\mathrm{Im}h$ su M. La 2 forma ω è detta la forma di Kähler associata alla varietà hermitiana (M, h). Esplicitamente, se $\phi_j = \alpha_j + \sqrt{-1}\beta_j$, con α_j, β_j 1-forme reali, allora

$$h = \sum_j \phi_j \otimes \overline{\phi_j} = (\sum_j(\alpha_j + \sqrt{-1}\beta_j)) \otimes (\sum_j(\alpha_j - \sqrt{-1}\beta_j))$$

e quindi

$$h = \sum_j(\alpha_j \otimes \alpha_j + \beta_j \otimes \beta_j) + \sqrt{-1}\sum_j(-\alpha_j \otimes \beta_j + \beta_j \otimes \alpha_j)$$

da cui deduciamo che la metrica riemanniana g è data da $\sum_j(\alpha_j \otimes \alpha_j + \beta_j \otimes \beta_j)$ mentre la forma di Kähler è data da

$$\omega = \sum_j \alpha_j \wedge \beta_j = \frac{\sqrt{-1}}{2}\sum_j \phi_j \wedge \overline{\phi_j}$$

Notiamo che la forma di volume associata a $g = \sum_j(\alpha_j \otimes \alpha_j + \beta_j \otimes \beta_j)$ è data da

$$d\mathrm{vol}_g := \alpha_1 \wedge \beta_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_n \wedge \beta_n$$

ed è facile verificare che

$$d\mathrm{vol}_g = \frac{\omega^n}{n!} \tag{54}$$

Sia ora $E \to M$ un fibrato complesso olomorfo su M. Si osservi che risulta ben definito l'operatore

$$\bar\partial\,:\, C^\infty(M, \textstyle\bigwedge^{p,q}(M) \otimes E) \longrightarrow C^\infty(M, \textstyle\bigwedge^{p,q+1}(M) \otimes E)\,.$$

Più precisamente, se $\{e_j\}$ è una base locale olomorfa di E, allora, per definizione:

$$\bar\partial\,:\,(\omega \otimes e_j) \longmapsto \bar\partial\omega \otimes e_j$$

dove $\omega \otimes e_j \in C^\infty(M, \bigwedge^{p,q}(M) \otimes E)$, se $\omega \in \bigwedge^{p,q}(M)$ (è facile vedere che la definizione non dipende dalla base olomorfa scelta).

In particolare esiste l'operatore $\bar\partial : C^\infty(M, E) \to C^\infty(M, \bigwedge^{0,1}(M) \otimes E)$. Si può dare allora la seguente

Definizione 15. Sia ∇ una connessione su E. Si dirà che ∇ è una **connessione complessa** se risulta:

$$\prod^{0,1} \nabla s \,=\, \bar{\partial} s\,, \qquad s \in C^{\infty}(M,E)$$

dove $\prod^{0,1} \nabla : C^{\infty}(M, \bigwedge^1(M) \otimes E) \to C^{\infty}(M, \bigwedge^{0,1}(M) \otimes E)$ è la proiezione della connessione ∇ sulla parte antiolomorfa di grado 1 delle sezioni a valori nel fibrato $\bigwedge^1(M) \otimes E$.

Osservazione. Rispetto ad una base olomorfa una connessione complessa ha forma di connessione di tipo $(1,0)$.

Vale il seguente risultato, analogo al teorema di Levi - Civita:

Proposizione 11. *Sia E un fibrato olomorfo. Data una metrica hermitiana su E esiste ed è unica la connessione complessa con essa compatibile.*

Dimostrazione Mostriamo inizialmente l'unicità. Sia $\{e_i\}$ è una base locale olomorfa di E per l'aperto U ed $h = h_{ij} = h(e_i, e_j)$ una metrica su E. Allora vale per compatibilità:

$$d\, h_{ij} \,=\, (\omega_i^l e_l, e_j) \,+\, (e_i, \omega_j^k e_k) \,=\, \omega_i^l\, h_{lj} \,+\, \bar{\omega}_j^k h_{ik}\,. \tag{55}$$

Poichè si ha $\omega_i^l \in \bigwedge^{1,0}(U)$ dalla (55) segue:

$$d\, h_{ij} \,=\, \partial\, h_{ij} \,+\, \bar{\partial}\, h_{ij} \,=\, \omega_i^l\, h_{lj} \,+\, \bar{\omega}_j^k h_{ik} \tag{56}$$

dove il primo addendo nel termine a destra è una forma di tipo $(1,0)$ e il secondo di tipo $(0,1)$. Quindi dalla (56) si ottiene $\partial h_{ij} = \omega_i^l\, h_{lj}$, e la sua complessa coniugata , che si che si può riscrivere come:

$$\omega \,=\, \partial\, h\, h^{-1}\,. \tag{57}$$

Infine, per ottenere l'esistenza, si verifica che la (57) definisce effettivamente una connessione come nell'enunciato (basta utillizzare il fatto che le funzioni di transizione sono olomorfe, i.e. $\overline{\partial} g_{\alpha\beta} = 0$ e quindi $dg_{\alpha\beta} = \partial g_{\alpha\beta}$).

Corollario 5. *Risulta in questo caso:*

$$\Omega \,=\, \bar{\partial}\omega$$

Dimostrazione Per quanto visto vale:

$$\partial\omega = \partial\,(\partial h h^{-1}) = \partial\, h\, \partial(h^{-1}) = -\partial h\, h^{-1} \wedge \partial h\, h^{-1} = -\omega \wedge \omega.$$

D'altro canto $\Omega = d\omega + \omega \wedge \omega = \partial\omega + \bar{\partial}\omega + \omega \wedge \omega$ quindi il risultato.

Osservazione. Ω è una forma di tipo $(1,1)$.

Esempio. Si consideri in generale $L \to M$ un fibrato complesso olomorfo di rango 1. Su ogni aperto U_α la metrica è definita attraverso una singola funzione reale $h_\alpha > 0$, con $h_\alpha \in C^{\infty}(U_\alpha)$. Indicando con $g_{\alpha\beta}$ le funzioni di transizione su $U_\alpha \cap U_\beta$, vale $h_\alpha = |g_{\alpha\beta}|^2\, h_\beta$. Per quanto visto, si ha allora $\omega_\alpha = \partial h_\alpha\, h_\alpha^{-1} = \partial\, log\, h_\alpha$ da cui:

$$\Omega_\alpha \,=\, \bar{\partial}\,\partial\, log\, h_\alpha \,=\, -\,\partial\,\bar{\partial}\, log\, h_\alpha\,.$$

Esempio. Sia ora M una superficie di Riemann (ossia una varietà complessa di dimensione 1), allora $T^{1,0}M$ è un fibrato complesso olomorfo di rango 1, isomorfo sui reali a TM. Sia h una metrica hermitiana su $T^{1,0}M$. Sappiamo che la h definisce una metrica riemanniana su TM. Sia

∇ l'unica connessione complessa compatibile con la metrica. Per quanto visto, si ha per la prima classe di Chern:

$$\begin{aligned} c_1(T^{1,0}M, \nabla) &= \tfrac{1}{2\pi i}\, \partial\, \bar{\partial}\, log\, h = \tfrac{1}{2\pi i}\, \tfrac{\partial}{\partial\, z}\, \tfrac{\partial}{\partial\, \bar{z}}\, log\, h\, dz \wedge d\bar{z} = \\ &= \tfrac{1}{2\pi i}\, \tfrac{1}{4}\, \Delta\, log\, h\, dz \wedge d\bar{z} = \tfrac{1}{2\pi}\, (-\tfrac{1}{2h}\, \Delta\, log\, h)\, \tfrac{ih}{2}\, dz \wedge d\bar{z} = \\ &= \tfrac{1}{2\pi}\, K\, d\, vol_M \end{aligned}$$

dove K e $d\, vol_M$ sono la curvatura gaussiana e la forma di volume associate alla metrica riemanniana definita da h [9]. Quindi vale:

$$\int_M c_1(T_{1,0}M) \;=\; \frac{1}{2\pi} \int_M K\, d\, vol_M$$

e quindi per il teorema di Gauss-Bonnet

$$\int_M c_1(T_{1,0}M) \;=\; \chi(M) \;= 2 - 2g$$

dove g è il genere di M. Dato che $(T^{1,0}M)_{\mathbb{R}} = TM$ otteniamo anche

$$\int_M e(TM) \;=\; \int_M c_1(T_{1,0}M)$$

Esempio. Se $L \to \mathbb{C}P^1$ è il fibrato tautologico dello spazio proiettivo unidimensionale, vale:

$$\int_{\mathbb{C}P^1} c_1(L) \;=\; -1\,.$$

Per la verifica del risultato, si scriva $\mathbb{C}P^1 = \{[z_0, z_1] \in \mathbb{C}^2 \setminus 0\}$ e $U \cup V = \mathbb{C}P^1$ un suo ricoprimento tramite i due aperti $U = \{z_0 \neq 0\}$ e $V = \{z_1 \neq 0\}$. Su U e V si individuano due carte locali:

$$\begin{array}{ll} U & \longrightarrow \mathbb{C} \\ [z_0, z_1] & \longmapsto z = \frac{z_1}{z_0} \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ll} V & \longrightarrow \mathbb{C} \\ [v_0, v_1] & \longmapsto v = \frac{v_0}{v_1} \end{array}\,.$$

Si ricordi che il fibrato $L \to \mathbb{C}P^1$ è definito come $L = \{([x], v) \in \mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}^2 : v = \lambda[x]\}$, e che la base locale è data per le due carte da:

$$s_U : \begin{array}{ll} U & \longrightarrow L|_U \\ [z_0, z_1] & \longmapsto ([z_0, z_1]\,, (1, z))\,, \end{array} \qquad\qquad s_V : \begin{array}{ll} V & \longrightarrow L|_V \\ [v_0, v_1] & \longmapsto ([v_0, v_1]\,, (v, 1)) \end{array}$$

ossia in breve, $s_U : z \mapsto (z, (1, z))$ e $s_V : v \mapsto (v, (v, 1))$ rispettivamente. Se p è un elemento dell'intersezione $U \cap V$ con coordinate v in V e z in U vale $s_V(p) = (v, 1) = (\frac{1}{z}, 1) = \frac{1}{z}(1, z) = \frac{1}{z} s_U(p)$, ossia $z\, s_V = s_U$ come deve essere. Quindi s_U e s_V costituiscono due basi locali olomorfe. La metrica indotta su L da $\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}^2$ è nei due casi:

$$\|s_U(z)\|^2 \;=\; 1 + z^2 \;=\; h(z)\,, \qquad\qquad \|s_V(v)\|^2 \;=\; 1 + v^2 \;=\; h(v)\,.$$

Sia ora ∇ l'unica connessione complessa compatibile con la metrica; allora

$$\omega_U = \partial h \cdot h^{-1} = \frac{\bar{z}}{(1 + |z|^2)}\, dz\;,$$

da cui

$$\Omega_U \;=\; \bar{\partial}\omega \;=\; \frac{d\bar{z} \wedge dz}{(1 + |z|^2)^2} \;=\; \frac{2idx \wedge dy}{(1 + |x|^2 + |y|^2)^2}\,.$$

[9] per la formula sulla curvatura gaussiana si consulti ad esempio *Modern Geometry* di Doubrovine, Novikov, Fomenko; per la forma di volume si veda la (54).

Analogamente $\Omega_V = \frac{d\bar{v}\wedge dv}{(1+|v|^2)^2}$. Da queste si ha:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{C}P^1} c_1(L) &= \int_{\mathbb{C}P^1} c_1(L,\nabla) = \int_U \tfrac{i}{2\pi}\,\Omega_U = \int_U \tfrac{-1}{\pi}\,\tfrac{dx\wedge dy}{(1+|x|^2+|y|^2)^2} = \\ &= -\tfrac{1}{\pi}\int_0^\infty\int_0^{2\pi} \tfrac{\rho\,d\rho d\,\theta}{(1+\rho^2)^2} = \tfrac{-1}{\pi}\cdot\pi = -1 \end{aligned}$$

quindi il risultato, che indica come $c_1(L)$ è chiusa ma non esatta, ossia come il fibrato L sia non banale.

8.3. **Tre** *best sellers* **della geometria moderna.**

A questo punto si hanno tutti gli strumenti per poter enunciare tre importanti teoremi, veri e propri *best sellers* della geometria moderna; *la dimostazione di questi risultati sarà ottenuta come applicazione del teorema dell'indice di Atiyah - Singer.*

Teorema 10. *(Chern - Gauss - Bonnet) Sia M una varietà compatta senza bordo e orientabile di dimensione $2m$. Indicata con*

$$\chi(M) = \sum_{i=0}^{2m}(-1)^i \dim H^i_{dR}(M,\mathbb{R})$$

la caratteristica di Eulero - Poincaré di M, si ha:

$$\int_M e(M,\nabla^{TM}) = \chi(M)$$

Osservazione. La caratteristica di Eulero - Poincaré si può definire anche a partire dalla coomologia singolare.

Teorema 11. *(della segnatura di Hirzebruch) Sia M come nel teorema (10) di dimensione $4m$. Si consideri la forma bilineare simmetrica*

$$H^{2m}_{dR}(M,\mathbb{R})\times H^{2m}_{dR}(M,\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

che agisce sulle coppie di $2m$-forme come:

$$([\alpha],[\beta]) \longmapsto \int_M [\alpha\wedge\beta]$$

e sia $\sigma(M)$ la sua segnatura. Si ha

$$\sigma(M) = \int_M L(M)$$

dove $L(M) = [L(TM,\nabla^{TM})]$ è la classe di Hirzebruch.

Sia M una varietà complessa ed E un fibrato olomorfo. Abbiamo visto come sia possibile definire l'operatore

$$\bar\partial : C^\infty(M,{\textstyle\bigwedge}^{p,q}(M)\otimes E) \longrightarrow C^\infty(M,{\textstyle\bigwedge}^{p,q+1}(M)\otimes E)\,.$$

Dato che $(\bar\partial)^2 = 0$ otteniamo un *complesso*

$$\cdots \to C^\infty(M,{\textstyle\bigwedge}^{0,q}(M)\otimes E) \xrightarrow{\bar\partial} C^\infty(M,{\textstyle\bigwedge}^{p,q+1}(M)\otimes E) \to \dots$$

I gruppi di coomologia di Dolbeault $H^{0,i}_{\bar\partial}(M,E)$ sono per definizione i gruppi di coomologia di questo complesso. Il teorema di Dolbeault, analogo complesso del teorema di de Rham, afferma che

$$H^{0,i}_{\bar\partial}(M,E) \simeq H^i(M,\mathcal{O}(E))\,,$$

dove a destra compaiono i gruppi di coomologia a valori nel fascio delle sezioni olomorfe di E [10]. Indicando con

$$\chi(M,\, \mathcal{O}(E)) \;=\; \sum_i (-1)^i \dim H^i(M, \mathcal{O}(E))$$

la caratteristica di Eulero della coomologia a valori nel fascio $\mathcal{O}(E)$, si ha il seguente importante teorema

Teorema 12. *(Riemann - Roch - Hirzebruch) Sia M una varietà complessa ed E un fibrato olomorfo. Risulta*

$$\chi(M,\, \mathcal{O}(E)) \;=\; \int_M Td(M) \wedge Ch(E)$$

dove $Td(M) \;=\; [Td(T^{1,0}M,\, \nabla)]$ è la classe di Todd di M e $Ch(E)$ la classe di Chern di E. In particolare per il genere aritmetico della varietà, $\chi(M, \mathcal{O})$, risulta

$$\chi(M,\, \mathcal{O}) \;=\; \int_M Td(M)$$

Otterremo questi tre teoremi come corollari del teorema dell'indice di Atiyah-Singer.

[10] per la definizione si consulti, as esempio, [3] o anche [9] [10]

9. **Lezione 9.**

9.1. **Algebre di Clifford.**

Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione finita dotato di una forma bilineare simmetrica q [11].

Definizione 16. L'*algebra di Clifford* $Cl(V,q)$ associata a V e q è per definizione il quoziente $T(V)/I(V)$ dell'algebra tensoriale $T(V) = \sum_r V^{\otimes r}$ per l'ideale $I(V) \subset T(V)$ generato dagli elementi del tipo $v \otimes w + w \otimes v + 2q(v,w)$ con $v, w \in V$.

La proiezione naturale $T(V) \to Cl(V,q)$ fornisce un'applicazione $V \to Cl(V,q)$. Non è difficile dimostrare che $V \cap I(V) = 0$, per cui $V \to Cl(V,q)$ è iniettiva.
Per $Cl(V,q)$ vale la proprietà universale enunciata nella seguente:

Proposizione 12. *Sia A un'algebra con unità e $f : V \to A$ un'applicazione lineare tale che*

$$f(v) \cdot f(w) + f(w) \cdot f(v) = -2q(v,w) \cdot 1_A\,, \quad \textit{per ogni} \quad v, w \in V;$$

allora esiste un unico omomorfismo di algebre $\tilde{f} : Cl(V,q) \to A$ che estende f. A meno di isomorfismi, $Cl(V,q)$ è caratterizzata da questa proprietà.

Dimostrazione. Per la proprietà universale di $T(V)$ esiste $f^{\otimes} : T(V) \to A$ che estende f. Per l'ipotesi su f, $f^{\otimes}$ passa al quoziente e fornisce la $\tilde{f}$ voluta. Inoltre, sia C un'altra algebra contenente V che soddisfi la medesima proprietà; entrambe le inclusioni $V \to C$, $V \to Cl(V,q)$ si estendono rispettivamente a $\phi : Cl(V,q) \to C$, $\psi : C \to Cl(V,q)$. Componendo, otteniamo $\psi \circ \phi : Cl(V,q) \to Cl(V,q)$ che estende l'inclusione $V \to Cl(V,q)$; dato che l'estensione è unica, $\psi \circ \phi$ è l'identità e ϕ e ψ sono una l'inversa dell'altra. □

9.2. **Moduli di Clifford.**

Definizione 17. Un *modulo di Clifford* è uno spazio vettoriale E dotato di un'azione dell'algebra $Cl(V,q)$, cioè un omomorfismo di algebre con unità $c : Cl(V,q) \to End(E)$. Se E è dotato di metrica $(\cdot,\cdot)_E$ l'azione può essere *unitaria* il che avviene qualora $c(v) \in O(E, (\cdot,\cdot)_E)$ per ogni $v \in V$ di norma unitaria.

Osserviamo che se E è un modulo unitario e se v ha norma unitaria allora si ha:

$$(c(v)e_1, c(v)e_2)_E = (e_1, e_2)_E$$

e dato che $(c(v))^2 = -1_E$ si ha:

$$(c(v)e_1, e_2)_E + (e_1, c(v)e_2)_E = 0$$

vale a dire: $c(v)$ è anti-autoaggiunto per ogni $v \in V$.

Proposizione 13. *$\Lambda^*(V)$ è un modulo di Clifford (unitario) su $Cl(V,q)$.*

Dimostrazione. In primo luogo si estenda nel modo usuale a $\Lambda^*(V)$ il prodotto scalare q di V. Ricordiamo che per far ciò si impone $\Lambda^k(V) \perp \Lambda^h(V)$ se $k \neq h$, e poi si dichiara ortonormale la base $(v_{i_1} \wedge \ldots \wedge v_{i_k})_{i_1 < \ldots < i_k}$ di $\Lambda^k(V)$ se $\{v_1, \ldots, v_n\}$ è una base ortonormale di V. A questo punto definiamo $\epsilon(v)(\alpha) := v \wedge \alpha$ ($v \in V, \alpha \in \Lambda^*(V)$) e la sua aggiunta tramite q: $i(v) := \epsilon^*(v)$. Si ha:

$$i(v)(w_1 \wedge \ldots \wedge w_l) = \sum_{i=1}^{l} (-1)^{i+1} w_1 \wedge \ldots \wedge (v, w_i) \wedge \ldots \wedge w_l$$

[11] per noi sarà $V = T_xM$, dove (M,g) è una varietà riemanniana, con forma bilineare $q = g_x(,)$ definita positiva

e quindi $i(v)$ non è altro che l'usuale moltiplicazione interna per il covettore $v^* := q(v, \cdot)$. Ponendo:

$$c(v) := \epsilon(v) - i(v)$$

si ha:

$$c(v)^2 = -q(v, v) \cdot 1$$

in quanto si verifica che:

$$\epsilon(v)i(v) + i(v)\epsilon(v) = q(v, w) \cdot 1$$

Dunque $v \mapsto c(v)$ si estende ad un omomorfismo di algebre $Cl(V, q) \to End(\Lambda^*(V))$. L'azione è unitaria grazie al fatto che $c(v)^* = -c(v)$. La dimostrazione è completa.

Sempre nell'ipotesi che $q(\, , \,)$ sia un prodotto scalare, consideriamo l'applicazione

$$\sigma : Cl(V, q) \to \Lambda^* V$$

che associa a $x \in Cl(V, q)$ l'elemento $c(x)(1)$ di $\Lambda^* V$. Quest'applicazione è un isomorfismo di spazi vettoriali: infatti se $\{v_1, \ldots, v_n\}$ è una base ortonormale di V allora l'inversa di σ è data dall'applicazione $c : \Lambda^* V \to Cl(V, q)$ che manda $v_{i_1} \wedge \cdots \wedge v_{i_k} \in \Lambda^* V$ in $v_{i_1} \cdot \cdots \cdot v_{i_k} \in Cl(V, q)$. È facile verificare che queste due applicazioni sono una l'inversa dell'altra.

Concludiamo che esiste un isomorfismo di spazi vettoriali $Cl(V, q) \simeq \Lambda^* V$: in particolare se $\{v_j\}$ è una base ortonormale di V allora

$$v_{i_1} \cdots v_{i_k} \quad i_1 < \cdots < i_k \, , \quad j = 0, \ldots, \dim V$$

è una base dell'algebra di Clifford.

9.3. **Graduazione e filtrazione di $Cl(V, q)$.**

È molto importante per la teoria delle algebre di Clifford la graduazione $\mathbb{Z}_2$ di cui gode $Cl(V, q)$:

$$Cl(V, q) = Cl(V, q)^0 \oplus Cl(V, q)^1$$

dove $Cl(V, q)^0$ è il sottospazio generato da prodotti di un numero pari di elementi di V mentre $Cl(V, q)^1$ è quello generato da prodotti di un numero dispari di elementi di V. Dato che l'ideale $I(V)$ è generato da elementi di grado pari in $T(V)$ vediamo che la graduazione $Cl(V, q) = Cl(V, q)^0 \oplus Cl(V, q)^1$ è effettivamente ben definita.
Alternativamente, si può considerare l'automorfismo $\alpha : Cl(V, q) \to Cl(V, q)$ che estende la mappa $v \mapsto -v$ definita su V; $Cl(V, q)^0$ e $Cl(V, q)^1$ sono gli autospazi di α relativi agli autovalori -1 e 1. Osserviamo anche che il prodotto rispetta la regola dei segni.

La filtrazione di $T(V)$:

$$T(V) = \sum_k \left(\sum_{r=0}^{k} V^{\otimes r} \right)$$

viene ereditata da $Cl(V, q)$ tramite la proiezione naturale, ovvero:

$$Cl(V, q) = \sum_k Cl^k(V, q)$$

dove

$$Cl^k(V, q) = \left\{ v \in Cl(V, q) | \exists u \in \sum_{r=0}^{k} V^{\otimes r} \text{tale che} [u] = v \right\}$$

Possiamo altresì definire:

$$V^{\otimes k} \to Cl^k(V, q) / Cl^{k-1}(V, q)$$

usando le proiezioni naturali: quest'applicazione è suriettiva e non è difficile dimostrare che il nucleo è lo stesso ideale che definisce $\Lambda^k V$ (sarà un esercizio per casa).

Quindi:

$$Cl^k(V,q)/Cl^{k-1}(V,q) \cong \Lambda^k V$$

perciò l'algebra graduata associata alla filtazione di $Cl(V,q)$, e cioè $\bigoplus_k Cl^k(V,q)/Cl^{k-1}(V,q)$, è isomorfa all'algebra esterna $\Lambda^* V$.
Come corollario otteniamo

Proposizione 14. *Esiste un isomorfismo di spazi vettoriali*

$$Cl(V,q) \cong \Lambda^* V$$

In particolare $\dim Cl(V,q) = 2^{\dim V}$

e la Proposizione è ora valida per qualsiasi forma bilineare simmetrica $q(\ ,\ )$

9.4. **Operatori di Dirac.**

Sia M varietà riemanniana con metrica g. g induce una metrica, che denotiamo ancora g, su T^*M. Consideriamo:

$$\bigcup_{m \in M} Cl(T^*_m M, g_m) =: Cl(T^*M, g)$$

che può essere dotato in modo ovvio di struttura di fibrato vettoriale: il *fibrato di Clifford* associato al fibrato cotangente di (M,g). Il fibrato $Cl(T^*M,g)$ è spesso denotato semplicemente con $Cl(M)$.

Supponiamo che esista un secondo fibrato E su M, con ciascuna fibra E_m modulo di Clifford su $Cl(T^*_m M, g_m)$ e supponiamo che l'azione dipenda in modo C^∞ da m (la definizione precisa si dà facilmente sulle carte locali). Diremo che E è un fibrato di moduli di Clifford o anche, più brevemente, un modulo di Clifford. Il fibrato E sarà sempre dotato di una metrica hermitiana. Infine sia data su E una connessione compatibile ∇^E. Allora rimane definita l'applicazione:

$$C^\infty(M, T^*M \otimes E) \xrightarrow{c} C^\infty(M,E)$$
$$c(\phi \otimes s)(m) := c_m(\phi_m)(s_m) \in E_m$$

Definizione 18. Ai dati M, g, E, c, ∇^E rimane associato un *operatore di Dirac* $D\!\!\!/$, definito come la composizione delle mappe:

$$C^\infty(M,E) \xrightarrow{\nabla^E} C^\infty(M, T^*M \otimes E) \xrightarrow{c} C^\infty(M,E)$$

Vediamo l'espressione locale di $D\!\!\!/$ in funzione di una base locale ortonormale $(e_i)_i$ di TM e della sua base duale $(e^i)_i$. C'è da osservare che la scrittura di $D\!\!\!/$ che seguirà non dipende dalla scelta della base locale ortonormale. Se $\{s_j\}$ è una base locale di E allora abbiamo:

$$\begin{gathered} D\!\!\!/(s_j) = (c \circ \nabla^E) s_j = c(\nabla^E s_j) = c(\textstyle\sum_l \omega^l_j s_l) = \\ c(\textstyle\sum_l \sum_k \omega^l_{j,k} e^k s_l) = \sum_k c(e^k) \sum_l \omega^l_{j,k} s_l = \\ \textstyle\sum_k c(e^k) \nabla^E_{e_k} s_j \end{gathered}$$

e dunque:

$$D\!\!\!/ = \sum_i c(e_i) \nabla^E_{e_i}\,.$$

Lo stesso calcolo dimostra anche che

$$D\!\!\!/ = \sum_i c(dx^i) \nabla^E_{\frac{\partial}{\partial x_i}}\ ;$$

quest'espressione dipende però dalle coordinate scelte.

Si richiederà addizionalmente che l'azione di Clifford sia unitaria, e la connessione ∇^E sia *di Clifford*, cioè valga:

$$\nabla^E_X(c(\phi)s) = c(\nabla^{LC}_X\phi)(s) + c(\phi)\nabla^E_X s \tag{58}$$

dove ∇^{LC} è la connessione di Levi-Civita sul fibrato cotangente.
Vale la seguente

Proposizione 15. *Se E è un fibrato di Clifford unitario, allora esiste sempre una connessione di Clifford su E.*

Dimostreremo questa proposizione più avanti.

9.5. **Esempio 1: l'operatore di Gauss-Bonnet.**

Abbiamo visto come Λ^*M sia in maniera naturale un fibrato di moduli di Clifford unitari. Sia ∇^{Λ^*M} la connessione su Λ^*M indotta dalla connessione di Levi-Civita. Non è difficile dimostrare che questa connessione è di Clifford.

Definizione 19. L' operatore di Gauss-Bonnet (o di Eulero) è l'operatore

$$c \circ \nabla^{\Lambda^*M} : C^\infty(M, \Lambda^*M) \to C^\infty(M, \Lambda^*M)\,.$$

Vediamo ora come sia possibile dare un'espressione esplicita di questo operatore di Dirac. Per prima cosa sia in generale V uno spazio vettoriale di dimensione n, con prodotto scalare q. Si scelga $\{e_i\}$ una base ortonormale di V, e si fissi un'orientazione tramite vol $:= e_1 \wedge \cdots \wedge e_n$. Sia $< \cdot, \cdot >$ il prodotto scalare indotto su ΛV. Possiamo definire per ogni k l'applicazione $*$ di Hodge:

$$\begin{array}{cccc} * : & \Lambda^k V & \to & \Lambda^{n-k} V \\ & e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k} & \mapsto & sign(\sigma) e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_{n-k}} \end{array}$$

dove $\sigma(1) = i_1, \ldots, \sigma(k) = i_k, \sigma(k+1) = j_1, \ldots, \sigma(n) = j_{n-k}$. Si verifica senza difficoltà che

$$*^2 = (-1)^{k(n-k)} \tag{59}$$

e che :

$$u \wedge *v =< u, v > \text{vol}\,, \forall u, v \in \Lambda^k V\,, \quad w \wedge v =< *w, v > \text{vol}\,, \forall w \in \Lambda^{n-k} V, v \in \Lambda^k V$$

Torniamo alla nostra varietà riemanniana di dimensione n e supponiamo in aggiunta che M sia orientabile. Sia dvol $\in C^\infty(M, \Lambda^n M)$ una forma di volume per la varietà riemanniana (M, g). Per ogni $x \in M$ rimane definita un'applicazione lineare

$$*_x : \Lambda^k_x M \to \Lambda^{n-k}_x M$$

che induce un'applicazione di fibrati:

$$* : \Lambda^k M \to \Lambda^{n-k} M$$

Già sappiamo che date due k-forme ω e α è ben definito il prodotto scalare L^2:

$$(\omega, \alpha)_{L^2} := \int_M < \omega, \alpha > \text{dvol}\,.$$

Allora rimane ben definito l'operatore d^* aggiunto formale di $d : \Lambda^k M \to \Lambda^{k+1} M$ rispetto a $(\cdot, \cdot)_{L^2}$, vale a dire che d^* è definito da $(d\omega, \alpha)_{L^2} = (\omega, d^*\alpha)_{L^2}$ per ω k-forma e α $(k+1)$-forma. Per verificare l'esistenza di d^* ne diamo una espressione in termini di d e $*$. Prese $\omega \in \Lambda^k M$, $\alpha \in \Lambda^{n-k-1}$ si ha per il teorema di Stokes:

$$\begin{array}{l} \int_M < *d\omega, \alpha > \text{dvol} = \int_M d\omega \wedge \alpha \\ = (-1)^{k+1} \int_M \omega \wedge d\alpha = \int_M (-1)^{k+1} < *\omega, d\alpha > \text{dvol} \end{array}$$

Dato che $*^2 = (-1)^{k(n-k)}$ si ottiene dopo qualche conto la formula cercata:

$$d^* = (-1)^{nk+n+1} * d*$$

In particolare, se α è una 1-forma, allora $d^*\alpha \in C^\infty(M)$ ed otteniamo, dall'uguaglianza di $(1, d^*\alpha)$ e $(d(1), \alpha) = 0$, il *Teorema della divergenza* :

$$\int_M (d^*\alpha)\mathrm{dvol} = 0 \tag{60}$$

Proposizione 16. *Consideriamo ΛM come modulo di Clifford unitario, e sia $\nabla^{\Lambda^* M}$ la connessione su di esso indotta dalla connessione di Levi-Civita ∇^{LC}. Sia $c \circ \nabla^{\Lambda^* M}$ l'operatore di Gauss-Bonnet. Si ha $c \circ \nabla^{\Lambda^* M} = d + d^*$.*

Dimostrazione. Denotiamo la connessione su $\Lambda^* M$ semplicemente con ∇. La proposizione segue immediatamente dal lemma seguente.

Lemma 4. $d = \sum_i \epsilon(e^i)\nabla_{e_i}$; $\quad d^* = \sum_j -i(e^j)\nabla_{e_j}$.

Dimostrazione. Sia $\tilde{d} = \sum \varepsilon(e^i)\nabla_{e_i}$. Si ha $\tilde{d}f = df$ e $\tilde{d}(\phi \wedge \psi) = \tilde{d}\phi \wedge \psi + (-1)^{|\phi|}\phi \wedge \tilde{d}\psi$ poiché per ∇ vale la regola di Leibnitz. Basta quindi verificare che per ogni $1-$forma θ valga $\tilde{d}\theta = d\theta$. Si ricordi che la connessione di Levi-Civita sul duale è definita richiedendo che valga

$$X(e^i, e_j) = (\nabla_X e^i, e_j) + (e^i, \nabla_X e_j)$$

dove (,) denota qui la dualità fra TM e T^*M. Quindi $\forall X,Y$ si ha:

$$X(\theta, Y) = (\nabla_X\theta, Y) + (\theta, \nabla_X Y)$$

ossia

$$X(\theta(Y)) - \theta(\nabla_X Y) = (\nabla_X\theta)(Y)$$

Si mostra ora che $\tilde{d}\theta(X,Y) = d\theta(X,Y)\ \forall X,Y \in C^\infty(M, TM)$:

$$\begin{aligned} \tilde{d}\theta(X,Y) &= (\textstyle\sum e^i \wedge \nabla_{e_i}\theta)(X,Y) = \\ &= \textstyle\sum (e^i(X)(\nabla_{e_i})(Y) - (\nabla_{e_i})(X)e^i(Y)) \end{aligned}$$

ma $X = e^i(X)e_i$ e $Y = e^i(Y)e_i$ dunque

$$\begin{aligned} (\nabla_X\theta)(Y) - (\nabla_Y\theta)(X) &= X(\theta(Y)) - \theta(\nabla_X Y) - Y(\theta(X)) + \theta(\nabla_Y X) = \\ &= X(\theta(Y)) - Y(\theta(X)) - \theta(\nabla_X Y - \nabla_Y X) = \\ &= X(\theta(Y)) - Y(\theta(X)) - \theta([X,Y] + T(X,Y)) \end{aligned}$$

ove T è la torsione. Dato che ∇ è priva di torsione si ha $T \equiv 0$ e

$$\tilde{d}\theta(X,Y) = X(\theta(Y)) - Y(\theta(X)) - \theta([X,Y]) = d\theta(X,Y)$$

ove nell'ultima uguaglianza si è utilizzata la formula di Cartan ([9], pag. 70). Per d^*, si consideri un punto arbitrario $x \in M$ e sia $\theta = ae^1 \wedge \cdots \wedge e^p$ in un intorno di x. È sufficiente verificare che, in x,

$$(-1)^{np+n} * d * \theta = i(e^i)\nabla_{e_i}\theta$$

Possiamo sempre scegliere la base locale in modo che sia $\nabla_{e_j} e_i = 0$ in x. Si ha allora, in x,

$$\begin{aligned}
d\theta &= *(d*(ae^1 \wedge \cdots \wedge e^p)) = *(d(ae^{p+1} \wedge \cdots \wedge e^n)) = \\
&= *(\textstyle\sum_{i=1}^p e_i(a)e^i \wedge e^{p+1} \wedge \cdots \wedge e^n) = \\
&= \textstyle\sum_{i=1}^p e_i(a)(*(e^i \wedge e^{p+1} \wedge \cdots \wedge e^n)) = \\
&= \textstyle\sum_{i=1}^p e_i(a)(-1)^{n(p+1)+i-1} e_1 \wedge \cdots \wedge \hat{e}_i \wedge \cdots \wedge e_p = \\
&= (-1)^{n(p+1)} \textstyle\sum_{i=1}^p (e_i(a) i(e^i)(e_1 \wedge \cdots \wedge e_p)) = \\
&= (-1)^{n(p+1)} \textstyle\sum_{i=1}^p i(e^i) \nabla_{e_i}(ae^i \wedge \cdots \wedge e^p) = \\
&= (-1)^{n(p+1)} (i(e^i) \nabla_{e_i} \theta)
\end{aligned}$$

La dimostrazione è completa.

10. **Lezione 10.**

10.1. **Moduli di Clifford $\mathbb{Z}_2$-graduati.**

Sia E un fibrato di moduli di Clifford per la varietà riemanniana (M,g). Diremo che E è $\mathbb{Z}_2$-graduato se esiste $\gamma \in C^\infty(M, \mathrm{End}(E))$ tale che, per ogni $m \in M$,

$$\gamma^2(m) = \mathrm{Id}_{E_m}\,, \quad c_m\gamma(m) + \gamma(m)c_m = 0$$

Se E è $\mathbb{Z}_2$-graduato allora otteniamo una graduazione di E, $E = E^+ \oplus E^-$, con $E^\pm := \{e \in E \,|\, \gamma(e) = \pm e\}$. Supporremo sempre la connessione ∇^E diagonale: $\nabla^E = \nabla^{E^+} \oplus \nabla^{E^-}$; è chiaro allora che l'operatore di Dirac $\not{D} = c \circ \nabla^E$ manda sezioni di $E^\pm$ in sezioni di $E^\mp$, i.e. risulta *dispari* rispetto a tale graduazione. In formule e con ovvia notazione

$$\not{D} = \begin{pmatrix} 0 & \not{D}^- \\ \not{D}^+ & 0 \end{pmatrix}$$

Ad esempio $\Lambda^*M = E$ è graduato da $\gamma\alpha = \alpha$ se α ha grado pari, $\gamma\alpha = -\alpha$ se α ha grado dispari. Quindi $\Lambda^*M = \Lambda^{pari} \oplus \Lambda^{dispari}M$ e l'operatore di Gauss-Bonnet si decompone come

$$d + d^* = \begin{pmatrix} 0 & d + d^*|_{dispari} \\ d + d^*|_{pari} & 0 \end{pmatrix}$$

10.2. **Esempio 2. L'operatore di segnatura D^{sign}.**

Sia M una varietà tale che $\dim M = 2k$. Sia $\tau = (\sqrt{-1})^{p(p-1)+k} *$ con

$$\tau : \Lambda^p_{\mathbb{C}}M \to \Lambda^{n-p}_{\mathbb{C}}M$$

ove $\Lambda^p_{\mathbb{C}}M \equiv \Lambda^p M \otimes \mathbb{C}$. È chiaro che τ definisce una nuova graduazione di $\Lambda^*_{\mathbb{C}}M$, diversa da quella in pari/dispari. È anche chiaro che $(d + d^*)\tau = -\tau(d + d^*)$. Sia

$$\Lambda^\pm_p M = \{\omega \in \Lambda^*_p M \otimes \mathbb{C} \;:\; \tau\omega = \pm\omega\}$$

Da quanto detto $C^\infty(M, \Lambda^*_{\mathbb{C}}M) = C^\infty(M, \Lambda^+_{\mathbb{C}}M) \oplus C^\infty(M, \Lambda^-_{\mathbb{C}}M)$ e $d + d^*$ è dispari rispetto a questa decomposizione. L'operatore di segnatura D^{sign} è per definizione l'operatore $d + d^*$ *insieme alla graduazione* τ:

$$D^{\mathrm{sign}} := \begin{pmatrix} 0 & d + d^*|_{\Lambda^-} \\ d + d^*|_{\Lambda^+} & 0 \end{pmatrix}$$

Spesso si definisce l'operatore di segnatura come

$$D^{\mathrm{sign},+} = d + d^*|_{\Lambda^+}$$

10.3. **Esempio 3. L'operatore $\bar\partial + \bar\partial^*$ su una varietà quasi-complessa.**

Cominciamo con una lunga premessa di algebra lineare. Sia V uno spazio vettoriale reale con prodotto scalare $q(,)$. Si supponga che esista $J \in \mathrm{End}(V)$ tale che $J^2 = -\mathrm{Id}$. Possiamo senz'altro assumere che $q(Jv, Jv') = q(v, v')$ (q è J-invariante) perché se $p(\,,\,)$ è un qualsiasi prodotto scalare, allora $q(\cdot,\cdot) := p(\cdot,\cdot) + p(J\cdot, J\cdot)$ risulta J-invariante. Notiamo che se esiste un tale J allora necessariamente $\dim V \in 2\mathbb{N}$ perché se $\{f_1, \ldots, f_m\}$ è una quasiasi base ortonormale di V allora per la matrice A associata a J in questa base si ha $A \in O(m)$ e quindi

$$1 = \det(AA^T) = \det A \, \det A^T = \det A^2 = \det(-\mathrm{Id}) = (-1)^m$$

da cui la tesi. Sia $\{e_1, \ldots, e_n, e_{n+1}, \ldots, e_{n+n}\}$ una base ortonormale tale che $Je_j = e_{j+n}$ e quindi $Je_{j+n} = -e_j \quad 1 \leq j \leq n$. Non è difficile dimostrare che una tale base esiste sempre [12]. Sia $\{e^1, \ldots, e^n, e^{n+1}, \ldots, e^{n+n}\}$ la base duale. Consideriamo ora $V \otimes \mathbb{C}$ e si estenda J per $\mathbb{C}$-linearità. Si definiscano $V^{1,0}$, $V^{0,1}$ come gli autospazi di J relativi agli autovalori $\pm i$:

$$V^{1,0} = \{v \mid Jv = iv\}, \quad V^{0,1} = \{v \mid Jv = -iv\}$$

e quindi $V \otimes \mathbb{C} = V^{1,0} \oplus V^{0,1}$ con

$$V^{1,0} = \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}(e_1 - ie_{1+n}, \ldots, e_n - ie_{2n}) \quad V^{0,1} = \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}(e_1 + ie_{1+n}, \ldots, e_n + ie_{2n})$$

Osserviamo che

$$V^{0,1} = \overline{V^{1,0}}.$$

Estendiamo ora $q(\,,\,)$ a tutto $V \otimes \mathbb{C}$ per $\mathbb{C}$-linearità. Dal fatto che $q(\,,\,)$ è J-invariante segue facilmente che $V^{1,0}$ e $V^{0,1}$. sono sottospazi isotropi [13] massimali mentre $q_{\mathbb{C}} : V^{1,0} \times V^{0,1} \longrightarrow \mathbb{C}$ è una metrica hermitiana su $V^{1,0}$. Consideriamo ora lo spazio duale $(V \otimes \mathbb{C})^* = (V^{1,0})^* \oplus (V^{0,1})^*$. L'applicazione $V^{1,0} \to (V^{0,1})^*$ che associa a w la forma $q_{\mathbb{C}}(w, \cdot)$ è chiaramente un isomorfismo. In particolare, se abbiamo un elemento $w \in V^{1,0}$ allora è ben definito il prodotto interno $i(w) : \Lambda^j V^{0,1} \to \Lambda^{j-1} V^{0,1}$.

Lo spazio vettoriale $\Lambda^* V^{0,1}$ è un modulo di Clifford: posto $v = v^{1,0} + v^{0,1}$ poniamo, per definizione,

$$c(v) = \sqrt{2}(\varepsilon(v^{0,1}) - i(v^{1,0})) \tag{61}$$

Notiamo che $e_j = \{(e_j - ie_{j+n}) + (e_j + ie_{j+n})\}/2$ e si verifica da questa decomposizione che $c(e_j)^2 = -1$. In conclusione $\Lambda^* V^{0,1} \equiv \Lambda^{0,*} V$ ha una struttura naturale di modulo di Clifford.

Sia ora M una varietà reale quasi-complessa, il che vuol dire che esiste $J \in C^\infty(M, \mathrm{End}(TM))$ tale che $J^2 = -\,\mathrm{Id}_E$; sia g una metrica $J-$invariante. Sia $\nabla^{0,*}$ una connesione su $\Lambda^{0,*}M$; possiamo scegliere questa connessione compatibile con la metrica indotta da g e di Clifford. L'operatore

$$\not{D} := c \circ \nabla^{0,*} : C^\infty(M, \Lambda^{0,*}M) \to C^\infty(M, \Lambda^{0,*}M)$$

è un operatore di Dirac. Dunque su ogni varietà quasi-complessa esiste un operatore di Dirac.

10.4. **Operatori differenziali.**

Siano E,F due fibrati vettoriali su M. L'applicazione lineare

$$P \;:\; C^\infty(M, E) \to C^\infty(M, E)$$

è un operatore differenziale se per ogni carta banalizzante U comune ad E ed F

$$\chi \;:\; U \to A \subseteq \mathbb{R}^n$$

$$\phi \;:\; E|_U \to A \times \mathbb{C}^n$$

$$\psi \;:\; F|_U \to A \times \mathbb{C}^m$$

---

[12] Basta procedere per induzione. Fissiamo e_1 di norma unitaria: dato che $q(\,,\,)$ è J-invariante si ha che Je_1 è ortogonale a e_1. Consideriamo lo spazio ortogonale a $\mathrm{Span}(e_1, Je_1)$. Dato che $q(\,,\,)$ è J-invariante si ha che tale spazio è invariante per J; ora possiamo procedere induttivamente.

[13] ciò vuol dire che $q_{\mathbb{C}}\big|_{V^{1,0}} \equiv 0$ e $q_{\mathbb{C}}\big|_{V^{0,1}} \equiv 0$

ed indicando con $i_U : C_0^\infty(U, E|_U) \hookrightarrow C^\infty(M, E)$ l'immersione delle funzioni a supporto compatto e con $r_U : C^\infty(M, F) \to C^\infty(U, F|_U)$ la restrizione, risulti commutativo il seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccc} C_0^\infty(U, E|_U) & \overset{r_U \circ P \circ i_U}{\longrightarrow} & C^\infty(U, F|_U) \\ \downarrow & & \uparrow \\ C_0^\infty(A, A \times \mathbb{C}^n) & \overset{P_U}{\longrightarrow} & C^\infty(A, A \times \mathbb{C}^m) \end{array}$$

con P_U matrice di operatori differenziali. Si utilizzerà la notazione $P \in \mathrm{Diff}^*(M; E, F)$; $P \in \mathrm{Diff}^k(M; E, F)$ se per ogni banalizzazione non compaiono operatori di ordine superiore a k.

10.5. **Simbolo principale.**

Se $P \in \mathrm{Diff}^k(M; E, F)$ allora è ben definito

$$\sigma_k(P) \in C^\infty(T^*M, \mathrm{Hom}(\pi^*E, \pi^*F))$$

detto simbolo principale dell'operatore P.

Sia $(x, \xi) \in T^*M$ ed $e_x \in E_x$; introduciamo $f \in C^\infty(M)$ ed $e \in C^\infty(M, E)$ tali che $df|_x = \xi$ e $e(x) = e_x$. Definiamo $\sigma_k(P)(x, \xi) \in \mathrm{Hom}(E_x, F_x)$ come segue :

$$\sigma_k(P)(x, \xi)(e_x) = i^k \frac{1}{k!} P((f - f(x))^k e)(x)$$

Si verifica che $\sigma_k(P)(x, \xi)$ non dipende dalle scelte fatte e che è un'applicazione lineare da $E_x \to F_x$. In una banalizzazione locale si ha:

$$\sigma_k \left(\sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(ij) \left(\frac{1}{\sqrt{-1}} \frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{1}{\sqrt{-1}} \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^{\alpha_n} \right) (x, \xi) =$$

$$\sum_{|\alpha| = k} a_\alpha(ij)(\xi^1)^{\alpha_1} \ldots (\xi^n)^{\alpha_n}$$

Vale, inoltre, la seguente proprietà: se $P \in \mathrm{Diff}^k(M; E, F)$ e $Q \in \mathrm{Diff}^m(M; F, G)$ allora $PQ \in \mathrm{Diff}^{m+k}(M; E, G)$ e

$$\sigma_{k+m}(PQ) = \sigma_k(P)\sigma_m(Q)$$

Definizione 20. P è ellittico se $\forall\ (x, \xi) \neq 0 \in T^*M$

$$\sigma_k(P)(x, \xi) \ \in \ \mathrm{Iso}(E_x, F_x)$$

Siano $<,>_E$, $<,>_F$ metriche hermitiane su E ed F rispettivamente, si costruisca il prodotto scalare $(u, u\prime)_E = \int_M < u, u' >_E \mathrm{dvol}\ \forall u, u' \in C^\infty(M, E)$. L'operatore $P : C^\infty(M, E) \to C^\infty(M, F)$ ammette un aggiunto formale $P^* : C^\infty(M, F) \to C^\infty(M, E)$ se vale

$$(Pu, v)_F = (u, P^*v)_E \ \forall u \in C^\infty(M, E) \ \forall u \in C^\infty(M, F)$$

Se $P \in \mathrm{Diff}^k(M; E, F)$ allora non è difficile dimostrare riducendosi a carte locali ed integrando per parti che esiste ed è unico $P^* \in \mathrm{Diff}^k(M; F, E)$ ed inoltre:

$$\sigma_k(P^*) = \sigma_k(P)^*$$

Dopo queste generalità sugli operatori differenziali vogliamo ora calcolare il simbolo principale per l'operatore di Dirac che è ovviamente un operatore differenziale di ordine 1. Sappiamo che in una carta locale

$$\not{D} = \sum c(dx^j)\nabla_j.$$

Dunque si ha:

$$\sigma_1(\not{D})(x,\xi) = \sum c(dx^k)(\sqrt{-1})\xi^k =$$
$$= (\sqrt{-1})c(\xi^k dx^k) = (\sqrt{-1})c(\xi)$$

In definitiva:

$$\sigma_1(\not{D})(x,\xi) = (\sqrt{-1})c(\xi)$$

da cui segue che $\not{D}$ è ellittico. Inoltre

$$\sigma_2(\not{D}^2)(x,\xi) = -c(\xi)^2 = ||\xi||^2 \mathrm{Id}_{E_x}$$

e dunque anche $\not{D}^2$ è un operatore ellittico.

10.6. **Laplaciani generalizzati.**

Sia $P \in \mathrm{Diff}^2(M; E, E)$ con E fibrato hermitiano . Si dirà che P è un *laplaciano generalizzato* se

$$\sigma_2(P)(x,\xi) = ||\xi||^2 \mathrm{Id}_{E_x}$$

Scriveremo brevemente $\sigma_2(P)(x,\xi) = ||\xi||^2$. Da quanto sopra segue che $\not{D}^2$ è un laplaciano generalizzato. Localmente P ammetterà la seguente espressione:

$$P = -g^{ij}\frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^j} + (\text{ordine } 1) \ + \ (\text{ordine } 0)$$

Ad esempio in $\mathbb{R}^n$, con la metrica piatta:

$$P = -\sum \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^2$$

è un laplaciano generalizzato. Si noti il segno $-$.

10.7. **Ancora un (lungo) commento sulle varietà complesse.**

Abbiamo visto come sia possibile definire un operatore di Dirac su una varietà reale quasi-complessa. Supponiamo ora che M sia complessa. Sia J la naturale struttura quasi-complessa indotta su TM. Se h è una metrica hermitiana su M abbiamo visto come la parte reale di h definisca una metrica reale su TM. È immediato verificare che tale metrica risulta J-invariante. Viceversa, se g è una metrica riemanniana J-invariante, allora abbiamo visto come ottenere da $g_{\mathbb{C}}$ una metrica hermitiana h su M. Sia quindi g una metrica J-invariante su TM e sia h la metrica hermitiana associata su M. Sia ω la forma di Kähler associata. La metrica hermitiana h induce un prodotto scalare $<,>$ su ogni $\Lambda^{p,q}(M)$: se $h = \sum_j \phi_j \otimes \overline{\phi_j}$, dove $\{\phi_j\}$ sono ortonormali, allora dichiariamo i vettori

$$\phi_{i_1} \wedge \cdots \wedge \phi_{i_p} \wedge \overline{\phi_{j_1}} \wedge \cdots \wedge \overline{\phi_{j_q}}$$

ortonormali e di lunghezza 2^{p+q}. Possiamo estendere questo prodotto scalare a tutto $\Lambda^*(T^*M \otimes \mathbb{C})$ dichiarando $\Lambda^{p,q}(M) \perp \Lambda^{s,t}(M)$ se $(p,q) \neq (s,t)$. Abbiamo allora in $C^\infty(M, \Lambda^{p,q}(M))$, e quindi in $C^\infty(M, \Lambda^*(T^*M \otimes \mathbb{C}))$, un prodotto scalare L^2:

$$(\alpha,\beta) := \int_M <\alpha(p),\beta(p)> d\mathrm{vol}_g = \int_M <\alpha(p),\beta(p)> \frac{\omega^n}{n!}$$

Possiamo anche definire l'operatore $* : \Lambda^{p,q}(M) \to \Lambda^{n-p,n-q}(M)$: utilizzando un'ovvia notazione con i multi-indice:

$$*(\sum_{I\bar{J}} \eta_{I\bar{J}} \phi_I \wedge \overline{\phi_J}) := 2^{p+q-n} \sum_{I\bar{J}} \epsilon_{I\bar{J}} \overline{\eta_{I\bar{J}}} \phi_{I^0} \wedge \overline{\phi_{J^0}}$$

dove I^0 J^0 sono gli indici complementari e $\epsilon_{I\bar{J}}$ è il segno della permutazione

$$\{1, \ldots, n, 1', \ldots, n'\} \to \{i_1, \ldots, i_p, j_1, \ldots, j_q, i_1^0, \ldots, i_{n-p}^0, j_1^0, \ldots, j_{n-q}^0\}$$

Si può verificare che $** = (-1)^{p+q}$. Utilizzando il teorema di Stokes si verifica senza particolari difficoltà che l'operatore $- * \overline{\partial} *$ è l'aggiunto formale $\overline{\partial}^*$ di $\overline{\partial}$. Consideriamo l'operatore

$$\sqrt{2}(\overline{\partial} + \overline{\partial}^*) : C^\infty(M, \Lambda^{0,*}M) \to C^\infty(M, \Lambda^{0,*}M).$$

Non è difficile dimostrare (sarà un esercizio per casa) che il simbolo principale di $\sqrt{2}(\overline{\partial} + \overline{\partial}^*)$ è dato da

$$\sigma_1 \left(\overline{\partial} + \overline{\partial}^*\right)(\xi_x) \ = \ \epsilon(\xi_x^{0,1}) - i(\xi_x^{1,0}) \, .$$

Ne segue che se fissiamo una connessione ∇ su $(T^{0,1})^*$ (e quindi la connessione indotta $\nabla^{0,*}$ su $\Lambda^{0,*}M$) e se consideriamo l'operatore di Dirac associato all'azione di Clifford introdotta nell'Esempio 3, allora

$$\not{D} = \sqrt{2}(\bar{\partial} + \bar{\partial}^*) + A \quad \text{con} \quad A \in C^\infty(M, \mathrm{End}(\Lambda^{0,*}M)) \, , \ A = A^*. \tag{62}$$

Si noti che, in generale, la connessione di Levi-Civita complessificata:

$$\nabla^{LC,\mathbb{C}} : C^\infty(M, TM \otimes \mathbb{C}) \to C^\infty(M, T^*M \otimes (TM \otimes \mathbb{C}))$$

non rispetta la decomposizione $TM \otimes \mathbb{C} = T^{1,0}M \oplus T^{0,1}M$. Sia ω la forma di Kähler associata alla metrica hermitiana h. ω è una $(1,1)$-forma reale definita positiva: $\omega(v,v) > 0$, $v \neq 0$. Osserviamo che, viceversa, una $(1,1)$-forma di questo tipo definisce una metrica hermitiana (basta porre $h(v,w) := 2[\omega(w,iv) + i\omega(w,v)]$).

Definizione 21. Una varietà complessa è detta di Kähler se ammette una metrica hermitiana la cui forma di Kähler è *chiusa*.

Supponiamo che (M,h) sia di Kähler: dato che il prodotto esterno di ω con se stessa n-volte è una forma di volume, si ha

$$\int_M \omega \wedge \cdots \wedge \omega \neq 0 \, . \tag{63}$$

Ne segue che ω non è mai esatta [14]. In particolare $0 \neq [\omega] \in H^2(M, \mathbb{R})$.

Proposizione 17. *Sia M complessa, e sia $g(\,,\,)$ una metrica J-invariante. Sia c l'azione di Clifford su $\Lambda^{0,*}M$ introdotta nell'Esempio 3, si veda* (61). *Sia ∇^{LC} la connessione di Levi-Civita e sia $\nabla^{LC,\mathbb{C}}$ la sua estensione per $\mathbb{C}$-linearità a $TM \otimes \mathbb{C}$. Sia h la metrica hermitiana definita da g. Allora*

- *(M,h) è di Kähler se e solo se $\nabla^{LC,\mathbb{C}}$ rispetta la decomposizione $TM \otimes \mathbb{C} = T^{1,0}M \oplus T^{0,1}M$.*
- *Se (M,h) è di Kälher allora la connessione $\nabla^{0,*}$ indotta su $\Lambda^{0,*}M$ da $\nabla^{LC,\mathbb{C}}|_{T^{0,1}M}$ è una connessione di Clifford.*
- *Se (M,h) è di Kälher allora $\sqrt{2}(\bar{\partial} + \bar{\partial}^*) = \not{D}$, con $\not{D}$ definito dall'azione di Clifford* (61) *e dalla connessione $\nabla^{0,*}$.*

[14] applicare il teorema di Stokes per arrivare all'assurdo che $\int \omega \wedge \cdots \wedge \omega = 0$.

La dimostrazione della Proposizione è omessa: i primi due punti non sono difficili, il terzo ha dimostrazione della stessa difficoltà di quella che stabilisce il fatto che $d + d^*$ è uguale all'operatore di Gauss-Bonnet.
Concludendo: su una varietà di Kähler l'operatore $\sqrt{2}(\bar\partial + \bar\partial^*)$ è un operatore di Dirac associato ad un modulo unitario con connessione di Clifford. Se M è complessa ma non di Kähler allora $\sqrt{2}(\bar\partial + \bar\partial^*)$ è un operatore che differisce da un operatore di Dirac $\not{D}$ associato ad un'azione di Clifford unitaria e ad una connessione di Clifford per un operatore di ordine 0:

$$\not{D} - \sqrt{2}(\bar\partial + \bar\partial^*) = A \quad \text{con} \quad A \in C^\infty(M, \mathrm{End}(\Lambda^{0,*}M))\,,\ A = A^*.$$

Analogamente, sia E un fibrato olomorfo hermitiano sulla varietà di Kähler M e sia ∇^E la connessione complessa compatibile con la metrica. Abbiamo definito $\bar\partial_E$. Consideriamo $\Lambda^{0,*}M \otimes E$; è un modulo di Clifford rispetto all'azione $c \otimes \mathrm{Id_E}$. Consideriamo la connessione prodotto tensoriale di $\nabla^{0,*}$ e ∇^E. Questa connessione è di Clifford; otteniamo quindi un operatore di Dirac che risulta essere proprio $\sqrt{2}(\bar\partial_E + \bar\partial_E^*)$.

Esempio. Sia $M = \mathbb{C}P^n$ e sia $\pi : \mathbb{C}^{n+1} - \underline{0} \to \mathbb{C}P^n$ la proiezione canonica. Sia U un intorno aperto e sia $Z : U \to \mathbb{C}^{n+1} - \underline{0}$ un'applicazione olomorfa tale che $\pi \circ Z = \mathrm{Id}$. Ad esempio, se $U \equiv U_j = \{[z_0, \dots, z_n] \,|\, z_j \neq 0\}$ allora possiamo scegliere $Z = s^j$

$$s^j([z_0, \dots, z_n]) = (\frac{z_0}{z_j}, \dots, \frac{z_{j-1}}{z_j}, 1, \frac{z_{j+1}}{z_j} \dots, \frac{z_n}{z_j}) \tag{64}$$

Definiamo una (1,1)-forma su U come segue:

$$\omega_U = \frac{i}{2\pi} \partial\overline{\partial} \log ||Z||^2\,.$$

Si verifica senza difficoltà che ω non dipende dalla particolare scelta di sezione locale olomorfa $Z : U \to \mathbb{C}^{n+1} - \underline{0}$. Rimane quindi definita una forma ω su tutta la varietà. Se, ad esempio, $U = U_0$ con coordinate $(\zeta_1, \dots, \zeta_n)$, la forma ω può essere scritta come segue prendendo $Z = s^0$:

$$\omega = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\sum d\zeta_j \wedge d\overline{\zeta}_j}{1 + \sum \zeta_j \overline{\zeta}_j} - \frac{(\sum \overline{\zeta}_j d\zeta_j) \wedge (\sum \zeta_j d\overline{\zeta}_j)}{(1 + \sum \zeta_j \overline{\zeta}_j)^2} \right]$$

Si noti che ω è reale e che è certamente definita positiva nel punto $[1, 0, \dots, 0] \in U_0$. Per $U(n+1)$-invarianza è definita positiva ovunque. ω definisce quindi una metrica, *la metrica di Fubini-Study*. Scriveremo anche ω_{FS}. Si noti che ω è chiusa perché localmente risulta $\omega = i/4\pi(d(\partial - \overline{\partial}) \log ||Z||^2)$. Ne segue che $\mathbb{C}P^n$ è una varietà di Kähler. Dato che sottovarietà complesse di varietà di Kähler sono di Kähler rispetto alla metrica indotta, scopriamo che le varietà proiettive regolari sono di Kähler.

Esempio. Sia ora L il fibrato tautologico. L eredita una matrica hermitiana h dalla metrica banale in $\mathbb{C}P^n \times \mathbb{C}^{n+1}$. Lo abbiamo visto a lezione nel caso $n = 1$. Sia ∇ la connessione complessa compatibile con tale metrica. Scrivendo l'espressione locale di h e quella di $c_1(L, \nabla)$ in funzione di una base locale olomorfa ci accorgiamo che

$$c_1(L, \nabla) = -\omega_{\mathrm{FS}}\,.$$

Da quanto detto ne segue che $c_1(L)$ non è zero in $H^2(\mathbb{C}P^1)$. Inoltre

$$\int_{\mathbb{C}P^n} (-c_1(L))^n \neq 0.$$

Di fatto si può calcolare esplicitamente questo integrale e si ottiene

$$\int_{\mathbb{C}P^n} (-c_1(L))^n = 1.$$

Utilizzando questa informazione ed un pò di variabile complessa si può dimostrare che

$$Td(\mathbb{C}P^n) := \int_{\mathbb{C}P^n} Td(T^{1,0}\mathbb{C}P^n) = 1\,, \qquad L(\mathbb{C}P^{2n}) := \int_{\mathbb{C}P^{2n}} L(T\mathbb{C}P^{2n}) = 1$$

11. **Lezione 11.**

11.1. **Gli operatori di Dirac sono formalmente autoaggiunti.**

Iniziamo questa lezione con una proprietà generale degli operatori di Dirac.

Proposizione 18. *Sia E un modulo di Clifford hermitiano e sia $D\!\!\!/$ un opertore di Dirac:*

$$D\!\!\!/ \equiv c \circ \nabla^E : C^\infty(M, E) \longrightarrow C^\infty(M, E) \tag{65}$$

Se l'azione di Clifford è unitaria e ∇^E è una connessione di Clifford, allora l'operatore di Dirac è formalmente autoaggiunto:

$$(D\!\!\!/ s, s') = (s, D\!\!\!/ s') \quad \forall\, s, s' \in \mathcal{C}^\infty(M, E) \tag{66}$$

Dimostrazione. Per definizione

$$(s, s') = \int_M < s, s' > dvol\,.$$

Sappiamo che, per il teorema della divergenza (60),

$$\int_M (d^*\omega) dvol = 0 \quad \forall \omega \in \Omega^1(M) \tag{67}$$

Basta quindi verificare che

$$< D\!\!\!/ s, s' > - < s, D\!\!\!/ s' >= d^*\omega \quad \text{per qualche } \omega \in \Omega^1(M) \tag{68}$$

Si scelga una base locale ortonormale e_i tale che $\nabla_{e_i} e_j = 0$ in $m \in M$: si ha, in m,

$$\begin{aligned} &< D\!\!\!/ s, s' > - < s, D\!\!\!/ s' >= \\ &=< \sum c(e^\alpha) \nabla_{e_\alpha} s, s' > - < s, \sum c(e^\alpha) \nabla_{e_\alpha} s' >= \\ &= \sum e_\alpha < c(e^\alpha) s, s' > \end{aligned}$$

dove si è usato il fatto che la connessione è di Clifford e l'azione unitaria. Sia ora $\omega \in \Omega^1(M)$ definita come segue:

$$\omega(X) = - < c(X^*) s, s' > \tag{69}$$

allora, in $m \in M$ vale la seguente uguaglianza:

$$\begin{aligned} d^*\omega &= -\sum i(e^\alpha) \nabla_{e_\alpha} \omega = \\ &= -\sum (\nabla_{e_\alpha} \omega)(e_\alpha) = \sum e_\alpha(\omega(e_\alpha)) \end{aligned}$$

Nell'ultimo passaggio abbiamo utilizzato la scelta particolare di base locale ortonormale e la definizione di connessione sul fibrato cotangente:

$$(\nabla_X \theta)(Y) = X(\theta(Y)) - \theta(\nabla_X Y) \tag{70}$$

Abbiamo in definitiva dimostrato che $< D\!\!\!/ s, s' > - < s, D\!\!\!/ s' >= d^*\omega$ che è quanto basta per concludere.

Osservazione: Sia (V, q) uno spazio vettoriale euclideo di $dim\ V = n$; sia E un modulo di Clifford per V; sia $\{v_1, \ldots, v_n\}$ una base per V. Ricordiamo che $\mathcal{C}^\infty(V, E)$ sono le funzioni a valori in E, mentre $x_1, \ldots, x_n$ sono le coordinate indotte da $\{v_1, \ldots, v_n\}$. Rimane definito l'operatore di Dirac associato a questo modulo di Clifford :

$$D\!\!\!/ = \sum c(v_i) \frac{\partial}{\partial x_i} \tag{71}$$

Un semplice calcolo dimostra che :

$$\not{D}^2 = (-\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \ldots - \frac{\partial^2}{\partial x_n^2})\,\mathrm{Id}_E \tag{72}$$

A destra c'è il **Laplaciano** Δ; vediamo quindi che $\not{D}$ è una sorta di radice quadrata del Laplaciano. Questo risultato si generalizza alle varietà differenziabili (formula di Bochner/Weitzenbock/Lichnerowicz; verrà dimostrata più avanti).

Osservazione: Sia $\not{D}$ come nella Proposizione appena dimostrata e supponiamo che E sia $\mathbb{Z}_2$-graduato; ne segue che

$$\not{D} = \begin{pmatrix} 0 & \not{D}^- \\ \not{D}^+ & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{con } (\not{D}^-)^* = \not{D}^+ \quad (\text{dato che } \not{D}^* = \not{D}). \tag{73}$$

11.2. **Chiralità. Il modulo degli spinori.**

Sia V uno spazio vettoriale reale con prodotto scalare $q(\ ,\ )$ definito positivo. Consideriamo l'algebra complessa $\mathbb{C}l(V,q) := Cl(V,q)\otimes\mathbb{C}$. Poniamo per brevità $\mathbb{C}l(V) := \mathbb{C}l(V,q)$ e $Cl(V) := Cl(V,q)$. Se fissiamo una base ortonormale $\{e_1,\ldots,e_{\dim V}\}$ di V, possiamo considerare

$$\Gamma = \sqrt{-1}^{\left[\frac{\dim V+1}{2}\right]} e_1 \ldots e_{\dim V} \in \mathbb{C}l(V)\,.$$

Tale elemento è detto operatore di *chiralità* e non dipende dalla scelta della base. Si ha

- $\Gamma^2 = 1$
- se $\dim V$ è pari, $\Gamma v = -v\Gamma\ \forall v \in V$;
- se $\dim V$ è dispari, $\Gamma v = v\Gamma\ \forall v\in V$.

Notiamo che se V ha dimensione pari ed E è un modulo di Clifford complesso, allora E eredita in maniera naturale una $\mathbb{Z}_2$-graduazione:

$$E^{\pm} := \{e \in E \mid \Gamma e = \pm e\}\,.$$

Teorema 13. *Sia (V,q) uno spazio vettoriale reale euclideo orientato di dimensione pari. Esiste a meno di isomorfismi un unico spazio vettoriale complesso $\mathbb{Z}_2$-graduato $S = S^+\oplus S^-$, detto il modulo degli spinori, tale che*

$$\mathbb{C}l(V) \simeq \mathrm{End}(S)\,. \tag{74}$$

In particolare, $\dim S = 2^{\dim V/2}$, $\dim S^{\pm} = 2^{\dim V/2-1}$

Dimostrazione. Sia $2n$ la dimensione di V. Osserviamo che essendo V di dimensione pari, V ammette sempre una stuttura complessa $J \in \mathrm{End}(V)$ tale quindi che $J^2 = -1$. Per dimostrare l'esistenza di J basta fissare una qualsiasi base, ad esempio una base ortonormale

$$\{e_1,\ldots,e_n,e_{n+1},\ldots,e_{n+n}\}$$

e definire J mandando $e_\ell \to e_{\ell+n}$ e $e_{\ell+n} \to -e_\ell$ per $1\le \ell\le n$. Notiamo che J può essere scelto compatibile con il prodotto scalare di V: $q(Jv,Jv') = q(v,v')$ (basterà prendere la base $\{e_1,\ldots,e_n,e_{n+1},\ldots,e_{n+n}\}$ ortonormale). Siamo ora nella situazione che si è già presentata quando abbiamo studiato l'operatore di Dirac associato ad una struttura quasi-complessa su una varietà reale.

Possiamo quindi estendere J e q a $V\otimes\mathbb{C}$; otteniamo una decomposizione $V\otimes\mathbb{C} = V^{(1,0)}\oplus V^{(0,1)}$ con $V^{(1,0)} = \{v \in V\otimes\mathbb{C} : J_{\mathbb{C}}(v) = iv\}$ e analogamente per $V^{(0,1)}$. Sappiamo già che questi due sottospazi sono una coppia di sottospazi trasversi isotropi di dimensione massima [15]. Sappiamo

[15] dove vi ricordo che un sottospazio P è isotropo se $q_{\mathbb{C}}(p_1,p_2) = 0\ \forall p_1,p_2\in P$.

anche che tramite $q_{\mathbb{C}}$ possiamo identificare $V^{(0,1)}$ con $(V^{(1,0)})^*$.
Definiamo ora $S := \Lambda V^{1,0}$. Se $v \in V$ allora $v = v^{(1,0)} + v^{(0,1)}$. Definiamo un'azione di v su S come segue

$$c(v)s = \sqrt{2}\epsilon(v^{(1,0)})s - \sqrt{2}\mathrm{int}(v^{(0,1)})s$$

dove $\mathrm{int}(v^{(0,1)})$ è la moltipliazione interna per $v^{(0,1)} \in V^{(0,1)} = (V^{(1,0)})^*$. Sappiamo che questa azione si estende ad una rappresentazione

$$\mathbb{C}\mathrm{l}(V) \to \mathrm{End}(S).$$

Notiamo ora che i due spazi hanno la stessa dimensione e che l'applicazione è iniettiva dato che con un semplice calcolo si verifica che gli elementi della base $e_{i_1} \cdots e_{i_p}$ di $\mathbb{C}\mathrm{l}(V)$ non sono mai inviati nell'applicazione nulla. Si può anche verificare che la $\mathbb{Z}_2$-graduazione naturale di S (forme pari/dispari) coincide con quella data dall'operatore di chiralità Γ [16]. Infine, l'unicità di S segue dal fatto che l'algebra degli endomorfismi di uno spazio vettoriale è *semplice*, i.e. ha un'unica rappresentazione irriducibile a meno di isomorfismi.

Osservazioni.
1.Notiamo che S è un modulo di Clifford unitario e che $S^{\pm}$ sono ortogonali.
2. Abbiamo quindi scoperto che le algebre di Clifford complesse per spazi vettoriali di dimensione pari sono semplicemente algebre di matrici: se $\dim V = 2n$

$$\mathbb{C}l(V) \simeq M_{2^n \times 2^n}(\mathbb{C})\,. \tag{75}$$

3. Sia ora V di dimensione dispari uguale a $2n+1$ e sia W un sottospazio di codimensione 1. Sia $(W)^{\perp} = \mathbb{R}e_{2n+1}$. Consideriamo la decomposizione $V = W \oplus (W)^{\perp}$ e sia $\{e_1, \dots, e_{2n},\} \cup \{e_{2n+1}\}$ una base ortonormale di $V = W \oplus (W)^{\perp}$. L'applicazione $f : W \to Cl(V,q)^0$ che manda e_ℓ in $e_\ell \cdot e_{2n+1}$ per $\ell \leq 2n$ è tale che $f(e_j)f(e_i) + f(e_i)f(e_j) = -2\delta_{ij}$ e si estende quindi ad un'applicazione di algebre $Cl(W, q\big|_W) \to Cl(V,q)^0$ che risulta essere un isomorfismo. Ne deduciamo che nel caso di dimensione dispari, $\dim V = 2n+1$, si ha un isomorfismo di algebre

$$\mathbb{C}l(V) \simeq M_{2^n \times 2^n}(\mathbb{C}) \oplus M_{2^n \times 2^n}(\mathbb{C}) \tag{76}$$

11.3. **Il gruppo Spin.**

Sia V uno spazio vettoriale euclideo orientato, $\dim V \geq 2$, con prodotto scalare q. Consideriamo il sottoinsieme di $Cl(V,q)$

$$\mathrm{Pin}(V) = \{a \in Cl(V,q) \mid a = \eta_1 \cdots \eta_l, \eta_j \in V, \| \eta_j \|^2 = 1\}$$

dove $\| \eta \|^2 = q(\eta,\eta)$. Tale insieme ha una struttura di gruppo perchè:

$$(\eta_1 \cdots \eta_l)^{-1} = \eta_l \cdots \eta_1 (-1)^l$$

Si noti che $\mathrm{Pin}(V)$ è un sottogruppo *chiuso* del gruppo $Cl(V,q)^*$ degli elementi invertibili dell'algebra di Clifford; dato che quest'ultimo ha una naturale struttura di gruppo di Lie di dimensione $2^{\dim V}$, ne deduciamo che $\mathrm{Pin}(V)$ ha una naturale struttura di gruppo di Lie che lo rende un sottogruppo di Lie di $Cl(V,q)^*$. Definiamo ora il gruppo di Lie:

$$\mathrm{Spin}(V) = \mathrm{Pin}(V) \cap Cl^0(V,q)$$

pertanto

$$\mathrm{Spin}(V) = \{\eta_1 \cdots \eta_{2l}, \| \eta_j \| = 1\}$$

dove

$$(\eta_1 \cdots \eta_{2l})^{-1} = \eta_{2l} \cdots \eta_1$$

[16]infatti con qualche conto si verifica che se $\alpha \in \Lambda^k V^{0,1}$ allora $\Gamma\alpha = (-1)^k \alpha$.

Notare che per gli elementi $a \in \mathrm{Spin}(V)$ si ha $a^{-1} = a^T$, dove con ^{T} si intende l'ovvia operazione di trasposizione sull'algebra di Clifford: $(\eta_{i_1} \cdots \eta_{i_p})^T = \eta_{i_p} \cdots \eta_{i_1})$.
Definiamo ora un'azione di $\mathrm{Pin}(V)$ su $Cl(V, q)$: sia $w \in \mathrm{Pin}(V)$, $x \in Cl(V, q)$:

$$\rho(w)(x) = w \cdot x \cdot w^T.$$

$\rho(\ )$ è un omomorfismo di algebre: infatti

$$\rho(v \cdot w)(x) = (v \cdot w) \cdot x \cdot (v \cdot w)^T = v \cdot (w \cdot x \cdot w^T) \cdot v^T = (\rho(v) \circ \rho(w))(x)$$

Quest'azione trasforma $V \hookrightarrow Cl(V, q)$ in se stesso; infatti siano dati $x \in V$, $w \in V$, $\| w \| = 1$, allora

$$\rho(w)(x) = \mathcal{R}_w(x)$$

dove $\mathcal{R}_w$ è la riflessione ortogonale rispetto a $(\mathbb{R}w)^\perp$. La verifica è elementare: per ogni $x \in V$, $x = \alpha w + \beta w'$, con $w' \in (\mathbb{R}w)^\perp$ di norma unitaria. Allora $q(w, w') = 0$, e quindi $w \cdot w' = -w' \cdot w$; ne segue:

$$\rho(w)(x) = w \cdot (\alpha w + \beta w') \cdot w = -\alpha w - \beta w' \cdot (w)^2 = -\alpha w + \beta w' = \mathcal{R}_w(x)$$

Ne segue che se $w = w_1 \cdot w_2 \cdots w_p \in \mathrm{Pin}(V)$ allora $\rho(w)\big|_V$ è la composizione delle p riflessioni ortogonali $\mathcal{R}_{w_1}, \ldots, \mathcal{R}_{w_p}$. Ne segue che per ogni $w \in \mathrm{Spin}(V)$, $\rho(w)$ lascia V invariato ed agisce su V come un elemento di $SO(V)$ (si hanno soltanto un numero pari di riflessioni). Da ciò segue che:

$$\rho : \mathrm{Spin}(V) \longrightarrow SO(V)$$

e $\rho(\,)$ è un omomorfismo di gruppi. Vediamo anche che ρ è suriettiva per una nota proprietà delle trasformazioni ortogonali (una conseguenza del Teorema spettrale):
se $P \in SO(V)$ allora $P = R_{\eta_1} \cdots R_{\eta_{2p}}$ con la condizione $2p \leq dimV$; pertanto

$$P = \rho(\eta_1 \cdots \eta_{2p})$$

A questo punto possiamo caratterizzare $\mathrm{Ker}\rho$. Abbiamo bisogno del seguente Lemma che è comunque di interesse generale

Lemma 5. Sia $Z(Cl(V, q))$ il centro dell'algebra di Clifford (e cioè la sottoalgebra degli elementi che commutano con tutti gli elementi dell'algebra).

(i) Se $dimV = 2m$ allora $Z(Cl(V, q)) = \mathbb{R} \cdot 1$;
(ii) Se $dimV = 2m + 1$ allora $Z(Cl(V, q)) = Span(1, \xi_1 \cdots \xi_{2m+1})$.

Osservazione. Dall'ultima relazione si vede che nel caso di dimensione dispari:

$$Z(Cl(V)) \cap Cl^0(V) = \mathbb{R} \cdot 1$$

Dimostrazione.
Sia V di dimensione pari. Consideriamo $\{e_1, \ldots, e_n\}$ base ortonormale di V. Sia $v \in Z(Cl(V))$; allora $v = \sum_{i_1 < \ldots < i_p} C^{i_1 \cdots i_p} e_{i_1 \cdots i_p}$ e, per ipotesi, $v \cdot e_i = e_i \cdot v$. Fissiamo ora $e_{i_1} \cdots e_{i_p}$; se p è pari e $i \in \{i_1, \ldots, i_p\}$, allora

$$e_i e_{i_1} \cdots e_{i_p} = -e_{i_1} \cdots e_{i_p} e_i$$

Se p è dispari e $i \notin \{i_1, \ldots, i_p\}$, allora

$$e_i e_{i_1} \cdots e_{i_p} = -e_{i_1} \cdots e_{i_p} e_i$$

Pertanto, per ogni multiindice $|I| > 0$, $\exists i \in \{1, \ldots, n\}$, tale che

$$e_i e_I = -e_I e_i$$

da cui segue che v è necessariamente un multiplo dell'identità. La dimostrazione nel caso di dimensione dispari è analoga alla precedente. □

Sia ora $w \in \mathrm{Spin}(V)$, $w \in \mathrm{Ker}\rho$; allora $\forall x \in V$:

$$\begin{cases} w \cdot w^T & = & 1 & \text{perché } w \in \mathrm{Spin}(V) \\ w \cdot x \cdot w^T & = & x & \text{perché } w \in \mathrm{Ker}\rho \end{cases}$$

cioè $w \cdot x = x \cdot w \ \ \forall x \in V$ e quindi $w \in Z(Cl(V)) \cap \mathrm{Spin}(V)$. Da questa relazione e dal Lemma segue che $w = \pm 1$ e quindi $Ker\rho = \{\pm 1\}$. Possiamo quindi concludere che $\mathrm{Spin}(V)$ è un rivestimento $2-1$ di $SO(V)$. Verifichiamo che è un rivestimento non banale: basta mostrare che, essendo $SO(V)$ connesso, tale è anche $\mathrm{Spin}(V)$.

Proposizione 19. $\mathrm{Spin}(V)$ *è connesso.*

Corollario 6. $\mathrm{Spin}(V)$ *non è unione disgiunta di due copie di* $SO(V)$*.*

Dimostrazione della Proposizione. Dato che $SO(V)$ è connesso si ha che $\mathrm{Spin}(V)$ ha al più 2 componenti connesse, una che contiene 1, l'altra che contiene -1 . Basta allora verificare che (-1) è connesso ad 1 da un cammino. Consideriamo

$$w(\theta) = ((\cos\theta)e_1 + (\sin\theta)e_2) \cdot (-(\cos\theta)e_1 + (\sin\theta)e_2)$$

con $\{e_1, \ldots, e_n\}$ base ortonormale per V. Si vede che

$$w(\theta) \in \mathrm{Spin}(V) \quad w(0) = 1 \quad w(\tfrac{\pi}{2}) = -1$$

e la Proposizione è dimostrata.

Se V è $\mathbb{R}^n$ con prodotto scalare canonico allora denotiamo il gruppo spin tramite $\mathrm{Spin}(n)$.

Notiamo anche che $\mathrm{Spin}(V)$ con $dimV \geq 3$ è semplicemente connesso [17] Quindi $\mathrm{Spin}(V)$ è un rivestimento $2-1$ di $SO(V)$ non banale ed è il rivestimento universale se $dimV \geq 3$.
Si ha in particolare:

$$\mathrm{Lie}(\mathrm{Spin}(V)) \simeq \mathrm{Lie}(SO(V))$$

Più precisamente vale la seguente

Proposizione 20. *Sia λ l'isomorfismo:*

$$\lambda : \mathrm{Lie}(SO(V)) \to \mathrm{Lie}(\mathrm{Spin}(V)) \subset Cl^0(V)$$

inverso di $\mathrm{Lie}(\rho) : \mathrm{Lie}(\mathrm{Spin}(V)) \longrightarrow \mathrm{Lie}(SO(V))$*. Fissiamo una base ortonormale di V. La scelta di una base ortonormale individua isomorfismi di algebre di Lie* $\mathrm{Lie}(SO(V)) \leftrightarrow \{A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}), A = -A^T\}$ *e* $\mathrm{Lie}(\mathrm{Spin}(V)) \leftrightarrow \{A_{ij}e_i \cdot e_j \,, A = -A^T\}$*. L'isomorfismo λ è espicitamente dato da*

$$\lambda(A_{ij}) = \frac{1}{4} A_{ij} e_i \cdot e_j$$

Dimostrazione. Fissare una base ortonormale vuol dire prendere $V = \mathbb{R}^k$ con il prodotto scalare canonico. L'isomorfismo di $\mathrm{Lie}\, SO(V)$ con l'algebre di Lie delle matrici antisimmetriche è ben noto. L'isomorfismo che coinvolge $\mathrm{Lie}(\mathrm{Spin}(V))$ segue dalle considerazioni che stiamo per fare.

---

[17]per la dimostrazione di questo fatto basta utilizzare il fatto che la sfera unitaria in V, $\mathbb{S}^{n-1}$, è semplicemente connessa se $n \equiv \dim V \geq 3$: un laccetto in $\mathrm{Spin}(V)$ è un prodotto di laccetti:

$$\gamma_1(t) \cdots \gamma_{2n}(t)$$

ciascuno dei quali si trova nella sfera unitaria dello spazio vettoriale, cioè γ_j è un laccetto in $\{v \in V | \parallel v \parallel = 1\}$, che è uno spazio semplicemente connesso.

Consideriamo quindi le matrici A con $A_{ij} = 1$, $A_{ji} = -1$ e le altre componenti uguali a zero. Allora $A = g'(0)$ dove $g(t) \in SO(n)$

$$\begin{cases} g(t)e_i &= (\cos t)e_i + (\sin t)e_j \\ g(t)e_j &= (\cos t)e_j - (\sin t)e_i \\ g(t)e_k &= e_k \qquad\qquad\qquad \text{per } k \neq i, j \end{cases}$$

cioè A è il vettore tangente alla curva $g(t)$ in 0. Solleviamo $g(t)$ a $\mathrm{Spin}(n)$ definendo

$$h(t) = (\cos\frac{t}{2}) + (sin\frac{t}{2})e_ie_j \in \mathrm{Spin}(n)$$

Con semplici calcoli di trigonometria si vede che $h(t) \in Spin(n)$ e $\rho(h(t)) = g(t)$. Inoltre

$$h'(0) = \frac{1}{2}e_ie_j = \frac{1}{4}(e_ie_j - e_je_i)$$

che è quanto basta per poter concludere la dimostrazione. □

12. **Lezione 12.**

12.1. **Rappresentazioni del gruppo Spin.**

Abbiamo visto l'esistenza di un modulo di Clifford unitario naturale per l'algebra di Clifford di (V, q), spazio euclideo orientato di dimensione pari:

$$\mathbb{C}l(V) \simeq \mathrm{End}(S) = \mathrm{End}(S^+ \oplus S^-)\,. \tag{77}$$

con $\dim S = 2^{\dim V/2}$, $\dim S^\pm = 2^{\dim V/2-1}$ Possiamo restringere questa rappresentazione di $\mathbb{C}l(V)$ al gruppo $\mathrm{Spin}(V)$; otteniamo una rappresentazione unitaria

$$\Delta : \mathrm{Spin}(V) \longrightarrow U(S)$$

somma diretta di due rappresentazioni $\Delta_\pm : \mathrm{Spin}(V) \to U(S^\pm)$ (infatti l'azione di Clifford di un elemento $v \in V$ è dispari rispetto alla graduazione di S, quindi l'azione di un elemento di $\mathrm{Spin}(V)$ sarà pari). Si può dimostrare che $\Delta_\pm$ sono irriducibili e non-equivalenti: dato che non avremo bisogno di questa proprietà, ne omettiamo la dimostrazione. Δ è la rappresentazione spinoriale di V; $\Delta_\pm$ sono dette le *mezze rappresentazioni spinoriali* di V. In particolare

$$\Delta : \mathrm{Spin}(2n) \to U(2^n) \tag{78}$$

$$\Delta_\pm : \mathrm{Spin}(2n) \to U(2^{n-1}) \tag{79}$$

Se V ha dimensione dispari uguale a $2n+1$, allora sappiamo che $\mathbb{C}l(V,q)^0 \simeq \mathbb{C}l(W, q\big|_W)$ con W di dimensione $2n$ e otteniamo quindi una sola rappresentazione

$$\Delta : \mathrm{Spin}(2n+1) \to U(2^n)\,. \tag{80}$$

12.2. **Varietà Spin.**

Definizione 22. Sia E un fibrato vettoriale reale riemanniano orientabile su M con funzioni di transizione $\{g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow \mathrm{SO}(k)\}$. Diremo che E ammette una *struttura spin* se esistono sollevamenti $\left\{g'_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow \mathrm{Spin}(k)\right\}$ delle funzioni di transizione ($\rho(g'_{\alpha\beta}) = g_{\alpha\beta}$), tali che

$$\begin{cases} g'_{\alpha\beta} g'_{\beta\gamma} g'_{\gamma\alpha} = 1 \\ g'_{\alpha\alpha} = 1 \end{cases}$$

La scelta dei sollevamenti è detta scelta di una struttura spin. Se esiste una struttura spin allora E si dice fibrato spin. M si dice spin quando $\mathrm{T}M$ lo è.

Non tutti i fibrati sono spin, così come non tutti i fibrati sono orientabili. L'ostruzione all'orientabilità di un fibrato è misurata da una classe caratteristica $\mathrm{w}_1(E) \in \mathrm{H}^1(M, \mathbb{Z}_2)$ detta *prima classe di Stieffel-Whitney* . Analogamente, l'ostruzione all'esistenza di una struttura spin è misurata da una classe $\mathrm{w}_2(E) \in \mathrm{H}^2(M, \mathbb{Z}_2)$, la *seconda classe di Stieffel-Whitney.* Vediamo, in particolare, che localmente una struttura spin esiste sempre. Entriamo brevemente nei dettagli delle definizioni. Per fare questo occorre introdurre i gruppi di coomologgia di Čech di M a valori in $\mathbb{Z}_2$. Sia $\mathbb{Z}_2 = \{-1, 1\}$; scegliamo quindi la notazione moltiplicativa. Fissiamo in M un ricoprimento $\{U_{\alpha_j}\}$ con la seguente proprietà: l'intersezione di un numero finito di aperti è vuoto oppure contraibile. Usando coordinate normali si può dimostrare che un tale ricoprimento esiste sempre (ricoprimento con palle goedetiche). Una j-cocatena di Čech a valori in $\mathbb{Z}_2$ è una funzione $f(\alpha_0, \ldots, \alpha_j) \in \mathbb{Z}_2$ definita su $(j+1)$-ple di indici tali che $U_{\alpha_0} \cap \cdots \cap U_{\alpha_j} \neq \emptyset$ e con la ulteriore proprietà di essere totalmente simmetrica: $f(\alpha_{\sigma(0)},\ldots,\alpha_{\sigma(j)}) = f(\alpha_0,\ldots,\alpha_j)$ per ogni permutazione σ. Il gruppo moltiplicativo delle j-cocatene è denotato con $C^j(M;\mathbb{Z}_2)$. Esiste un operatore di cobordo sulle j-cocatena: $\delta_j : C^j \to C^{j+1}$:

$$(\delta_j f)(\alpha_0,\ldots,\alpha_{j+1}) = \Pi_{i=0}^{j+1} f(\alpha_0,\ldots,\hat{\alpha_i},\ldots,\alpha_{j+1}) .$$

Si verifica facilmente che $\delta^2 = 1$ (notazione moltiplicativa). La coomologia di M a valori in $\mathbb{Z}_2$ è per definizione $\mathrm{Ker}\delta/\mathrm{Im}\delta$. Ad esempio, se f_0 è una 0-cocatena, $\delta_0 f_0(\alpha_0,\alpha_1) = f_0(\alpha_0)f_0(\alpha_1)$; se f_1 è una 1-cocatena, allora $\delta_1 f_1(\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2) = f_1(\alpha_1,\alpha_2)f_1(\alpha_0,\alpha_2)f_1(\alpha_0,\alpha_1)$. Gli elementi f in $C^j(M,\mathbb{Z}_2)$ tali che $\delta f = 0$ sono detti j-cocicli. Si verifica che questi gruppi non dipendono dalla scelta del ricoprimento e sono di fatto isomorfi alla usuale coomologia con coefficienti in $\mathbb{Z}_2$.

Torniamo al nostro fibrato riemanniano E e fissiamo un ricoprimento geodetico banalizzante. Siano $\{g_{\alpha\beta}\}$ le funzioni di transizione di questo fibrato associate a questo ricoprimento. Quindi $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to \mathrm{O(n)}$. Definiamo un 1-cociclo come segue: $f(\alpha,\beta) = \det(g_{\alpha\beta}) \in \mathbb{Z}_2$. Dalle proprietà delle funzioni di transizione segue che $\delta f = 1$ e che una diversa scelta di funzioni di transizione definisce un cociclo $\tilde{f}$ che differisce da f per un cobordo: $f = \tilde{f}\delta_0 g_0$. La prima classe di Stieffel-Whitney è allora definita come la classe $w_1(E) = [f] \in H^1(M,\mathbb{Z}_2)$.
Dalla definizione data è facile vedere che

Proposizione 21. *E è orientabile se e soltanto se $w_1(E) = 0$.*

Sia ora E orientabile. Scegliamo dei sollevamenti delle funzioni di transizione al gruppo spin. Dato che $U_\alpha \cap U_\beta$ è contraibile questo sollevamento esiste sempre. Siano $g'_{\alpha\beta}$ questi sollevamenti. L'immagine tramite l'omomorfismo $\rho : \mathrm{Spin}(n) \to SO(n)$ di $g'_{\alpha\beta}g'_{\beta\gamma}g'_{\gamma\alpha}$ è uguale a l'identità. Quindi

$$g'_{\alpha\beta}g'_{\beta\gamma}g'_{\gamma\alpha} = \pm\mathbb{1} = \phi(\alpha,\beta,\gamma)\mathbb{1} ,$$

con $\phi(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{Z}_2$. Si verifica che $\phi \in C^2(M,\mathbb{Z}_2)$, che è un cociclo e che non dipende dalle scelte fatte a meno di cobordi. La classe $[\phi] \in H^2(M,\mathbb{Z}_2)$ ed è, per definizione, la seconda classe di Stieffel-Whitney $w_2(E)$. Si dimostra senza particolare difficoltà la seguente

Proposizione 22. *Il fibrato orientabile E è spin se e soltanto se $w_2(E) = 0$.*

Elenchiamo, senza dimostrazione, le pricipali proprietà della seconda classe di Stieffel-Whitney:

Proposizione 23. *Valgono le seguenti proprietà:*
- (i) $\mathrm{w}_2\left((\mathrm{L} \longrightarrow \mathbb{C}P^1)_\mathbb{R}\right) \neq 0$;
- (ii) w_2 *è stabile;*
- (iii) *se E è complesso, allora*
  - *3.1)* $\mathrm{c}_1(E) \in \mathrm{H}^2(M,\mathbb{Z})$,
  - *3.2)* $\mathrm{w}_2(E_\mathbb{R}) = \mathrm{c}_1(E) \bmod 2\mathbb{Z}$.

Di seguito riportiamo alcuni esempi.
- (i) $\mathbb{R}^n$ è spin.
- (ii) Ogni 3–varietà orientabile è spin (perché in questo caso si dimostra che $\mathrm{w}_2(\mathrm{T}M) = \mathrm{w}_1(\mathrm{T}M)^2$ e a destra c'è zero dato che per ipotesi M è orientabile).
- (iii) Ogni varietà omeomorfa a S^n è spin.
- (iv) Qualsiasi varietà con fibrato tangente stabilmente banale è spin (cioè se esiste V banale tale che $\mathrm{T}M \oplus V \simeq M \times \mathbb{R}^N$). In particolare se G è un gruppo di Lie compatto, quindi con fibrato tangente banale, G è spin.
- (v) Le superfici di Riemann sono spin, poiché $\int_M \mathrm{c}_1(\mathrm{T}^{1,0}) = 2-2g = 2(1-g)$ e quindi $\mathrm{w}_2 = 0$.
- (vi) $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ è spin sse $n \equiv 3 \pmod 4$.

(vii) $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ è spin sse n è dispari.
(viii) $\mathbb{H}\mathrm{P}^n$ è spin per ogni n.
(ix) $V^n(d) \subset \mathbb{C}\mathrm{P}^{n+1}$ ipersuperfice algebrica di grado d è spin sse $n + d \in 2\mathbb{Z}$.

12.3. **Fibrato degli spinori.**

Sia M spin di dimensione k. Sia $V = \mathbb{R}^k$ con il prodotto scalare canonico. Scegliamo una struttura spin sul fibrato tangente, cioè dei sollevamenti $g'_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow \mathrm{Spin}(k)$ delle funzioni di transizione $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow \mathrm{SO}(k)$.
Il *fibrato degli spinori* è ottenuto considerando la rappresentazione spin

$$\Delta : \mathrm{Spin}(k) \longrightarrow \mathrm{U}(S)$$

e definendo le

$$g^{\not S}_{\alpha\beta} = \Delta \circ g'_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow U(S).$$

Se $\dim M$ è pari allora $S = S^+ \oplus S^-$ e $g^{\not S}_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow U(S^+) \oplus U(S^-)$.
Definiamo

$$\not S = \frac{\bigsqcup_\alpha U_\alpha \times S}{\sim},$$

dove la relazione di equivalenza $\sim$ è data dalle $g^{\not S}_{\alpha\beta}$. $\not S$ è in maniera naturale un modulo di Clifford unitario. Se M ha dimensione pari allora $\not S = \not S^+ \oplus \not S^-$ è un modulo di Clifford unitario $\mathbb{Z}_2$-graduato.

12.4. **L'operatore di Atiyah-Singer sulle varietà spin.**

Sia M una varietà spin di dimensione $2k$. Sia $\left\{\omega^{LC}_\alpha\right\}$ la connessione di Levi–Civita su $\mathrm{T}M$,

$$\omega^{LC}_\alpha \in \Omega^1\left(U_\alpha, \mathrm{Lie}(\mathrm{SO}(2k))\right).$$

Consideriamo $\mathrm{Lie}(\rho) : \mathrm{Lie}(\mathrm{Spin}(2k)) \longrightarrow \mathrm{Lie}(\mathrm{SO}(2k))$ e notiamo con λ il suo inverso; consideriamo infine $\mathrm{Lie}(\Delta) : \mathrm{Lie}(\mathrm{Spin}(2k)) \to \mathrm{Lie}(U(S)) \equiv \mathrm{Lie}(U(2^k))$ e sia $\mu := \mathrm{Lie}(\Delta) \circ \lambda$. Le $\left\{\omega^{\not S}_\alpha \in \Omega^1\left(U_\alpha, \mathrm{Lie}(U(2^k))\right)\right\}$, definite da $\omega^{\not S}_\alpha = \mu(\omega^{LC}_\alpha)$, inducono una connessione

$$\nabla^{\not S} : C^\infty(M, \not S) \longrightarrow C^\infty(M, \mathrm{T}^*M \otimes \not S).$$

Se e_i è una base locale ortonormale di $\mathrm{T}M$ e

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} e_j = \omega^k_{ij} e_k,$$

allora, utilizzando la Proposizione (20), vediamo che localmente $\nabla^{\not S}$ si scrive come segue

$$\nabla^{\not S}_{\frac{\partial}{\partial x_i}} = \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{1}{4}\omega^k_{ij}\mathrm{c}(e^j)\mathrm{c}(e^k),$$

$$\nabla^{\not S} = \left(\begin{array}{c|c} \nabla^{\not S^+} & 0 \\ \hline 0 & \nabla^{\not S^-} \end{array}\right).$$

La connessione indotta dalla connessione di Levi-Civita è una connessione di Clifford compatibile con la metrica.

Definizione 23. L'*operatore di Atiyah–Singer* su una varietà spin è l'operatore di Dirac

$$\not D = \sum \mathrm{c}(e_i)\nabla^{\not S}_{e_i}.$$

L'operatore di Atiyah-Singer è quindi associato ad un modulo di Clifford unitario con connessione di Clifford. È bene notare che l'operatore di Atiyah-Singer dipende dalla scelta dei sollevamenti, e cioè dalla particolare scelta di struttura spin. Sarà chiaro fra breve che, d'altra parte, l'indice dell'operatore di Atiyah-Singer non dipende da questa particolare scelta. Ciò non risulta vero per invarianti analitici più sofisticati dell'indice.

Nel caso pari in esame l'operatore di Atiyah–Singer è $\mathbb{Z}_2$–graduato:

$$\not{D} = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \not{D}^- \\ \hline \not{D}^+ & 0 \end{array}\right) : C^\infty(M, \not{S}^+) \oplus C^\infty(M, \not{S}^-) \longrightarrow C^\infty(M, \not{S}^+) \oplus C^\infty(M, \not{S}^-),$$

con $\not{D}^- = (\not{D}^+)^*$.
Se M è di dimensione dispari uguale a $2k+1$ abbiamo il fibrato degli spinori definito tramite la rappresentazione spin in dimensione dispari

$$\Delta : \mathrm{Spin}(2k+1) \to U(2^k)$$

e l'operatore di Atiyah-Singer

$$\not{D} : C^\infty(M, \not{S}) \longrightarrow C^\infty(M, \not{S}),$$

che non è quindi $\mathbb{Z}_2$-graduato.

Esempio. Possiamo generalizzare l'operatore di Atiyah-Singer come segue. Se $W \longrightarrow M$ è un fibrato complesso qualsiasi dotato di una metrica e di una connessione compatile, consideriamo $\not{S} \otimes W$ con l'azione di Clifford $\mathrm{c}_W(v) = \mathrm{c}_{\not{S}}(v) \otimes 1\!\!1_W$ e la connessione $\nabla^{\not{S}\otimes W} = \nabla^{\not{S}} \otimes 1\!\!1 + 1\!\!1 \otimes \nabla^W$. Possiamo allora definire l'*operatore di Atiyah–Singer a coefficienti in* W come

$$\not{D}_W = \mathrm{c}_W \circ \nabla^{\not{S}\otimes W}.$$

Anche questo operatore è associato ad un fibrato di Clifford. Osserviamo che

$$\begin{aligned} \mathrm{End}(E) &= \mathrm{End}(\not{S}) \otimes \mathrm{End}(W) \\ &= \mathbb{C}l(M) \otimes \mathrm{End}(W) \\ &= \mathbb{C}l(M) \otimes \mathrm{End}_{\mathbb{C}l(M)}(E), \end{aligned}$$

e inoltre

$$\Omega^E = \Omega^{\not{S}} \otimes 1\!\!1 + 1\!\!1 \otimes \Omega^W.$$

12.5. **Enunciato del teorema di Atiyah–Singer su varietà spin.**

Teorema 14. *Sia (M, g) una varietà riemanniana compatta e $\not{D}$ un operatore di Dirac su un fibrato di Clifford $E \longrightarrow M$, allora*

$$\dim \mathrm{Ker}(\not{D}) < +\infty.$$

Teorema 15 (Atiyah–Singer per varietà spin)**.** *Sia M una varietà spin di dimensione $2k$, W un fibrato complesso su M, allora*

$$\dim \mathrm{Ker}\, \not{D}_W^+ - \dim \mathrm{Ker}\, \not{D}_W^- = \int_M \hat{\mathrm{A}}(M) \wedge \mathrm{Ch}(W).$$

L'intero $\dim \mathrm{Ker}\, \not{D}_W^+ - \dim \mathrm{Ker}\, \not{D}_W^-$ è detto *indice* dell'operatore $\not{D}_W$.

References

[1] M. Atiyah. *K-Theory*, Benjamin, New York, 1967.

[2] N. Berline, E. Getzler e M. Vergne. *Heat kernels and Dirac operators*, Springer-Verlag 1992.

[3] P. Griffiths, J. Harris. *Priciples of Algebraic Geometry*, Wiley, New York.

[4] K. Kodaira. *Complex manifolds and deformations of complex structures*. Grundlehren der Math. Wiss. **283**. Springer.

[5] H. B. Lawson, M. Michelshon. *Spin Geometry* Princeton Mathematical Series, Vol 38.

[6] J. Milnor. *Morse Theory*. Princeton University Press, Princeton 1963.

[7] J. Roe. *Elliptic operators, topology and asymptotic methods*. Longman Scientific and Technical 1988.

[8] M. Spivak. *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, vol. I, II ed., Publish or Perish, Inc., Wilmington, Delaware, 1979.

[9] F. Warner. *Foundations of Differentiable manifolds and Lie Groups*. Graduate text in Mathematics **94**. Springer-Verlag.

[10] R. O. Wells Jr. *Differential analysis on complex manifolds* Graduate text in Mathematics. **65** Springer-Verlag.