

Paolo Piazza

Corso di dottorato

Il teorema dell'indice di Atiyah-Singer

a.a. 2000-01

Note delle lezioni a cura di:

- Paolo Bravi
- Fabio Ciolli
- Domenico Fiorenza
- Giordano Giorgi
- Federico Incitti
- Claudia La Chioma
- Gerardo Morsella
- Guido Pezzini
- Adamo Uboldi
- Ezio Vasselli

CONTENTS

1. Lezione 1. Note a cura di Federico Incitti.	5
1.1. Definizione di fibrato vettoriale.	5
1.2. Funzioni di transizione.	5
1.3. Morfismi di fibrati.	6
1.4. Esempi notevoli.	6
1.5. Sezioni di un fibrato.	7
2. Lezione 2. Note a cura di Giordano Giorgi.	9
2.1. Operazioni sui fibrati.	9
2.2. Fibrato indotto da un'applicazione (pull-back).	9
2.3. Sottofibrato.	9
2.4. Metrica su un fibrato.	10
2.5. Matrice locale della metrica rispetto ad una base locale.	10
2.6. Fibrato normale.	10
2.7. Connessioni su un fibrato.	11
2.8. Descrizione locale delle connessioni.	11
2.9. Esistenza di una connessione.	12
2.10. Cambiamento di base locale.	12
3. Lezione 3. Note a cura di Gerardo Morsella.	13
3.1. Trasporto parallelo	13
3.2. Curvatura	16
3.3. Connessione di Levi-Civita.	17
4. Lezione 4. Note a cura di Ezio Vasselli	19
4.1. Descrizione locale della connessione di Levi-Civita.	19
4.2. Geodetiche di una varietà.	20
4.3. Coordinate Normali.	20
5. Lezione 5. Note a cura del docente.	24
5.1. Polinomi invarianti.	24
5.2. L'omomorfismo di Chern-Weil.	24
5.3. Riduzione del gruppo di struttura.	27
5.4. Definizione di classi di Chern.	28
6. Lezione 6. Note a cura di Domenico Fiorenza.	30
6.1. Le classi di Chern di un fibrato hermitiano.	30
6.2. Classe totale di Chern. Carattere di Chern. Classe di Todd.	31
6.3. Classi di Pontryagin di un fibrato riemanniano.	32
6.4. Classe di Pontryagin totale. Classe L di Hirzebruch. Classe \hat{A} .	35
7. Lezione 7. Note a cura di Fabio Ciolli.	37
7.1. Fibrati orientabili.	37
7.2. Polinomi $\mathbf{SO}(k)$ -invarianti. Classe di Eulero.	37
7.3. <i>Tre best sellers</i> della geometria moderna.	40
7.4. Alcune informazioni su varietà complesse e fibrati olomorfi.	41
8. Lezione 8. Note a cura di Guido Pezzini.	45
8.1. Algebre di Clifford	45
8.2. Moduli di Clifford.	46
8.3. Operatori di Dirac.	47
9. Lezione 9. Note a cura di Giordano Giorgi.	49

9.1.	L'operatore di Gauss-Bonnet.	49
9.2.	L'operatore di segnatura.	50
9.3.	L'operatore $\bar{\partial} + \bar{\partial}^*$.	50
9.4.	Operatori differenziali.	51
9.5.	Simbolo principale.	51
9.6.	Laplaciani generalizzati.	52
10.	Lezione 10. Note a cura di Claudia La Chioma.	53
10.1.	Alcune proprietà degli operatori di Dirac.	53
10.2.	Teorema di periodicità per le algebre di Clifford.	54
10.3.	Il gruppo Spin.	56
10.4.	Rappresentazioni del gruppo Spin.	59
11.	Lezione 11. Note a cura di Paolo Bravi.	61
11.1.	Riassunto.	61
11.2.	Chiralità.	61
11.3.	Varietà Spin.	62
11.4.	Fibrato degli spinori.	63
11.5.	L'operatore di Atiyah-Singer sulle varietà spin.	64
11.6.	Enunciato del teorema di Atiyah-Singer per gli operatori di Dirac.	65
12.	Lezione 12. Note a cura del docente.	67
12.1.	Laplaciano associato ad una connessione.	67
12.2.	Formula di Weitzenböck/Bochner/Lichnerowicz.	67
12.3.	Curvatura scalare positiva.	69
12.4.	Spazi di Sobolev.	70
13.	Lezione 13. Note a cura di Gerardo Morsella.	73
13.1.	Disuguaglianza di Gårding	73
13.2.	Soluzioni deboli.	74
13.3.	Mollificatori di Friedrichs. Debole=Forte.	75
13.4.	Proprietà spettrali degli operatori di Dirac.	76
14.	Lezione 14. Note a cura di Giordano Giorgi.	78
14.1.	Calcolo funzionale	78
14.2.	Operatori di Fredholm.	78
14.3.	Indice di un operatore di Dirac	78
14.4.	Teorema di Hodge.	79
14.5.	Il Teorema di Bochner.	81
14.6.	La caratteristica di Eulero-Poincaré, la segnatura ed il genere aritmetico sono indici.	81
15.	Lezione 15. Note a cura del docente.	85
15.1.	Equazione del calore.	85
15.2.	Proiezione ortogonale sul nucleo.	86
16.	Lezione 16. Note a cura di Adamo Ubaldi.	88
16.1.	Operatori di Hilbert-Schmidt:	88
16.2.	Operatori di classe traccia.	88
16.3.	Teorema di Lidski.	89
16.4.	Formula di McKean-Singer	90
17.	Lezione 17. Note a cura del docente.	92
17.1.	Sviluppo asintotico del nucleo del calore. Legge di Weyl.	92
17.2.	Lemma di Berezin-Patodi.	93
17.3.	L'idea geniale (riscaldamento di Getzler).	94

17.4. Oscillatore armonico e formula di Mehler.	96
References	97

1. **Lezione 1.** NOTE A CURA DI FEDERICO INCITTI.

1.1. **Definizione di fibrato vettoriale.**

Definizione 1. Un fibrato vettoriale C^∞ di rango k è una terna (E, π, M) , dove E e M sono varietà C^∞ , $\pi : E \rightarrow M$ è un'applicazione C^∞ suriettiva, tale che per ogni $m \in M$

- (i) la fibra $E_m = \pi^{-1}(m)$ ha una struttura di spazio vettoriale di dimensione k ;
- (ii) esiste un intorno U di m e un diffeomorfismo $\varphi_U : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^k$ tale che per ogni $m' \in U$

- a) $\varphi_U(E_{m'}) \subseteq \{m'\} \times \mathbb{R}^k$
- b) $\varphi_U|_{E_{m'}} : E_{m'} \rightarrow \{m'\} \times \mathbb{R}^k$ è un isomorfismo di spazi vettoriali.

La varietà M è detta *base* del fibrato. Gli intorni U sono detti *intorni banalizzanti*, i diffeomorfismi φ_U *banalizzazioni locali*. Se per ogni $m \in M$ l'intorno U può essere scelto uguale ad M , il fibrato vettoriale si dice *banale*.

Definizioni analoghe.

- Fibrati vettoriali nella categoria degli spazi topologici e applicazioni continue.
- Fibrati vettoriali su \mathbb{C} , \mathbb{H} .
- Se M ed E sono varietà complesse (quindi le carte $\psi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{C}^n$ hanno valori in \mathbb{C}^n e le funzioni di transizione $\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1} : \psi_\alpha(U_\alpha) \subseteq \mathbb{C}^n \rightarrow \psi_\beta(U_\beta) \subseteq \mathbb{C}^n$ sono biolomorfe) allora (E, π, M) è un fibrato vettoriale complesso *olomorfo* se ogni banalizzazione locale $\varphi_U : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{C}^k$ è biolomorfa.

1.2. **Funzioni di transizione.**

Dalla definizione di fibrato vettoriale segue che M ammette un ricoprimento $\{U_\alpha\}$ con intorni banalizzanti, che chiameremo *ricoprimento banalizzante*. Per ogni coppia di aperti U_α, U_β del ricoprimento, con $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, e per ogni $m \in U_\alpha \cap U_\beta$ l'applicazione

$$g_{\alpha\beta}(m) = \varphi_{U_\alpha}|_{E_m} \circ \left(\varphi_{U_\beta}^{-1} \Big|_{\{m\} \times \mathbb{R}^k} \right) : \{m\} \times \mathbb{R}^k \rightarrow \{m\} \times \mathbb{R}^k$$

è un isomorfismo di spazi vettoriali. Allora possiamo pensare alle $g_{\alpha\beta}(m)$ come applicazioni

$$g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow GL(k, \mathbb{R}).$$

Queste vengono dette *funzioni di transizione* e verificano due proprietà:

- 1) $g_{\alpha\beta}^{-1} = g_{\beta\alpha}$ in $U_\alpha \cap U_\beta$,
- 2) $g_{\alpha\beta} \circ g_{\beta\gamma} = g_{\alpha\gamma}$ in $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$.

Inoltre se M è una varietà differenziabile e se sono dati un ricoprimento $\{U_\alpha\}$ di M e una collezione di mappe $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow GL(k, \mathbb{R})$ soddisfacenti le proprietà 1) e 2), allora è possibile definire un fibrato vettoriale (E, π, M) che ammetta le $g_{\alpha\beta}$ come funzioni di transizione. Precisamente la varietà E è data dal quoziente

$$E = \frac{\bigsqcup (U_\alpha \times \mathbb{R}^k)}{\sim},$$

dove, per ogni $m \in U_\alpha \cap U_\beta$ e per ogni $\lambda \in \mathbb{R}^k$

$$U_\beta \times \mathbb{R}^k \ni (m, \lambda) \sim (m, g_{\alpha\beta}(m)\lambda) \in U_\alpha \times \mathbb{R}^k.$$

Quindi si può dare una definizione alternativa di fibrato vettoriale, come una varietà M su cui siano dati un ricoprimento $\{U_\alpha\}$ e una collezione di mappe $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow GL(k, \mathbb{R})$ soddisfacenti le proprietà 1) e 2).

1.3. Morfismi di fibrati.

Definizione 2. Siano (E, π, M) e (F, π', M) due fibrati vettoriali (sulla stessa base). Una mappa di fibrati (o un morfismo di fibrati) da (E, π, M) a (F, π', M) è un'applicazione differenziabile $f : E \rightarrow F$ che manda omomorficamente fibre in fibre corrispondenti, ovvero tale che per ogni $m \in M$

- 1) $f(E_m) \subseteq F_m$
- 2) $f|_{E_m} : E_m \rightarrow F_m$ è un omomorfismo di spazi vettoriali.

Una mappa di fibrati $f : E \rightarrow F$ si dice *isomorfismo di fibrati* se manda isomorficamente fibre in fibre corrispondenti, ovvero se per ogni $m \in M$

$$f|_{E_m} : E_m \rightarrow F_m \text{ è un isomorfismo di spazi vettoriali.}$$

1.4. Esempi notevoli.

1) Sia M una varietà differenziabile. Per ogni punto $m \in M$ indichiamo con $T_m M$ lo spazio tangente alla varietà M nel punto m . Poniamo

$$TM = \bigcup_{m \in M} T_m M$$

e definiamo $\pi : TM \rightarrow M$ ponendo $\pi(x) = m$ se $x \in T_m M$. Si verifica che (TM, π, M) è un fibrato vettoriale il cui rango è uguale alla dimensione di M . Tale fibrato vettoriale si dice *fibrato tangente* ad M .

2) Sia $\mathbb{R}P^n$ lo spazio proiettivo di dimensione n . Ricordiamo che $\mathbb{R}P^n \cong S^n / \sim$, dove \sim è la relazione che identifica i vettori \underline{x} e $-\underline{x}$. Sappiamo che $\mathbb{R}P^n$ è una varietà differenziabile compatta. Consideriamo l'insieme

$$E_{1,n+1}(\mathbb{R}) = \{([\underline{x}], \underline{v}) \in \mathbb{R}P^n \times \mathbb{R}^{n+1} : \underline{v} = \lambda \underline{x}\}$$

e l'applicazione $\pi : E_{1,n+1}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}P^n$ definita da $\pi([\underline{x}], \underline{v}) = [\underline{x}]$. La terna $(E_{1,n+1}(\mathbb{R}), \pi, \mathbb{R}P^n)$ è un fibrato vettoriale di rango 1. (Per ogni $[\underline{x}] \in \mathbb{R}P^n$, consideriamo U_1 , un intorno di \underline{x} in S^n ad intesezione vuota con la sua immagine tramite la mappa antipodale; l'aperto $U = U_1 / \sim \subseteq \mathbb{R}P^n$ è un intorno banalizzante di $[\underline{x}]$ e il diffeomorfismo $\varphi_U : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}$ definito da $\varphi_U([\underline{x}], t\underline{x}) = ([\underline{x}], t)$ è una banalizzazione locale.)

3) Analogamente la terna $(E_{1,n+1}(\mathbb{C}), \pi, \mathbb{C}P^n)$ è un fibrato vettoriale complesso olomorfo di rango 1.

4) Poniamo

$$G_k(\mathbb{R}^{n+k}) = \left\{ \text{sottospazi vettoriali } k\text{-dimensionali di } \mathbb{R}^{n+k} \right\}.$$

Lo spazio $G_k(\mathbb{R}^{n+k})$ è una varietà differenziabile (compatta) di dimensione nk . Consideriamo l'insieme

$$E_{k,n+k}(\mathbb{R}) = \left\{ (p, \underline{v}) \in G_k(\mathbb{R}^{n+k}) \times \mathbb{R}^{n+k} : \underline{v} \in p \right\}$$

e l'applicazione $\pi : E_{k,n+k}(\mathbb{R}) \rightarrow G_k(\mathbb{R}^{n+k})$ definita da $\pi(p, \underline{v}) = p$. La terna $(E_{k,n+k}(\mathbb{R}), \pi, G_k(\mathbb{R}^{n+k}))$ è un fibrato vettoriale di rango k . Si noti che

$$(E_{1,n+1}(\mathbb{R}), \pi, G_1(\mathbb{R}^{n+1})) = (E_{1,n+1}(\mathbb{R}), \pi, \mathbb{R}P^n).$$

5) Analogamente lo spazio $G_k(\mathbb{C}^{n+k})$ è una varietà complessa di dimensione nk e la terna $(E_{n+k}(\mathbb{C}), \pi, G_k(\mathbb{C}^{n+k}))$ è un fibrato vettoriale complesso olomorfo di rango k .

1.5. Sezioni di un fibrato.

Definizione 3. Sia (E, π, M) un fibrato vettoriale. Una sezione C^∞ del fibrato è un'applicazione differenziabile $s : M \rightarrow E$ tale che $\pi \circ s = \text{Id}|_M$ ovvero tale che per ogni $m \in M$ risulti $s(m) \in E_m = \pi^{-1}(m)$.

Denotiamo con $C^\infty(M, E)$ l'insieme delle sezioni C^∞ del fibrato (E, π, M) . Si noti che, poiché ogni fibra è uno spazio vettoriale, anche $C^\infty(M, E)$ è uno spazio vettoriale, le cui operazioni sono definite punto per punto.

Proposizione 1. Un fibrato vettoriale (E, π, M) di rango k è banale se e solo se esistono k sezioni C^∞ s_1, \dots, s_k linearmente indipendenti, ovvero tali che $s_1(m), \dots, s_k(m)$ siano linearmente indipendenti per ogni $m \in M$.

Dimostrazione.

\Rightarrow Supponiamo (E, π, M) banale. Allora esiste una mappa di fibrati $\Phi : E \rightarrow M \times \mathbb{R}^k$ che induce un isomorfismo $\Phi : E_m \rightarrow \{m\} \times \mathbb{R}^k$ su ogni fibra. Sia $\Psi = \Phi^{-1} : M \times \mathbb{R}^k \rightarrow E$ e definiamo le applicazioni $s_i : M \rightarrow E$ ponendo $s_i(m) = \Psi(m, \underline{e}_i)$ (dove \underline{e}_i è l' i -esimo vettore canonico di \mathbb{R}^k). Le applicazioni s_1, \dots, s_k sono sezioni C^∞ e per costruzione sono linearmente indipendenti.

\Leftarrow Supponiamo che esistano k sezioni C^∞ s_1, \dots, s_k linearmente indipendenti. Definiamo $\Psi : M \times \mathbb{R}^k \rightarrow E$ ponendo $\Psi(m, \underline{x}) = x^1 s_1(m) + \dots + x^k s_k(m)$. L'applicazione Ψ è C^∞ e induce un isomorfismo su ogni fibra. Allora è facile vedere che Ψ è un diffeomorfismo. Quindi (E, π, M) è banale. \square

Esempio. Il fibrato $(E_{1,n+1}(\mathbb{R}), \pi, \mathbb{R}P^n)$ non è banale.

Dimostrazione. Basta far vedere che ogni $s \in C^\infty(\mathbb{R}P^n, E_{1,n+1}(\mathbb{R}))$ si annulla in un punto. Sia $s : \mathbb{R}P^n \rightarrow E_{1,n+1}(\mathbb{R})$ una sezione. Sia $p : S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$ la proiezione canonica. L'applicazione $q = s \circ p : S^n \rightarrow E_{1,n+1}(\mathbb{R})$ è tale che $q(\underline{x}) = ([\underline{x}], t(\underline{x})\underline{x})$, con $t \in C^\infty(S^n)$. Inoltre, poiché $q(-\underline{x}) = q(\underline{x})$, si deve avere $t(-\underline{x}) = -t(\underline{x})$. Allora, poiché S^n è connessa e in particolare $t \in C^0(S^n)$, deve esistere $\underline{x}_0 \in S^n$ tale che $t(\underline{x}_0) = 0$, ovvero tale che $s([\underline{x}_0]) = ([\underline{x}_0], \underline{0})$. \square

Ricordando la definizione alternativa di fibrato vettoriale, possiamo dare anche una definizione alternativa di sezione. Sia M un fibrato vettoriale, con ricoprimento $\{U_\alpha\}$ e funzioni di transizione $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow GL(k, \mathbb{R})$. Una sezione C^∞ del fibrato è allora una collezione $\{s_\alpha\}$ di mappe $s_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^k$ differenziabili tali che per ogni coppia di aperti U_α e U_β non disgiunti e per ogni $m \in U_\alpha \cap U_\beta$ risulti

$$s_\alpha(m) = g_{\alpha\beta}(m) s_\beta(m).$$

Le due definizioni sono equivalenti. Sia s una sezione C^∞ (nel senso della prima definizione). Occorre verificare che esiste una collezione $\{s_\alpha\}$ di mappe che soddisfa le condizioni richieste nella seconda definizione. Sia $m \in M$ e siano U_α un intorno di m banalizzante e φ_α una banalizzazione locale su U_α . Se $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_k$ sono i vettori della base canonica di \mathbb{R}^n , $\varphi_\alpha^{-1}(m, \underline{e}_1), \dots, \varphi_\alpha^{-1}(m, \underline{e}_k)$ sono una base di E_m . Quindi esistono k numeri, che chiamo $s_\alpha^1(m), \dots, s_\alpha^k(m)$, tali che

$$s(m) = \sum_{i=1}^k s_\alpha^i(m) \varphi_\alpha^{-1}(m, \underline{e}_i).$$

Allora, considerando la restrizione di s a $U_\alpha \cap U_\beta$, si ha

$$s|_{U_\alpha \cap U_\beta} = \sum_{i=1}^k s_\alpha^i(m) \varphi_\alpha^{-1}(m, \underline{e}_i) = \sum_{i=1}^k s_\beta^i(m) \varphi_\beta^{-1}(m, \underline{e}_i).$$

Applicando φ_α al secondo e terzo membro, si ha

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k s_\alpha^i(m) \underline{e}_i &= \sum_{i=1}^k s_\beta^i(m) \left(\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} \right) (m, \underline{e}_i) = \\ &= \sum_{i=1}^k s_\beta^i(m) g_{\alpha\beta}(m) (\underline{e}_i) = \\ &= \sum_{i=1}^k s_\beta^i(m) (g_{\alpha\beta}(m))_i^j (\underline{e}_j). \end{aligned}$$

Quindi

$$s_\alpha^k(m) = s_\beta^i(m) (g_{\alpha\beta}(m))_i^k,$$

Allora, ponendo $s_\alpha = (s_\alpha^1, \dots, s_\alpha^k)^t$, si ottiene

$$s_\alpha = g_{\alpha\beta} s_\beta.$$

Quindi la collezione $\{s_\alpha\}$ soddisfa le condizioni richieste nella seconda definizione. Come esercizio vi lascio da verificare il viceversa.

2. Lezione 2. NOTE A CURA DI GIORDANO GIORGI.

2.1. Operazioni sui fibrati.

Dati 2 fibrati su M (E, π^E, M) , (F, π^F, M) si possono definire i fibrati

$$E \otimes F, \quad E \oplus F, \quad \Lambda^n E, \quad \text{Hom}(E, F)$$

a partire dagli spazi vettoriali delle fibre; ad esempio

$$E \oplus F := \cup_{m \in M} E_m \oplus F_m.$$

Il fibrato $(E \oplus F, \pi^{E \oplus F}, M)$ ha come fibre $(\pi^{E \oplus F})^{-1}(m) = E_m \oplus F_m$; per ipotesi $\forall m \in M$ esistono gli aperti U^E , U^F e i diffeomorfismi

$$\phi^E : (\pi^E)^{-1}(U^E) \rightarrow U^E \times \mathbb{R}^k, \quad \phi^F : (\pi^F)^{-1}(U^F) \rightarrow U^F \times \mathbb{R}^n$$

con cui si costruisce il diffeomorfismo

$$\phi^{E \oplus F} : (\pi^{E \oplus F})^{-1}(U^E \cap U^F) \rightarrow U^E \cap U^F \times \mathbb{R}^{k+n}$$

che dà la banalizzazione di $E \oplus F$.

2.2. Fibrato indotto da un'applicazione (pull-back).

Sia f un'applicazione tra le varietà differenziabili M ed N e sia (E, π, M) un fibrato su M . Si consideri l'insieme

$$f^*E = \{(n, v) \in N \times E \mid f(n) = \pi(v)\}.$$

Esistono due applicazioni naturali \hat{f} e π^{ind} :

$$\hat{f} : f^*E \rightarrow E \text{ con } \hat{f}(n, v) = v$$

$$\pi^{ind} : f^*E \rightarrow N \text{ con } \pi^{ind}(n, v) = n$$

(f^*E, π^{ind}, N) è un fibrato vettoriale che è per definizione il *fibrato indotto da f su N* . Infatti, sia U un intorno banalizzante di M . $f^{-1}(U)$ è un aperto di N e si ponga $f^{-1}(U) = \tilde{U}$. Sia $\psi : U \times \mathbb{R}^k \rightarrow \pi^{-1}(U)$ una banalizzazione di $\pi^{-1}(U)$. Si definisca:

$$\tilde{\psi} : \tilde{U} \times \mathbb{R}^k \rightarrow (\pi^{ind})^{-1}(\tilde{U}) \text{ con } \tilde{\psi}(n, v) = (n, \psi(f(n), v))$$

Si ha $\pi(\psi(f(n), v)) = f(n)$ come deve essere ed è facile verificare che $\tilde{\psi}$ è un diffeomorfismo.

Si può dare una definizione di fibrato indotto utilizzando le funzioni di transizione: se $E = \{(U_\alpha, g_{\alpha\beta})\}$, si ponga $f^*E = \{(f^{-1}(U_\alpha), g_{\alpha\beta} \circ f)\}$.

2.3. Sottofibrato.

Sia (E, π, M) un fibrato vettoriale. Dato $E_m = \pi^{-1}(m)$, si può considerare una collezione di sottospazi vettoriali $F_m \subseteq E_m$ tali che $F = \cup_{m \in M} F_m$ sia una sottovarietà di E . Rimane in tal modo definito un fibrato (F, π, M) che è detto *sottofibrato* di E ; le banalizzazioni locali si ottengono come restrizioni di quelle di E date da:

$$\phi_{E,U} : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^k$$

a patto di prendere U sufficientemente piccolo. In termini delle funzioni di transizione: possiamo scrivere in una tale banalizzazione

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} h_{\alpha\beta} & k_{\alpha\beta} \\ 0 & j_{\alpha\beta} \end{pmatrix}$$

e le $h_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow GL(l, \mathbb{R})$ sono le funzioni di transizione di (F, π, M) .

Con la stessa tecnica si può costruire il fibrato quoziente $(E/F, \pi, M)$ le cui funzioni di transizione sono le $j_{\alpha\beta}$.

2.4. Metrica su un fibrato.

Dato un fibrato reale (E, π, M) , si definisce una metrica g come una sezione del fibrato $E^* \otimes E^*$: $g \in C^\infty(M, E^* \otimes E^*)$ e tale che $g(m)$, forma bilineare su $E \times E$, sia simmetrica $g(m)(u, v) = g(m)(v, u)$ e definita positiva:

$$g(m)(v, v) \geq 0 \quad \forall v \in E_m$$

Inoltre g si dice metrica riemanniana su M se $E = TM$.

2.5. Matrice locale della metrica rispetto ad una base locale.

Tramite le banalizzazioni locali, abbiamo $\forall U_\alpha$, intorno banalizzante, una base locale di sezioni. Infatti se $\psi_\alpha : U_\alpha \times \mathbb{R}^k \rightarrow \pi^{-1}(U_\alpha)$ è una banalizzazione locale, fissata una base e_i in \mathbb{R}^k , si ha una base locale di sezioni definita da:

$$s_i^\alpha(m) := \psi_\alpha(m, e_i) \in C^\infty(U_\alpha, E)$$

Se $u, v \in \pi^{-1}(U_\alpha)$, allora $u = \lambda^i s_i^\alpha$ e $v = \mu^j s_j^\alpha$, dove si è utilizzata la convenzione della somma su indici ripetuti e:

$$g(u, v) = \lambda^i \mu^j g(s_i^\alpha, s_j^\alpha)$$

Dunque $\forall m \in U_\alpha$, $g(s_i^\alpha, s_j^\alpha)(m) := g_{ij}(m)$ è la matrice locale della metrica rispetto alla base locale $\{s_i^\alpha\}$. Sia $\{s_i^{\alpha'}\}$ un'altra base locale con

$$s_i^{\alpha'} = G_i^j s_j^\alpha$$

allora $g' = G^T g G$ con $g_{ij'} = g(s_i^{\alpha'}, s_j^{\alpha'})$.

In particolare, si considerino due intorni banalizzanti U_α, U_β ed in $U_\alpha \cap U_\beta$ le basi $\{s_i^\alpha\}, \{s_i^\beta\}$, allora $s_i^\beta = (g_{\alpha\beta})_i^j s_j^\alpha$. Se $g(\alpha)(m)$ è la matrice della metrica $\forall m \in U_\alpha$, si ha:

$$g(\beta) = g_{\alpha\beta}^T g(\alpha) g_{\alpha\beta}$$

Quest'ultima relazione può essere utilizzata per definire la metrica mediante le funzioni di transizione $g_{\alpha\beta}$.

Se (E, π, M) è un fibrato complesso analogamente si definisce la nozione di metrica hermitiana su (E, π, M) .

2.6. Fibrato normale.

Sia F un sottofibrato di E dotato di metrica g , allora è ben definito il sottofibrato:

$$F^\perp = \bigcup_{m \in M} F_m^\perp$$

Si ha $E/F \simeq F^\perp$ ed $F \oplus F^\perp \simeq E$ come fibrati. Se $M \subseteq \mathbb{R}^n$ è una sottovarietà e si considera il sottofibrato $TM \subseteq M \times \mathbb{R}^n = T\mathbb{R}^n|_M$, allora $N_M \equiv (TM)^\perp$ è il fibrato normale ad M . Analogamente se $M \subseteq (X, g)$ è una sottovarietà di una varietà riemanniana X dotata di metrica g , allora $(TM)^\perp \equiv N_{M/X}$, l'ortogonale di TM in $TX|_M$, è il fibrato normale ad M in X .

2.7. Connessioni su un fibrato.

Sia X un campo di vettori su M e cioè un elemento di $C^\infty(M, TM)$. Data una sezione $s \in C^\infty(M, E)$ ed una banalizzazione locale del fibrato (E, π, M) , si consideri la corrispondente funzione vettoriale $s^\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^k$. Si potrebbe considerare il vettore di 1-forme $(ds^{\alpha,1}, \dots, ds^{\alpha,k})$ e porre la derivata di s lungo X pari a $(ds^{\alpha,1}(X), \dots, ds^{\alpha,k}(X))$. Tale procedimento, però, non si globalizza: cambiando base si avrebbe $ds^\beta = d(g_{\alpha\beta}s^\alpha) = dg_{\alpha\beta}s^\alpha + g_{\alpha\beta}ds^\alpha$, dunque se $dg_{\alpha\beta} \neq 0$ le ds^β non si trasformano mediante le sole funzioni di transizione ma anche attraverso $dg_{\alpha\beta}$ ed s^α . Ci domandiamo quindi come poter derivare una sezione lungo un campo di vettori. La nozione di *connessione* è introdotta proprio a questo scopo.

Definizione 4. Una connessione su un fibrato (E, π, M) è un operatore lineare

$$\nabla : C^\infty(M, E) \rightarrow C^\infty(M, T^*M \otimes E)$$

verificante la regola di Leibnitz:

$$\nabla(fs) = df \otimes s + f\nabla s \quad \forall f \in C^\infty(M) \text{ e } s \in C^\infty(M, E)$$

Osservazioni.

Se $X \in C^\infty(M, TM)$ è un campo di vettori su M , $X = u_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ localmente; inoltre, $df \in C^\infty(M, T^*M)$ e $df(X) = X(f) = u_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$. Ponendo $\nabla_s(X) := \nabla_X s$ si ha un operatore

$$\nabla_X : C^\infty(M, E) \rightarrow C^\infty(M, E)$$

che si definisce *derivata covariante di $s \in C^\infty(M, E)$ lungo $X \in C^\infty(M, TM)$* . Si noti che $\forall f \in C^\infty(M)$, si ha

$$\nabla_{fX}(s) = \nabla_s(fX) = f\nabla_s(X) = f\nabla_X s$$

essendo ∇s lineare su TM . Inoltre

$$\nabla_X(fs) = \nabla(fs)(X) = (df \otimes s)(X) + f\nabla_s(X) = X(f)s + f\nabla_X s.$$

Sia $T : C^\infty(M, E) \rightarrow C^\infty(M, E)$ un operatore lineare e tale che $T(fs) = fT(s)$ se $f \in C^\infty(M)$ e $s \in C^\infty(M, E)$. Si può definire in maniera naturale un operatore $\hat{T} \in C^\infty(M, \text{End}(E))$. Infatti sia $e_m \in E_m$, allora esiste $e \in C^\infty(M, E)$ tale che $e(m) = e_m$ e si ponga $T(e)(m) \equiv \hat{T}(m)(e_m)$. Per l'ipotesi la definizione è ben posta. Viceversa è ovvio che dato un $\hat{T} \in C^\infty(M, \text{End}(E))$ si possa definire $T : C^\infty(M, E) \rightarrow C^\infty(M, E)$ nello stesso modo. Dunque vi è una corrispondenza biunivoca $T \leftrightarrow \hat{T}$. Analogamente, un operatore $T : C^\infty(M, E) \rightarrow C^\infty(M, T^*M \otimes E)$ tale che $T(fs) = fT(s)$ definisce in maniera naturale una sezione di $C^\infty(M, T^*M \otimes \text{End}(E))$. Tale osservazione risulterà subito utile.

Siano, infatti, ∇ e ∇' due connessioni, allora $(\nabla - \nabla')(fs) = \nabla(fs) - \nabla'(fs) = df \otimes s + f\nabla s - df \otimes s + f\nabla' s = f(\nabla - \nabla')(s)$ ossia $(\nabla - \nabla')$ soddisfa la proprietà sopra enunciata per l'operatore T e dunque si può scrivere:

$$\nabla = \nabla' + \omega$$

ove $\omega \in C^\infty(M, T^*M \otimes \text{End}(E))$ (stiamo quindi identificando gli operatori T con \hat{T}).

2.8. Descrizione locale delle connessioni.

Sia U un aperto banalizzante ed e_i una base locale di $\pi^{-1}(U)$. Allora $\nabla e_i \in C^\infty(U, \pi^{-1}(U) \otimes T^*U)$ e dunque

$$\nabla e_i = f_{ik}^j dx_k \otimes e_j = \omega_i^j \otimes e_j$$

con $\omega_i^j \in C^\infty(U, T^*U) \equiv \Omega^1(U)$. La (ω_i^j) è per definizione la matrice locale di 1-forme associata alla connessione ∇ nella base locale scelta. Data $s \in C^\infty(U, \pi^{-1}(U))$ si ha $s = s^i e_i$ e quindi $\nabla s = \nabla(s^i e_i) = ds^i \otimes e_i + s^i \nabla e_i = ds^k \otimes e_k + s^i \omega_i^k \otimes e_k = (ds^k + s^i \omega_i^k) \otimes e_k$. In forma compatta:

$$\nabla s = ds + \omega s.$$

2.9. Esistenza di una connessione.

Si noti che se ∇ e ∇' sono due connessioni e $g \in C^\infty(M)$ allora $g\nabla + (1-g)\nabla'$ è ancora una connessione. Utilizzando un ricoprimento $\{U_\alpha\}$ banalizzante, una partizione subordinata ad esso e le ovvie connessioni banali (e cioè date dai differenziali) su $\pi^{-1}(U_\alpha)$, si ottiene una connessione su tutto E .

2.10. Cambiamento di base locale.

Sia $e_i' = G_i^j e_j$ allora si ha:

$$\begin{aligned} \nabla(e_i') &= \nabla(G_i^j e_j) = dG_i^j \otimes e_j + G_i^j \nabla e_j \\ &= dG_i^j \otimes e_j + G_i^j \omega_j^k \otimes e_k = (dG_i^k + G_i^j \omega_j^k) \otimes e_k \end{aligned}$$

Il primo membro a sinistra è anche uguale a $\nabla(e_i') = \omega_i^j' \otimes e_j' = \omega_i^j' G_j^m \otimes e_m$ ed essendo e_m una base si ha:

$$\omega_i^j' G_j^k = dG_i^k + G_i^j \omega_j^k$$

ossia in forma compatta:

$$\omega' = G^{-1} dG + G^{-1} \omega G$$

In particolare in $U_\alpha \cap U_\beta$ si ha:

$$\nabla = d + \omega_\alpha \text{ rispetto a } \{s_i^\alpha\}$$

$$\nabla = d + \omega_\beta \text{ rispetto a } \{s_i^\beta\}$$

e $s_i^\beta = (g_{\alpha\beta})_i^j s_j^\alpha$, dunque:

$$\omega_\beta = (g_{\alpha\beta})^{-1} dg_{\alpha\beta} + (g_{\alpha\beta})^{-1} \omega_\alpha g_{\alpha\beta}$$

formula che lega le matrici locali di 1-forme della connessione in due intorni banalizzanti differenti.

3. Lezione 3. NOTE A CURA DI GERARDO MORSELLA.

3.1. Trasporto parallelo.

Sia $\pi : E \rightarrow M$ un fibrato vettoriale di rango k e ∇ una connessione su di esso. Data inoltre una base locale di sezioni di E , $(e_i)_{i=1,\dots,k}$, su un aperto banalizzante $U \subseteq M$, siano $\omega_i^j \in C^\infty(U, T^*U)$, $i, j = 1, \dots, k$, le forme di connessione di ∇ rispetto a tale base. Si ha allora, per $s \in C^\infty(M, E)$, $X \in C^\infty(M, TM)$,

$$(1) \quad \nabla_X s|_U = (ds^j + \omega_i^j s^i)(X)e_j,$$

e se su U , $X = X^l \frac{\partial}{\partial x^l}$,

$$(2) \quad \nabla_X s|_U = \left(\frac{\partial s^j}{\partial x^l} X^l + s^i \Gamma_{il}^j X^l \right) e_j,$$

dove $\Gamma_{il}^j \in C^\infty(U)$, sono le componenti di ω_i^j ,

$$(3) \quad \omega_i^j = \Gamma_{il}^j dx^l.$$

Da queste formule si vede che fissato $m \in M$, $\nabla_X s(m)$ dipende dalle componenti $X^l(m)$, di $X(m)$, ma non dalle loro derivate. Dato allora un vettore $X_m \in T_m M$, si potrà definire $\nabla_{X_m} s \in E_m$ come $\nabla_{\tilde{X}} s(m)$, con \tilde{X} estensione arbitraria di X_m ad M , non dipendendo, per quanto appena osservato, il valore di questo dall'estensione scelta. In particolare se $\gamma : I \rightarrow M$, $I \subseteq \mathbb{R}$ aperto, è una curva C^∞ , sarà ben definito $\nabla_{\dot{\gamma}} s(t) := \nabla_{\dot{\gamma}(t)} s$, $t \in I$, il che ci permette di dare la seguente

Definizione 5. Una sezione $s \in C^\infty(M, E)$ è parallela lungo una curva C^∞ γ , se $\nabla_{\dot{\gamma}} s = 0$.

Se, in coordinate locali, $\gamma = (\gamma^1, \dots, \gamma^n)$, si avrà, dalla (2),

$$(4) \quad \begin{aligned} \nabla_{\dot{\gamma}} s(t) &= \left(\frac{\partial s^j}{\partial x^l} \frac{d\gamma^l}{dt} + s^i \Gamma_{il}^j(\gamma(t)) \frac{d\gamma^l}{dt} \right) e_j \\ &= \left(\frac{ds^j}{dt} + s^i \Gamma_{il}^j(\gamma(t)) \frac{d\gamma^l}{dt} \right) e_j, \end{aligned}$$

e pertanto s sarà parallela lungo γ se e soltanto se la funzione $t \in I \rightarrow s(t) = (s^1(t), \dots, s^k(t))$ è soluzione del sistema lineare di k equazioni differenziali ordinarie

$$(5) \quad \frac{ds^j}{dt} + s^i \Gamma_{il}^j(\gamma(t)) \frac{d\gamma^l}{dt} = 0, \quad j = 1, \dots, k.$$

Ci si può allora porre la questione di ricercare le soluzioni di un problema di Cauchy associato al sistema (5). Per far questo conviene prima però generalizzare le nozioni di sezione e di connessione.

Definizione 6. Siano E , γ come sopra. Una sezione di E lungo γ è una funzione C^∞ $s : I \rightarrow E$, tale che $s(t) \in E_{\gamma(t)}$ per ogni $t \in I$.

La connessione ∇ definisce allora in modo naturale una derivazione $\frac{D}{Dt}$ delle sezioni lungo γ , verificante la regola di Leibniz

$$\frac{D}{Dt}(fs) = f's + f \frac{Ds}{Dt}, \quad f \in C^\infty(I).$$

Ingenuamente, si potrebbe pensare di poter fare questo estendendo una sezione s lungo γ ad una sezione di E definita su un intorno aperto di $\gamma(I)$ (l'immagine di γ), ed utilizzando poi la definizione precedente di $\nabla_{\dot{\gamma}}$. Questo è però in generale impossibile, poiché in generale s non sarà estendibile,

ad esempio perché γ potrebbe avere autointersezioni, o punti di accumulazione non banali (cioè non appartenenti a $\gamma(I)$). È invece possibile ottenere una definizione sensata di $\frac{Ds}{Dt}$ definendola in coordinate locali tramite la (4), e dimostrando poi che questo definisce effettivamente una sezione di E lungo γ , cioè verificando che le componenti di $\frac{Ds}{Dt}$ si trasformano nella giusta maniera passando da una banalizzazione locale ad un'altra.

Procederemo tuttavia in una maniera differente, utilizzando la nozione di connessione indotta.

Sia $f : N \rightarrow M$ un'applicazione C^∞ e consideriamo il fibrato indotto $f^*E \rightarrow N$. Si è visto allora che, se $\{U_\alpha\}$ è un atlante banalizzante per E e $\{g_{\alpha\beta}\}$ sono le relative funzioni di transizione, si ottiene un atlante banalizzante per f^*E , con relative funzioni di transizione, considerando $\{f^{-1}(U_\alpha)\}$ e $\{g_{\alpha\beta} \circ f\}$. Se allora ∇^E è una connessione su E e $\{\omega_\alpha\}$ è la famiglia di matrici di 1-forme determinata da ∇^E su $\{U_\alpha\}$, consideriamo le matrici di 1-forme $\omega_\alpha^* := f^*\omega_\alpha := (f^*(\omega_\alpha)_i^j)_{j,i=1,\dots,k}$ e verifichiamo che definiscono una connessione su f^*E : si ha, su $f^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)$:

$$\begin{aligned}\omega_\beta^* &= f^* \left(g_{\alpha\beta}^{-1} dg_{\alpha\beta} + g_{\alpha\beta}^{-1} \omega_\alpha g_{\alpha\beta} \right) \\ &= f^*(g_{\alpha\beta}^{-1}) f^* dg_{\alpha\beta} + f^*(g_{\alpha\beta}^{-1}) f^* \omega_\alpha f^* g_{\alpha\beta} \\ &= (g_{\alpha\beta} \circ f)^{-1} d(g_{\alpha\beta} \circ f) + (g_{\alpha\beta} \circ f)^{-1} \omega_\alpha^* (g_{\alpha\beta} \circ f)\end{aligned}$$

avendo usato il fatto che il pull-back commuta con il differenziale, e che, essendo $g_{\alpha\beta}$ una funzione (a valori matrici), $f^*g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} \circ f$. Ha dunque senso la seguente

Definizione 7. *Siano E , f e ∇^E come sopra. Le matrici di 1-forme $\{\omega_\alpha^*\}$ considerate sopra definiscono una connessione ∇^{f^*E} su f^*E , detta connessione indotta da ∇^E tramite f .*

Tornando allora al problema di determinare una sezione parallela lungo una curva, consideriamo il fibrato γ^*E su I indotto dalla curva $\gamma : I \rightarrow M$; è evidente che le sezioni di quest'ultimo fibrato sono precisamente le sezioni di E lungo γ , poiché per definizione $(\gamma^*E)_t = E_{\gamma(t)}$. Se allora ∇^{γ^*E} è la connessione indotta su γ^*E , definiremo una derivazione delle sezioni lungo γ ponendo $\nabla_{\dot{\gamma}} := \nabla^{\gamma^*E}_{\frac{d}{dt}}$. Osserviamo anche che poiché ogni fibrato vettoriale su un intervallo di \mathbb{R} è banale, si avrà, globalmente, $\nabla^{\gamma^*E} = d + \varphi$, con $\varphi = (\varphi_i^j dt)_{j,i=1,\dots,k}$, rispetto ad una base globale di sezioni di γ^*E . Allora per ogni fissato $s_0 \in E_{\gamma(t_0)}$, $t_0 \in I$, esisterà un'unica sezione $s_{s_0} \in C^\infty(I, \gamma^*E)$ che sia soluzione (globale, perché l'equazione è lineare), del problema di Cauchy

$$(6) \quad \begin{aligned}(\nabla_{\dot{\gamma}} s)^j &= \frac{ds^j}{dt} + \varphi_i^j s^i = 0, \quad j = 1, \dots, k, \\ s(t_0) &= s_0.\end{aligned}$$

D'altra parte, poiché $\gamma^*(\Gamma_{il}^j dx^l) = (\Gamma_{il}^j \circ \gamma) \dot{\gamma}^l dt$, si ha che su $\gamma^{-1}(U)$ (U aperto banalizzante E considerato all'inizio) $\nabla_{\dot{\gamma}} s$ è dato dalla (4), e quindi il problema di Cauchy (6) coincide con quello associato a (5).

Rimane così definita, per ogni curva $\gamma : I \rightarrow M$, un'applicazione

$$\tau_{t_0, t}^\gamma : s_0 \in E_{\gamma(t_0)} \rightarrow s_{s_0}(t) \in E_{\gamma(t)},$$

evidentemente lineare ed iniettiva (e quindi un isomorfismo), detta *trasporto parallelo lungo γ* . Risulta inoltre che è possibile recuperare la connessione a partire dal trasporto parallelo: si può infatti dimostrare [5] che per ogni sezione s di E ed ogni campo tangente X ad M vale

$$(\nabla_X s)(m) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left[(\tau_{0, t}^\gamma)^{-1} s(\gamma(t)) - s(m) \right],$$

dove γ è una qualunque curva su M tale che $\gamma(0) = m$ e $\dot{\gamma}(0) = X_m$.

Diamo ora alcuni esempi di connessioni.

1. Sia M una sottovarietà differenziabile di \mathbb{R}^N . Sul fibrato banale $T\mathbb{R}^N|_M = M \times \mathbb{R}^N$ c'è la connessione banale d . Sia poi $p : T\mathbb{R}^N|_M \rightarrow TM$ la proiezione canonica sul primo addendo della decomposizione in somma diretta $T\mathbb{R}^N|_M = TM \oplus N$, dove N è il fibrato normale ad M , cioè il fibrato ortogonale a $TM \subseteq M \times \mathbb{R}^N$ rispetto alla metrica canonica. Allora la posizione

$$\nabla_X Y := p(dY(X)), \quad X, Y \in C^\infty(M, TM),$$

definisce una connessione su TM , come si verifica facilmente tenendo conto del fatto che sia p che dY sono $C^\infty(M)$ -lineari, e che $pY = Y$.

2. Sia $M = G_k(\mathbb{R}^{n+k})$ la grassmanniana dei k -sottospazi in \mathbb{R}^{n+k} , e sia

$$E_{k,n+k}(\mathbb{R}) = \left\{ (p, \underline{v}) \in G_k(\mathbb{R}^{n+k}) \times \mathbb{R}^{n+k} : \underline{v} \in p \right\}$$

il fibrato tautologico su M . Rispetto alla metrica canonica sul fibrato banale $M \times \mathbb{R}^{n+k}$ vale allora la decomposizione in somma diretta

$$M \times \mathbb{R}^{n+k} = E_{k,n+k}(\mathbb{R}) \oplus E_{k,n+k}(\mathbb{R})^\perp,$$

e sia p la proiezione sul primo addendo. Allora anche in questo caso si verifica facilmente che si ottiene una connessione su $E_{k,n+k}(\mathbb{R})$ ponendo

$$\nabla_X s := p(ds(X)), \quad s \in C^\infty(M, E_{k,n+k}(\mathbb{R})), X \in C^\infty(M, TM).$$

Siano E, F fibrati su M , con rispettive connessioni ∇^E, ∇^F . È facile verificare che

$$\nabla^{E \oplus F} := \begin{pmatrix} \nabla^E & 0 \\ 0 & \nabla^F \end{pmatrix}$$

definisce una connessione su $E \oplus F$, con matrice di 1-forme

$$\omega^{E \oplus F} = \begin{pmatrix} \omega^E & 0 \\ 0 & \omega^F \end{pmatrix},$$

e che

$$\nabla^{E \otimes F} := \nabla^E \otimes \mathbb{I}_{C^\infty(M, F)} + \mathbb{I}_{C^\infty(M, E)} \otimes \nabla^F$$

definisce una connessione su $E \otimes F$, con matrice di 1-forme $\omega^{E \otimes F} = \omega^E \otimes \mathbb{I} + \mathbb{I} \otimes \omega^F$, prodotti tensoriali di matrici. Inoltre si definisce una connessione ∇^{E^*} sul fibrato duale E^* di E , richiedendo che, se $\{e_i\}$ è una base locale di E ed $\{e^i\}$ è la relativa base duale, valga

$$0 = d\langle e^i, e_j \rangle = (\nabla^{E^*} e^i, e_j) + (e^i, \nabla^E e_j),$$

dove con $\langle \cdot, \cdot \rangle$ si è indicata la dualità naturale tra E ed E^* . Si trova allora che $\omega^{E^*} = -(\omega^E)^T$. Se il fibrato E ha una metrica $\langle \cdot, \cdot \rangle_E$, la connessione ∇^E si dirà *compatibile con la metrica* se

$$(7) \quad d\langle s, t \rangle_E = \langle \nabla^E s, t \rangle_E + \langle s, \nabla^E t \rangle_E, \quad s, t \in C^\infty(M, E),$$

dove naturalmente si intende $\langle \omega \otimes s, t \rangle_E = \omega \langle s, t \rangle_E = \langle s, \omega \otimes t \rangle_E$, per $\omega \in \Omega^1(M)$, o equivalentemente, per $X \in C^\infty(M, TM)$,

$$X \langle s, t \rangle_E = \langle \nabla_X^E s, t \rangle_E + \langle s, \nabla_X^E t \rangle_E;$$

se poi E è reale e $\langle \cdot, \cdot \rangle_E$ è simmetrica ed $\{e_i\}$ è una base locale ortonormale, dalla (7) si ha:

$$\begin{aligned} 0 &= d\langle e_i, e_j \rangle_E = \langle \omega_i^k \otimes e_k, e_j \rangle_E + \langle e_i, \omega_j^l \otimes e_l \rangle_E \\ &= \omega_i^j + \omega_j^i, \end{aligned}$$

e quindi la matrice di 1-forme di connessione è antisimmetrica. Analogamente si verifica che se E è complesso e la metrica è hermitiana, la matrice di connessione rispetto ad una base ortonormale è antihermitiana.

3.2. Curvatura.

Sia (E, π, M) un fibrato vettoriale di rango k . Una connessione ∇ su E è un'applicazione $\nabla : C^\infty(M, E) \rightarrow C^\infty(M, T^*M \otimes E)$ soddisfacente la regola di Leibniz. La si può poi estendere ad una applicazione \mathbb{R} -lineare (o meglio, ad una famiglia di applicazioni), $\tilde{\nabla} : C^\infty(M, \bigwedge^p T^*M \otimes E) \rightarrow C^\infty(M, \bigwedge^{p+1} T^*M \otimes E)$, richiedendo che valga

$$\tilde{\nabla}(\varphi \otimes s) = d\varphi \otimes s + (-1)^p \varphi \wedge \nabla s, \quad \varphi \in C^\infty(M, \bigwedge^p T^*M), s \in C^\infty(M, E),$$

dove naturalmente si intende $\varphi \wedge (\omega \otimes s) = (\varphi \wedge \omega) \otimes s$, $\omega \in \Omega^1(M)$. Poiché, se $f \in C^\infty(M)$, $(f\varphi) \otimes s = \varphi \otimes (fs)$, affinché la definizione di $\tilde{\nabla}$ sia sensata è necessario verificare che $\tilde{\nabla}((f\varphi) \otimes s) = \tilde{\nabla}(\varphi \otimes (fs))$. Si ha:

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}((f\varphi) \otimes s) &= d(f\varphi) \otimes s + (-1)^p (f\varphi) \wedge \nabla s \\ &= df \wedge \varphi \otimes s + f d\varphi \otimes s + (-1)^p f \varphi \wedge \nabla s = df \wedge \varphi \otimes s + f \tilde{\nabla}(\varphi \otimes s), \end{aligned}$$

e, d'altra parte,

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}(\varphi \otimes (fs)) &= d\varphi \otimes (fs) + (-1)^p \varphi \wedge \nabla(fs) \\ &= f(d\varphi \otimes s) + (-1)^p (\varphi \wedge df) \otimes s + (-1)^p f(\varphi \wedge \nabla s) \\ &= df \wedge \varphi \otimes s + f \tilde{\nabla}(\varphi \otimes s), \end{aligned}$$

avendo usato nell'ultimo passaggio $\varphi \wedge df = (-1)^p df \wedge \varphi$. La definizione è dunque ben posta. D'ora in poi, con un piccolo abuso di notazione, porremo $\tilde{\nabla} = \nabla$.

In particolare da quanto appena visto segue $\nabla(f\nabla s) = df \wedge \nabla s + f\nabla^2 s$, ed allora per $\nabla^2 : C^\infty(M, E) \rightarrow C^\infty(M, \bigwedge^2 T^*M \otimes E)$, si ha

$$\begin{aligned} \nabla^2(fs) &= \nabla(df \otimes s + f\nabla s) \\ &= d^2 f \otimes s - df \wedge \nabla s + df \wedge \nabla s + f\nabla^2 s = f\nabla^2 s, \end{aligned}$$

poiché $d^2 f = 0$. Dunque ∇^2 si identifica con una sezione del fibrato $\bigwedge^2 T^*M \otimes \text{End}(E)$, definisce cioè una 2-forma su M a valori endomorfismi di E .

Definizione 8. *Siano E, ∇ come sopra. La sezione $\nabla^2 \in C^\infty(M, \bigwedge^2 T^*M \otimes \text{End}(E))$ è detta la curvatura della connessione ∇ .*

Vediamo l'espressione della curvatura in coordinate locali. Sia $\{e_i\}$ una base locale di E , allora con le notazioni usuali:

$$\begin{aligned} \nabla^2(e_i) &= \nabla(\omega_i^j \otimes e_j) \\ &= d\omega_i^j \otimes e_j - \omega_i^j \wedge \omega_j^h \otimes e_h \\ &= (d\omega_i^h + \omega_j^h \wedge \omega_i^j) \otimes e_h = \Omega_i^h \otimes e_h. \end{aligned}$$

Dunque localmente la curvatura ∇^2 è determinata da una matrice di 2-forme, $\Omega = (\Omega_i^h)_{h,i=1,\dots,k}$, calcolabile a partire dalle 1-forme di connessione ω_i^j tramite le

$$(8) \quad \Omega_i^h = d\omega_i^h + \omega_j^h \wedge \omega_i^j, \quad h, i = 1, \dots, k,$$

che si riscrivono anche, in forma matriciale,

$$\Omega = d\omega + \omega \wedge \omega,$$

dove il prodotto esterno a secondo membro è un prodotto righe per colonne di matrici di 1-forme. Poiché inoltre, come osservato sopra, la curvatura definisce una sezione globale di $\bigwedge^2 T^*M \otimes \text{End}(E)$, si ha che se Ω_α (risp. Ω_β) è la matrice di curvatura in un aperto banalizzante U_α (risp. U_β), e se, come al solito, $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow GL(k, \mathbb{R})$ è la funzione di transizione relativa, su $U_\alpha \cap U_\beta$ vale $\Omega_\beta = g_{\alpha\beta}^{-1} \Omega_\alpha g_{\alpha\beta}$.

Alternativamente, se E è definito tramite un ricoprimento banalizzante $\{U_\alpha\}$ ed una famiglia di funzioni di transizione $\{g_{\alpha\beta}\}$, e se la collezione di matrici di 1-forme $\{\omega_\alpha \in M_k(\Omega^1(U_\alpha))\}$ definisce una connessione su E , si potrà definire la curvatura di tale connessione come la sezione globale di $\bigwedge^2 T^*M \otimes \text{End}(E)$ definita localmente da $\Omega_\alpha := d\omega_\alpha + \omega_\alpha \wedge \omega_\alpha$; se allora si pone, per semplificare le notazioni, $\Omega := \Omega_\alpha$, $\Omega' := \Omega_\beta$, $\omega := \omega_\alpha$, $\omega' := \omega_\beta$ e $G := g_{\alpha\beta}$, ne segue:

$$\begin{aligned} \Omega' &= d\omega' + \omega' \wedge \omega' \\ &= d(G^{-1}dG + G^{-1}\omega G) + (G^{-1}dG + G^{-1}\omega G) \wedge (G^{-1}dG + G^{-1}\omega G) \\ &= dG^{-1} \wedge dG + dG^{-1} \wedge \omega G + G^{-1}d\omega G - G^{-1}\omega \wedge dG + G^{-1}dG \wedge G^{-1}dG \\ &\quad + G^{-1}dG \wedge G^{-1}\omega G + G^{-1}\omega G \wedge G^{-1}dG + G^{-1}\omega G \wedge G^{-1}\omega G \\ &= dG^{-1} \wedge dG + dG^{-1} \wedge \omega G + G^{-1}d\omega G - G^{-1}\omega \wedge dG - dG^{-1}G \wedge G^{-1}dG \\ &\quad - dG^{-1}G \wedge G^{-1}\omega G + G^{-1}\omega \wedge dG + G^{-1}\omega \wedge \omega G \\ &= G^{-1}d\omega G + G^{-1}\omega \wedge \omega G = G^{-1}\Omega G, \end{aligned}$$

avendo usato $G^{-1}dG = -dG^{-1}G$, e pertanto la collezione di matrici di 2-forme $\{\Omega_\alpha\}$ definisce effettivamente una sezione globale di $\bigwedge^2 T^*M \otimes \text{End}(E)$.

Proposizione 2 (Identità di Bianchi). *Con le notazioni di sopra:*

$$(9) \quad d\Omega = [\Omega, \omega] = \Omega \wedge \omega - \omega \wedge \Omega.$$

Proof. È un semplice calcolo:

$$\begin{aligned} d\Omega &= d(d\omega + \omega \wedge \omega) \\ &= d\omega \wedge \omega - \omega \wedge d\omega \\ &= (d\omega + \omega \wedge \omega) \wedge \omega - \omega \wedge (d\omega + \omega \wedge \omega) = [\Omega, \omega]. \quad \square \end{aligned}$$

3.3. Connessione di Levi-Civita.

Specializziamoci ora al caso $E = TM$. Si verifica facilmente che, per ogni connessione ∇ su TM ,

$$T(X, Y) := \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y], \quad X, Y \in C^\infty(M, TM),$$

è un tensore, detto *torsione* di ∇ .

Definizione 9. *Una connessione ∇ su TM è detta simmetrica se ha torsione nulla:*

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y], \quad X, Y \in C^\infty(M, TM).$$

Il risultato seguente è giustamente noto come il *teorema fondamentale della geometria riemanniana*.

Teorema 1. *Sia (M, g) una varietà riemanniana. Esiste un'unica connessione ∇ su TM simmetrica e compatibile con la metrica.*

La connessione di cui il teorema afferma l'esistenza è detta *connessione di Levi-Civita*.

Proof. Siano $X, Y, Z \in C^\infty(M, TM)$. Se ∇ esiste, dalla compatibilità con g segue:

$$X(g(Y, Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z).$$

Permutando ciclicamente X, Y e Z nella relazione precedente si ottengono altre due relazioni; sommando allora le prime due e sottraendo la terza si trova, tenendo conto della simmetria della connessione:

$$(10) \quad X(g(Y, Z)) + Y(g(Z, X)) - Z(g(X, Y)) \\ + g([X, Y], Z) - g([X, Z], Y) - g([Y, Z], X) = 2g(\nabla_X Y, Z).$$

Da questa equazione e dalla non degeneratezza della metrica segue subito l'unicità di ∇ . Ma si ottiene subito anche l'esistenza: per X ed Y fissati il primo membro è un funzionale $C^\infty(M)$ -lineare di Z , e dunque, per l'isomorfismo naturale tra T^*M e TM indotto dalla metrica, definisce un campo vettoriale $W_{X,Y}$ su M , che dipende \mathbb{R} -bilinearmente da X ed Y , e si verifica poi facilmente che $X \rightarrow W_{X,Y}$ è $C^\infty(M)$ -lineare, e che $Y \rightarrow W_{X,Y}$ soddisfa la regola di Leibniz; pertanto $(X, Y) \rightarrow W_{X,Y}$ definisce una connessione su TM . \square

4. Lezione 4. NOTE A CURA DI EZIO VASSELLI

4.1. Descrizione locale della connessione di Levi-Civita.

La scorsa lezione abbiamo dimostrato un teorema fondamentale sull'esistenza di una connessione naturale su una varietà riemanniana, la *connessione di Levi-Civita*:

Teorema 2. *Sia (M, g) una varietà riemanniana. Allora esiste ed è unica la connessione ∇ sul fibrato tangente TM che è simmetrica e compatibile con la metrica g .*

Questa connessione è esplicitamente definita dalla formula seguente:

$$(11) \quad \begin{aligned} 2g(\nabla_X Y, Z) = & X(g(X, Z)) + Y(g(Z, X)) + \\ & -2(g(X, Y)) + g([X, Y], Z) + \\ & -g([X, Z], Y) - g([X, Z], Y) - g([Y, Z], X) \end{aligned}$$

Diamo ora una descrizione locale della connessione di Levi-Civita. Consideriamo una carta locale $(U, (x^1, \dots, x^n))$ e scegliamo X, Y, Z in una base locale per TM :

$$X := \frac{\partial}{\partial x^h}, \quad Y := \frac{\partial}{\partial x^l}, \quad Z := \frac{\partial}{\partial x^m}.$$

Ricordiamo allora che

$$\left[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right] = 0$$

e che

$$\nabla \frac{\partial}{\partial x^l} = \omega_l^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

dove $\omega_l^i \in \Omega^1(U)$. Esplicitando i coefficienti $\omega_l^i = \Gamma_{ml}^i dx^m$, $\Gamma_{ml}^i \in C^\infty(U)$ otteniamo la relazione

$$(12) \quad \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^l} = \Gamma_{jl}^i \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

I coefficienti Γ_{lm}^i si dicono *simboli di Cristoffel*. Per darne un'espressione esplicita introduciamo le seguenti notazioni per gli elementi di matrice del tensore metrico:

$$g_{ij} := g \left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right), \quad g^{ij} = (g_{ij})^{-1};$$

effettuando i prodotti scalari membro a membro nella (12) e sostituendo otteniamo

$$2\Gamma_{ij}^l = g^{lk} \left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right)$$

A partire dalla connessione di Levi-Civita possiamo considerare la curvatura $\Omega := \nabla^2$. Sappiamo che localmente Ω si presenta come una matrice di 2-forme

$$\Omega \left(\frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^l} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \Omega_j^i \left(\frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^l} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right) := \frac{1}{2} R_{jkl}^i \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

(Il coefficiente $\frac{1}{2}$ proviene dai termini di prodotto esterno del tipo $dx^l \wedge dx^k$). I termini R_{jkl}^i sono i coefficienti di un tensore R , detto *tensore di curvatura*, definito globalmente come

$$R(X, Y)(Z) = (\nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X, Y]}) (Z).$$

4.2. Geodetiche di una varietà.

Definizione 10. Sia M una varietà riemanniana, ∇ la connessione di Levi-Civita associata, $\gamma : I \rightarrow M$ una curva C^∞ . γ si dice geodetica se è autoparallela, ovvero se $\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = 0$.

Osserviamo che poiché la connessione di Levi-Civita è compatibile con la metrica, ne segue che la norma di $\dot{\gamma}$ è costante lungo γ . A livello locale la condizione di autoparallelismo si esprime nel seguente sistema di equazioni differenziali ordinarie:

$$(13) \quad \frac{d^2 \gamma}{dt^2} + \Gamma_{jk}^i(\gamma(t)) \dot{\gamma}^j \dot{\gamma}^k = 0 \quad ,$$

con $\gamma := (\gamma^1, \dots, \gamma^n)$. Enunciamo ora un risultato di esistenza locale delle geodetiche; a livello preliminare osserviamo che se γ è una geodetica allora l'applicazione $k \mapsto \gamma(kt)$, $k \in \mathbb{R}$ definisce anch'essa una geodetica.

Teorema 3. Sia m_0 appartenente ad una carta locale U in M . Allora esiste un intorno aperto U_{m_0} di m_0 ed un $\varepsilon > 0$ tali che per ogni $m \in U_{m_0}$, per ogni $v \in T_m M$ con $\|v\| < \varepsilon$ esiste ed è unica la geodetica $\gamma_v : (-2, 2) \rightarrow M$ tale che $\gamma_v(0) = m$, $\dot{\gamma}_v(0) = v$.

La dimostrazione del teorema precedente si basa sul seguente risultato generale di esistenza ed unicità della soluzione locale di sistemi di equazioni differenziali, applicato alle (13).

Teorema 4. Sia data $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un'applicazione C^∞ , ed il sistema

$$(14) \quad \frac{d^2 x}{dt^2} = F \left(x, \frac{dx}{dt} \right) \quad , \quad x : I \subset \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{R}^n .$$

Allora per ogni $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ esiste un intorno $U \times V$ di (x_0, y_0) ed un $\varepsilon > 0$ tali che per ogni $(x, y) \in U \times V$ il sistema (14) ammette un'unica soluzione $x : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^n$ con $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = y_0$.

Osserviamo che nel Teorema 3 ε è uniforme rispetto alla carta locale U . Abbiamo dunque un risultato di esistenza locale delle geodetiche; si può dimostrare che tali curve sono quelle che minimizzano localmente la distanza tra due punti in una varietà riemanniana:

$$d(p, q) = \inf_{\gamma} L(\gamma)$$

dove l'estremo inferiore è valutato sulla classe delle curve che hanno estremi p e q . È importante notare che questa proprietà è solo locale. Per più dettagli si consulti, ad esempio, [3].

4.3. Coordinate Normali.

Definizione 11. Con la notazione del teorema 3, sia $m \in M$, V un intorno di m nel piano tangente $T_m M$. L'applicazione $\exp_m(v) := \gamma_v(1) \in M$, con $v \in V$, si dice applicazione esponenziale.

Localmente \exp_m è un diffeomorfismo. Per dimostrarlo facciamo l'identificazione $T_0(T_m M) \simeq T_m M$ e consideriamo il differenziale $d\exp_m$ dell'applicazione esponenziale come un'applicazione da $T_m M$

in sé; calcoliamo quindi, presa la curva $\gamma_w(t) := tw$ (ovviamente passante per l'origine e con vettore tangente w in 0),

$$\left. \frac{d}{dt}(\exp_w(tw)) \right|_{t=0} = w.$$

L'identità precedente ci dice che $d\exp_m$, calcolata in 0, è l'identità. Dunque il teorema delle funzioni implicite implica che \exp_m è localmente un diffeomorfismo, come volevasi dimostrare.

Le coordinate definite dall'applicazione esponenziale \exp_m si dicono *coordinate normali centrate in m* . Fissiamo ora una base ortonormale in $T_{m_0}M$; per costruzione i vettori $\frac{\partial}{\partial x^i}|_{m_0}$ sono ortonormali, e quindi

$$g_{ij}(x) = \delta_{ij} + O(|x|)$$

in un intorno di 0. Mostriamo come è possibile migliorare questa stima utilizzando le coordinate normali.

Proposizione 3. *In coordinate normali $\Gamma_{ij}^k(0) = 0$.*

Dimostrazione Per avere l'asserto basta mostrare che nell'origine

$$(15) \quad \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = 0;$$

Consideriamo il campo vettoriale

$$X := \sum_i a_i \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad a_i \in \mathbb{R};$$

nell'ipotesi che $\nabla_X X = 0$ nell'origine e scegliendo opportunamente i coefficienti a_i otteniamo la (15) dal seguente calcolo

$$\begin{aligned} \nabla_{\left(\frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{\partial}{\partial x^j}\right)} \left(\frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{\partial}{\partial x^j}\right) &= \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \left(\frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{\partial}{\partial x^j}\right) + \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \left(\frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{\partial}{\partial x^j}\right) \\ &= \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^i} + \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^i} + \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} + \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^j} \\ &= 2\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j}. \end{aligned}$$

Dunque rimane da dimostrare che $\nabla_X X = 0$ nell'origine. Ciò è però chiaro una volta osservato che X è il campo tangente ai raggi uscenti dall'origine, cioè alle geodetiche di M per il punto fissato; ne segue, dalla definizione stessa di geodetica, che $\nabla_X X = 0$ lungo tale raggio e la proposizione è dimostrata.

Ricordiamo ora che la connessione di Levi-Civita è compatibile con la metrica, ovvero

$$X(g(Y, Z)) = g(\nabla_X Z, Y) + g(Y, \nabla_X Z);$$

scrivendo l'uguaglianza precedente in termini di elementi della base otteniamo

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^p} = \Gamma_{pi}^l g_{lj} + \Gamma_{pj}^l g_{li}$$

il che implica, scrivendo tali relazioni nell'origine e tenendo conto della proposizione precedente, che lo sviluppo di Taylor della metrica in un intorno di 0 non contiene termini lineari; in formule

$$g_{ij} = \delta_{ij} + O(|x|^2).$$

Più precisamente vale la seguente proposizione che non utilizzeremo e della quale omettiamo quindi la dimostrazione

Proposizione 4. *In un'intorno dell'origine si ha*

$$g_{ij}(x) = \delta_{ij} - \frac{1}{3}R_{ikjl}(0)x^k x^l + O(|x|^3).$$

Consideriamo ora un fibrato vettoriale $E \rightarrow M$ dotato di metrica, una connessione compatibile ∇ , un punto $m \in M$ e la fibra E_m . Fissata una base di E_m possiamo effettuare il trasporto parallelo lungo le geodetiche ed ottenere una base locale $\{s_i\}$. Poiché ∇ è compatibile ne segue che $\{s_i\}$ è ortonormale; l'espressione locale di ∇ è quindi del tipo $\nabla s_i = \omega_i^j s_j$ con ω una matrice di 1-forme. Scriviamo $\omega_i^j = \Delta_{ik}^j dx^k$, con Δ_{ik}^j funzioni C^∞ in un intorno opportuno di m . La seguente proposizione sarà utile nella dimostrazione del teorema dell'indice:

Proposizione 5. *Risulta*

$$\Delta_{jk}^l(x) = -\frac{1}{2}\Omega_{kij}^l(0)x^i + O(|x|^2).$$

Dimostrazione Innanzitutto osserviamo che deve essere, in modo del tutto analogo al caso in cui E è il fibrato tangente, $\Delta_{ki}^l(0) = 0$ (vedi Prop. 3). Calcoliamo ora (usando la notazione $\nabla_i := \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}}$)

$$\begin{aligned} \Omega_{kij}^l(0) &= \left(\Omega(0) \left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right) (s_k), s_l^* \right) \\ &= \left(\nabla^2(0) \left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right) (s_k), s_l^* \right) \\ &= \left(\nabla_i \nabla_j (s_k) - \nabla_j \nabla_i (s_k), s_l^* \right) \\ &= \left(\nabla_i \left(\Delta_{jk}^n s_n \right) - \nabla_j \left(\Delta_{ik}^m s_m \right), s_l^* \right) \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \Delta_{jk}^l - \frac{\partial}{\partial x_j} \Delta_{ik}^l \right) (0); \end{aligned}$$

per avere l'asserto rimane dunque da dimostrare che $\frac{\partial}{\partial x_i} \Delta_{jk}^l = -\frac{\partial}{\partial x_j} \Delta_{ik}^l$ in 0. A tale scopo consideriamo il seguente campo di vettori tangenti alle geodetiche uscenti da m

$$X := \sum_i a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad , \quad a_i \in \mathbb{R}.$$

Per costruzione deve essere $\nabla_X s_j = 0$ lungo X . In particolare $\nabla_X \nabla_Y s_j = 0$ nell'origine; scrivendo questa relazione in coordinate otteniamo

$$\begin{aligned} \nabla_X \nabla_Y (s_j) &= \nabla_X \left(\sum_i a_i \nabla_i (s_j) \right) \\ &= \sum_i a_i \nabla_X \nabla_i (s_j) \\ &= \sum_{il} a_i a_l \nabla_l \nabla_i (s_j) \\ &= \sum_{il} a_i a_l \nabla_l \left(\Delta_{ji}^m s_m \right) \\ &= \sum_{il} a_i a_l \left(\frac{\partial}{\partial x_l} \Delta_{ji}^m \right) (s_m) = 0 \end{aligned}$$

nell'origine, avendo usato il parallelismo e la regola di Leibniz. Dunque, in 0

$$\sum_{il} a_i a_l \left(\frac{\partial}{\partial x_l} \Delta_{ji}^m \right) (s_m) = 0;$$

a questo punto scegliamo $X = \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_l}$, ovvero $a_i = 1$, $a_l = -1$, e $a_k = 0$ per $k \neq i, l$, ottenendo nell'origine, $-\frac{\partial}{\partial x_l} \Delta_{ji}^m - \frac{\partial}{\partial x_i} \Delta_{jl}^m = 0$ da cui l'asserto.

5. Lezione 5. NOTE A CURA DEL DOCENTE.

5.1. Polinomi invarianti.

Denotiamo con $M_k(\mathbb{C})$ l'algebra delle matrici $k \times k$ a coefficienti complessi.

Definizione 12. Sia $P : M_k(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione polinomiale. Diremo che P è un polinomio invariante se

$$(16) \quad P(gAg^{-1}) = P(A), \quad \forall g \in GL(k, \mathbb{C}), \forall A \in M_k(\mathbb{C})$$

L'insieme dei polinomi invarianti ha una struttura naturale di algebra; la notazione standard per quest' algebra è $I(GL(k, \mathbb{C}))$.

Più in generale, se G è un gruppo di Lie allora ha senso considerare l'algebra $I(G)$ delle funzioni polinomiali $P : \text{Lie}(G) \rightarrow \mathbb{C}$ che sono invarianti rispetto alla rappresentazione aggiunta $\text{Ad} : G \rightarrow \text{End}(\text{Lie}(G))$:

$$P(\text{Ad}_g(A)) = P(A) \quad \forall g \in G, \forall A \in \text{Lie}(G).$$

Noi saremo principalmente interessati alle algebre

$$I(GL(k, \mathbb{C})), \quad I(U(k)), \quad I(O(k)), \quad I(SO(k)).$$

Vi ricordo che in questi quattro casi si ha:

$$\text{Lie}(GL(k, \mathbb{C})) = M_k(\mathbb{C}), \quad \text{Lie}(U(k)) = \{\text{matrici antihermitiane}\}$$

$$\text{Lie}(O(k)) = \text{Lie}(SO(k)) = \{\text{matrici antisimmetriche}\};$$

inoltre la rappresentazione aggiunta è proprio data $\text{Ad}_g(A) = gAg^{-1}$.

Esempio 1. La traccia e il determinante di una matrice sono due esempi di polinomi invarianti.

Esempio 2. Consideriamo i polinomi $P_\ell(A)$ definiti dall'identità

$$\det(I + tA) = \sum_{\ell=0}^k P_\ell(A) t^\ell.$$

I polinomi $P_\ell(A)$ sono invarianti; si noti che $P_1(A) = \text{Tr}(A)$, $P_k(A) = \det(A)$. Più in generale $P_\ell(A) = \text{Tr}(\Lambda^\ell A)$. Per dimostrare quest'ultima identità notiamo che essa è facilmente dimostrabile sulle matrici diagonali; ne segue, per invarianza, che essa è vera sulle matrici diagonalizzabili e quindi, per densità, su tutte le matrici.

5.2. L'omomorfismo di Chern-Weil.

Sia ora E un fibrato complesso di rango k su una varietà differenziabile M munito di una connessione ∇^E . Consideriamo la curvatura

$$(\nabla^E)^2 \in \mathcal{C}^\infty(M, \Lambda^2(T^*M) \otimes \text{End}(E)).$$

Localmente la curvatura di ∇^E è data da una matrice Ω di 2 forme; se U_α e U_β sono due aperti banalizzanti, allora per le relative matrici di curvatura $\Omega_\alpha, \Omega_\beta$ si ha (Lezione 3):

$$(17) \quad \Omega_\alpha = g \Omega_\beta g^{-1},$$

con $g \equiv g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow GL(k, \mathbb{C})$ le funzioni di transizione.

Sia ora $P \in I(GL(k, \mathbb{C}))$; dato che la curvatura è una matrice di due forme e dato che il prodotto wedge è commutativo sulle 2 forme, ha senso considerare $P(\Omega_\alpha) \in \mathcal{C}^\infty(U_\alpha, \Lambda^* T^* U_\alpha)$ e analogamente $P(\Omega_\beta)$. Per l'invarianza di P e per (17) abbiamo che

$$P(\Omega_\alpha) = P(\Omega_\beta), \quad \text{su } U_\alpha \cap U_\beta;$$

Otteniamo quindi una forma differenziale di grado pari *globalmente definita* che denotiamo con $P(E, \nabla^E)$. Si noti che se P è un polinomio omogeneo di gradi j allora $P(E, \nabla^E) \in C^\infty(M, \Lambda^{2j}(T^*M))$.

Teorema 5. *Sia $P \in I(GL(k, \mathbb{C}))$ e sia ∇^E una connessione su E . Si ha*

$$(18) \quad dP(E, \nabla^E) = 0.$$

Inoltre, se ∇_0^E e ∇_1^E sono due connessioni su E allora esiste una forma differenziale $TP(\nabla_1^E, \nabla_0^E) \in C^\infty(M, \Lambda^(T^*M))$ tale che*

$$(19) \quad P(E, \nabla_1^E) - P(E, \nabla_0^E) = d(TP(\nabla_1^E, \nabla_0^E))$$

Dimostrazione. Basta dimostrare il teorema per i polinomi omogenei. Sia P un polinomio omogeneo invariante di grado j . A partire da P possiamo definire un'applicazione multilineare $\tilde{P}(A_1, \dots, A_j)$ tale che

- (i) $\tilde{P}(A, \dots, A) = P(A)$
- (ii) $\tilde{P}(A_1, \dots, A_j) = \tilde{P}(A_{\sigma(1)}, \dots, A_{\sigma(j)}), \quad \forall \sigma \in S_j$
- (iii) $\tilde{P}(gA_1g^{-1}, \dots, gA_jg^{-1}) = \tilde{P}(A_1, \dots, A_j)$.

L'applicazione multilineare \tilde{P} è definita come segue

$$\tilde{P}(A_1, \dots, A_j) = \frac{1}{j!} (\text{coefficiente di } t_1 \cdots t_j \text{ in } P(t_1 A_1 + \cdots + t_j A_j))$$

Ad esempio, per il polinomio invariante $Q(A) = \text{Tr}(A^2)$ si ha:

$$Q(t_1 A_1 + t_2 A_2) = \text{Tr}(t_1^2 A_1^2 + t_1 t_2 (A_1 A_2 + A_2 A_1) + t_2^2 A_2^2);$$

ne segue che $\tilde{Q}(A_1, A_2) = \frac{1}{2} \text{Tr}(A_1 A_2 + A_2 A_1) = \text{Tr}(A_1 A_2)$.

Sia ora $X \in M_k(\mathbb{C}) \equiv \text{Lie}(GL(k, \mathbb{C}))$. Si ha

$$(20) \quad \sum_i \tilde{P}(A_1, \dots, [A_i, X], \dots, A_j) = 0$$

Per dimostrare questa identità consideriamo $\exp(tX) \equiv \sum_j (tX)^j / j!$. Poniamo $\exp(-tX) := g_t \in GL(k, \mathbb{C})$. È facile verificare che

$$(21) \quad \frac{d}{dt} (g_t A g_t^{-1})|_{t=0} = [A, X].$$

Per ipotesi

$$\tilde{P}(g_t A_1 g_t^{-1}, \dots, g_t A_j g_t^{-1}) = \tilde{P}(A_1, \dots, A_j) \quad \forall t \in \mathbb{R};$$

derivando rispetto a t questa uguaglianza, utilizzando la multilinearità di \tilde{P} e (21) otteniamo subito (20).

Supponiamo ora che \mathcal{A}_m sia una matrice di j_m forme e che \mathcal{X} sia una matrice di 1 forme. Sotto queste ipotesi:

$$(22) \quad \sum_i (-1)^{j_1 + \dots + j_i} \tilde{P}(\mathcal{A}_1, \dots, [\mathcal{A}_i, \mathcal{X}], \dots, \mathcal{A}_j) = 0$$

In questa formula il commutatore è, per definizione, il commutatore graduato:

$$[\mathcal{A}_i, \mathcal{X}] := \mathcal{A}_i \mathcal{X} - (-1)^{j_i \cdot 1} \mathcal{X} \mathcal{A}_i \equiv \mathcal{A}_i \mathcal{X} - (-1)^{j_i} \mathcal{X} \mathcal{A}_i.$$

Per dimostrare (22) possiamo assumere che $\mathcal{A}_m = A_m \omega_m$, con $A_m \in \text{Lie}(GL(k, \mathbb{C}))$ e $\omega_m \in \mathcal{C}^\infty(M, \Lambda^{j_m}(T^*M))$, e che $\mathcal{X}_i = X\alpha$, con $X \in GL(k, \mathbb{C})$ e α una 1-forma su M . Con calcoli elementari si dimostra allora che

$$\sum_i (-1)^{j_1 + \dots + j_i} \tilde{P}(\mathcal{A}_1, \dots, [\mathcal{A}_i, \mathcal{X}], \dots, \mathcal{A}_j)$$

è uguale a

$$\sum_i \tilde{P}(\mathcal{A}_1, \dots, [\mathcal{A}_i, X], \dots, \mathcal{A}_j)(\alpha \wedge \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_j)$$

che è zero per (20). Siamo ora nella posizione di dimostrare (18). Sia ω la matrice di 1-forme associata a ∇^E in un aperto banalizzante $U \subset M$; sia Ω la relativa matrice di curvatura; vi ricordo l'identità di Bianchi:

$$(23) \quad d\Omega = [\Omega, \omega].$$

Certamente $dP(\Omega) = d\tilde{P}(\Omega, \dots, \Omega)$; utilizzando la multilinearità di \tilde{P} ed il fatto che Ω è una matrice di 2-forme¹, possiamo eguagliare questa espressione a

$$\sum \tilde{P}(\Omega, \dots, d\Omega, \dots, \Omega)$$

e utilizzando Bianchi e (22) otteniamo

$$\sum \tilde{P}(\Omega, \dots, d\Omega, \dots, \Omega) = \sum \tilde{P}(\Omega, \dots, [\Omega, \omega], \dots, \Omega) = 0;$$

quindi $dP(\Omega) = 0$ che è quello che dovevamo dimostrare.

Passiamo alla seconda parte dell'enunciato. Siano ∇_0^E e ∇_1^E due connessioni. Abbiamo visto (lezione 2) che

$$\nabla_1^E - \nabla_0^E \in \mathcal{C}^\infty(M, T^*M \otimes \text{End}(E)).$$

Poniamo $\theta = \nabla_1^E - \nabla_0^E$ e consideriamo $\nabla_t^E = (1-t)\nabla_0^E + t\nabla_1^E = \nabla_0^E + t\theta$. Sia U un aperto banalizzante per E e denotiamo con ω_t e Ω_t le corrispondenti matrici di connessione e di curvatura. La formula precedente ci dà

$$\omega_t = \omega_0 + t\theta.$$

Da quest'equazione e dall'equazione di struttura ($\Omega_t = d\omega_t + \omega_t \wedge \omega_t$) otteniamo immediatamente

$$(24) \quad \frac{d\Omega_t}{dt} = d\theta + [\theta, \omega_t]$$

¹gli eventuali segni dovuti a commutazioni di prodotti esterni sono quindi tutti positivi

Facendo uso di (24), della multilinearità e simmetria di \tilde{P} e del fatto che Ω_t è una matrice di due forme otteniamo

$$\begin{aligned}
P(\Omega_1) - P(\Omega_0) &= \int_0^1 \frac{d}{dt} P(\Omega_t) dt \\
&= \int_0^1 \frac{d}{dt} \tilde{P}(\Omega_t, \dots, \Omega_t) dt \\
&= j \int_0^1 \tilde{P}\left(\frac{d\Omega_t}{dt}, \Omega_t, \dots, \Omega_t\right) dt \\
&= j \int_0^1 \tilde{P}(d\theta + [\theta, \omega], \Omega_t, \dots, \Omega_t) dt \\
&= j \int_0^1 \tilde{P}(d\theta, \Omega_t, \dots, \Omega_t) dt + j \int_0^1 \tilde{P}([\theta, \omega_t], \Omega_t, \dots, \Omega_t) dt
\end{aligned}$$

Per (22) sappiamo che:

$$-\tilde{P}([\theta, \omega_t], \Omega_t, \dots, \Omega_t) = \tilde{P}(\theta, [\Omega_t, \omega_t], \dots, \Omega_t) + \dots + \tilde{P}(\theta, \Omega_t, \dots, \Omega_t, [\Omega_t, \omega_t])$$

Sostituendo e utilizzando Bianchi ancora una volta otteniamo

$$\begin{aligned}
P(\Omega_1) - P(\Omega_0) &= j \int_0^1 \tilde{P}(d\theta, \Omega_t, \dots, \Omega_t) dt \\
&\quad - j \int_0^1 \sum_{j \geq 2} \tilde{P}(\theta, \Omega_t, \dots, d\Omega_t, \dots, \Omega_t) dt \\
&= d \left(j \int_0^1 \tilde{P}(\theta, \Omega_t, \dots, \Omega_t) dt \right)
\end{aligned}$$

Ponendo

$$TP(\nabla_1^E, \nabla_0^E) = j \int_0^1 \tilde{P}(\theta, \Omega_t, \dots, \Omega_t) dt$$

otteniamo la dimostrazione completa del teorema.

Corollario 1. *Per ogni fibrato complesso di rango k su M è definito un omomorfismo di algebre*

$$(25) \quad CW^E : \mathbf{I}(GL(k, \mathbb{C})) \rightarrow H_{\text{dR}}^{2*}(M, \mathbb{C})$$

$$CW^E(P) = [P(E, \nabla^E)]$$

che è detto omomorfismo di Chern-Weil. Scriveremo brevemente CW invece di CW^E .

L'omomorfismo di Chern-Weil dà una misura della non-banalità di un fibrato: se E è banale allora possiamo scegliere la connessione banale che ha curvatura nulla; in questo caso $CW(P) = 0 \forall P$.

5.3. Riduzione del gruppo di struttura.

Sia G un sottogruppo di Lie di $GL(k, \mathbb{C})$. Supponiamo che sia possibile scegliere le funzioni di transizione di E a valori in G (si dice in tal caso che il gruppo di struttura di E è riducibile a G). Fissiamo una volta per tutte un ricoprimento $\{U_\alpha\}$ che ammetta funzioni di transizione a valori in G . Possiamo allora introdurre una connessione ∇^E che abbia matrici di connessione ω_α

a valori in $\text{Lie}(G)$. Diremo che ∇^E è una G -connessione.² Si noti che in questo caso le matrici di curvatura sono anche a valori in $\text{Lie}(G)$ e sono invarianti per la rappresentazione aggiunta di G . Dato $P \in \text{I}(G)$ ha quindi senso considerare $P(E, \nabla^E) \in \mathcal{C}^\infty(M, \Lambda^{2*}T^*M)$. La dimostrazione del seguente teorema è del tutto analoga a quella del Teorema 5

Teorema 6. *Sia E un fibrato complesso di rango k con gruppo di struttura G , sottogruppo di Lie di $GL(k, \mathbb{C})$. Sia $P \in \text{I}(G)$ e sia ∇^E una G -connessione su E . Si ha*

$$(26) \quad dP(E, \nabla^E) = 0.$$

Se ∇_0^E e ∇_1^E sono due G -connessioni su E allora esiste una forma differenziale $TP(\nabla_1^E, \nabla_0^E) \in \mathcal{C}^\infty(M, \Lambda^*(T^*M))$ tale che

$$(27) \quad P(E, \nabla_1^E) - P(E, \nabla_0^E) = d(TP(\nabla_1^E, \nabla_0^E))$$

Rimane definito un omomorfismo di algebre

$$(28) \quad \begin{aligned} \text{CW}_G : \text{I}(G) &\rightarrow H_{\text{dR}}^{2*}(M, \mathbb{C}) \\ \text{CW}_G(P) &= [P(E, \nabla^E)] \end{aligned}$$

Osservazione. Abbiamo fino ad ora considerato fibrati *complessi* di rango k con gruppo di struttura G , sottogruppo di Lie di $GL(k, \mathbb{C})$. Possiamo analogamente considerare fibrati *reali* di rango k con gruppo di struttura G , sottogruppo di Lie di $GL(k, \mathbb{R})$. Saremo principalmente interessati ai seguenti 3 gruppi di Lie:

$$U(k) \leq GL(k, \mathbb{C}), \quad O(k) \leq GL(k, \mathbb{R}), \quad SO(k) \leq GL(k, \mathbb{R}).$$

5.4. Definizione di classi di Chern.

Torniamo al caso complesso. Tramite l'identità

$$\det(\text{Id} + tA) = \sum P_\ell(A)t^\ell$$

abbiamo definito i polinomi invarianti $P_\ell(\)$; questi polinomi sono detti *polinomi simmetrici elementari* (per matrici diagonali sono infatti uguali alle funzioni simmetriche elementari). Notare che $P_j(\)$ è un polinomio omogeneo di grado j . Definiamo

$$c_j(A) := P_j\left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}A\right)$$

Definizione 13. *Sia E un fibrato complesso su M . La j -ma classe di Chern di E è per definizione la classe*

$$c_j(E) := [c_j(E, \nabla^E)] \in H_{\text{dR}}^{2j}(M, \mathbb{C})$$

Esempi. Segue dalla definizione e dall'Esempio 2 che

$$(29) \quad c_1(E) = \left[\text{Tr}\left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\Omega\right)\right], \quad c_2(E) = \left[\frac{1}{8\pi^2}(\text{Tr}(\Omega \wedge \Omega) - \text{Tr}(\Omega) \wedge \text{Tr}(\Omega))\right].$$

dove abbiamo denotato con Ω la matrice di curvatura di una qualsiasi connessione su E .

²Quando abbiamo dimostrato l'esistenza di una connessione abbiamo utilizzato tre informazioni: (i) l'esistenza di connessioni locali ∇^α sugli intorni banalizzanti $\{U_\alpha\}$; (ii) il fatto che combinazioni convesse di connessioni siano ancora connessioni (iii) una partizione dell'unità. Le connessioni locali ∇^α sono definite dalla loro azione su una base locale tramite una matrice di 1-forme che è appunto la matrice di connessione. Possiamo scegliere queste matrici locali a valori in $\text{Lie}(G)$. La connessione risultante gode della proprietà enunciata.

La classe di Chern *totale* è la classe

$$c(E) = \left[\det \left(\text{Id} + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \Omega \right) \right] = 1 + c_1(E) + c_2(E) + \cdots + c_k(E)$$

6. **Lezione 6.** NOTE A CURA DI DOMENICO FIORENZA.

6.1. **Le classi di Chern di un fibrato hermitiano.**

Sia $E \rightarrow M$ un fibrato hermitiano di rango k . Il suo gruppo di struttura è il gruppo $U(k)$ delle matrici hermitiane $k \times k$. Siamo interessati ai polinomi su $Lie(U(k))$ invarianti per l'azione di $U(k)$ per coniugio, che al solito indicheremo con $I(U(k))$. Si ha:

Proposizione 6. $I(U(k)) \simeq \mathbb{C}[c_1, \dots, c_k]$

Dimostrazione. Sia $P \in I(U(k))$ allora

$$P : Lie(U(k)) \rightarrow \mathbb{C}$$

con

$$P(gAg^{-1}) = P(A), \quad \forall A \in Lie(U(k)), \quad g \in U(k)$$

Poiché $A \in Lie(U(k))$, A è anti-hermitiana. Ne segue che $\sqrt{-1}A$ è hermitiana e dunque esiste $g \in U(k)$ tale che

$$g \cdot \sqrt{-1} A \cdot g^{-1} = \text{diag}\{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_k\}$$

con gli η_i reali. Ma allora

$$gAg^{-1} = \sqrt{-1} \text{diag}\{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_k\} =: \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k\}$$

con i λ_i immaginari puri. Se poniamo

$$\check{P}(\lambda_1, \dots, \lambda_k) := P(\text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_k\})$$

abbiamo, per l'invarianza di P ,

$$P(A) = P(gAg^{-1}) = \check{P}(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$$

Sia adesso $h_{ij} \in U(k)$ l'applicazione che scambia i vettori e_i ed e_j della base canonica. Poiché

$$h_{ij} \cdot \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_i, \dots, \lambda_j, \dots, \lambda_k\} \cdot h_{ij}^{-1} = \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_j, \dots, \lambda_i, \dots, \lambda_k\}$$

la $U(k)$ invarianza di P implica

$$\check{P}(\lambda_1, \dots, \lambda_i, \dots, \lambda_j, \dots, \lambda_k) = \check{P}(\lambda_1, \dots, \lambda_j, \dots, \lambda_i, \dots, \lambda_k)$$

ovvero il polinomio \check{P} è S_k -invariante. A questo punto un ben noto teorema di algebra commutativa ci dice che \check{P} è un polinomio nelle funzioni simmetriche elementari. Più precisamente esiste ed è unico un polinomio F tale che

$$\check{P}(\lambda_1, \dots, \lambda_k) = F(\sigma_1(\lambda_1, \dots, \lambda_k), \sigma_2(\lambda_1, \dots, \lambda_k), \dots, \sigma_k(\lambda_1, \dots, \lambda_k))$$

dove i polinomi $\sigma_i(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ sono definiti dall'equazione

$$\prod_i (1 + \lambda_i t) = \sum_i \sigma_i(\lambda_1, \dots, \lambda_k) t^i$$

Osserviamo che si ha

$$\prod_i (1 + \lambda_i t) = \det \left(I + t \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_k \end{pmatrix} \right) = \det(I + tA)$$

da cui

$$\sigma_i(\lambda_1, \dots, \lambda_k) = P_i(A)$$

In conclusione, abbiamo dimostrato

$$P(A) = \tilde{F}(c_1(A), \dots, c_k(A))$$

dove, al solito,

$$c_i(A) := P_i\left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}A\right)$$

Per definizione, la i -esima classe di Chern del fibrato hermitiano $E \rightarrow M$ è

$$c_i(E) := [c_i(\Omega)] \in H_{dR}^{2i}(M, \mathbb{C})$$

6.2. Classe totale di Chern. Carattere di Chern. Classe di Todd. Vediamo ora alcuni esempi di classi caratteristiche ottenibili come polinomi nelle classi di Chern di un fibrato hermitiano $E \rightarrow M$. Notiamo innanzi tutto che, poiché le classi di coomologia di una varietà di dimensione finita sono nilpotenti, ha perfettamente senso valutare una serie di potenze su una classe di coomologia.

i) La classe di Chern totale. Si tratta, per definizione, della classe

$$c(E) := 1 + c_1(E) + \dots + c_k(E) = \left[\det \left(1 + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \Omega \right) \right]$$

Dalla definizione seguono immediatamente le proprietà seguenti:

$$c(E \oplus F) = c(E) \wedge c(F)$$

$$c(f^*E) = f^*c(E)$$

$$c(E^*) = 1 - c_1(E) + c_2(E) + \dots + (-1)^k c_k(E)$$

In particolare si ha

$$c(E \oplus 1) = c(E)$$

ovvero la classe di Chern totale è stabile. Notiamo che dalla formula $c(E \oplus F) = c(E) \wedge c(F)$, prendendo la componente in grado i in ambo i membri dell'uguaglianza, si ottiene

$$c_i(E \oplus F) = \sum_{l=0}^i c_l(E) \wedge c_{i-l}(F)$$

ii) Il carattere di Chern $Ch(E)$. Si tratta della classe definita dalla serie

$$Ch(E) := \left[\exp \operatorname{Tr} \left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \Omega \right) \right] = \left[\sum_j \frac{\operatorname{Tr} \left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \Omega \right)^j}{j!} \right]$$

Dalla definizione di $Ch(E)$ segue immediatamente che

$$Ch(E \oplus F) = Ch(E) + Ch(F)$$

$$Ch(E \otimes F) = Ch(E) \wedge Ch(F)$$

I primi termini della serie $Ch(E)$ sono

$$Ch(E) = k + c_1(E) + \frac{1}{2} (c_1(E)^2 - 2c_2(E)) + \dots$$

iii) *La classe di Todd.* Definiamo la serie di Todd come

$$Td(A) := \det \left(\frac{A}{1 - e^{-A}} \right)$$

dove A è una matrice (se non si conosce il calcolo funzionale analitico, si può definire $Td(A)$ sull'aperto denso delle matrici diagonalizzabili come

$$Td(\text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}) := \prod_i \frac{\lambda_i}{1 - e^{-\lambda_i}}$$

e poi estenderla per continuità). Con queste notazioni, la classe di Todd di E è, per definizione,

$$Td(E) := \left[Td \left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \Omega \right) \right]$$

I primi termini della serie $Td(E)$ sono

$$Td(E) = 1 + \frac{1}{2}c_1(E) + \frac{1}{12}(c_1(E)^2 + c_2(E)) + \dots$$

Vale inoltre

$$Td(E \oplus 1) = Td(E)$$

ovvero la classe di Todd è stabile. Per concludere, se M è una varietà complessa compatta e senza bordo, si pone

$$Td(M) := \int_M Td(T^{1,0}M)$$

dove $T^{1,0}M$ indica il fibrato tangente olomorfo di M . Il numero $Td(M)$ prende il nome di *genere di Todd* della varietà. Vedremo come conseguenza del teorema dell'indice che $Td(M)$ è un intero.

6.3. Classi di Pontryagin di un fibrato riemanniano.

Sia $E \rightarrow M$ un fibrato riemanniano di rango k . Il suo gruppo di struttura è il gruppo $O(k)$ delle matrici ortogonali $k \times k$. Siamo interessati ai polinomi su $Lie(O(k))$ invarianti per l'azione di $O(k)$ per coniugio, che al solito indicheremo con $I(O(k))$. Si ha:

Proposizione 7. $I(O(k)) \simeq \mathbb{C}[p_1, \dots, p_{[k/2]}]$, dove $[x]$ indica la parte intera di x .

Dimostrazione. Sia $P \in I(O(k))$ allora

$$P : Lie(O(k)) \rightarrow \mathbb{C}$$

con

$$P(gAg^{-1}) = P(A), \quad \forall A \in Lie(O(k)), \quad g \in O(k)$$

Poiché $A \in Lie(U(k))$, A è anti-simmetrica. Dunque A , vista come matrice complessa, è anti-hermitiana. Ne segue che $A_{\mathbb{C}}$ è diagonalizzabile sui complessi e che i suoi autovalori sono tutti immaginari puri. Poiché A è reale, il suo polinomio caratteristico lo è, e dunque i suoi autovalori sono a due a due coniugati. Sia $\sqrt{-1}\lambda$ uno di questi autovalori, e sia $e \in \mathbb{C}^k$ un autovettore. Il vettore \bar{e} è un autovettore di autovalore $-\sqrt{-1}\lambda$. Poniamo $e_1 = e, e_2 = \bar{e}$, e siano

$$\begin{cases} v_1 = \frac{(1-\sqrt{-1})}{2}(e_1 + \sqrt{-1}e_2) \\ v_2 = \frac{(1+\sqrt{-1})}{2}(e_2 + \sqrt{-1}e_1) \end{cases}$$

Si ha

$$\begin{aligned} Av_1 &= \lambda v_2 \\ Av_2 &= -\lambda v_1 \end{aligned}$$

Inoltre

$$\begin{aligned} \overline{v_1} &= \frac{(1+\sqrt{-1})}{2}(e_2 - \sqrt{-1}e_1) = \frac{(1-\sqrt{-1})}{2}(e_1 + \sqrt{-1}e_2) = v_1 \\ \overline{v_2} &= \frac{(1+\sqrt{-1})}{2}(e_1 - \sqrt{-1}e_2) = \frac{(1-\sqrt{-1})}{2}(e_2 + \sqrt{-1}e_1) = v_2 \end{aligned}$$

dunque i vettori $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^k$. Un rapido calcolo mostra che v_1 e v_2 sono ortonormali rispetto all'usuale prodotto scalare su \mathbb{R}^k . Effettuando questo procedimento per tutti gli autovalori di A_C troviamo una base ortonormale $\{v_i\}$ di \mathbb{R}^k nella quale A ha la forma

$$(30) \quad \begin{pmatrix} 0 & \lambda_1 & & & & \\ -\lambda_1 & 0 & & & & \\ & & 0 & \lambda_2 & & \\ & & -\lambda_2 & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & * \end{pmatrix}$$

dove il blocco $(*)$ è (0) se k è dispari ed è assente se k è pari. Indicheremo la matrice a blocchi (1) con il simbolo $Bl(\lambda_1, \dots, \lambda_{[k/2]})$. Tutto quanto abbiamo fin qui dimostrato si riassume dicendo che, se $A \in Lie(O(k))$, esiste $g \in O(k)$ tale che

$$gAg^{-1} = Bl(\lambda_1, \dots, \lambda_{[k/2]})$$

con i λ_i reali. Se poniamo

$$\check{P}(\lambda_1, \dots, \lambda_{[k/2]}) := P(Bl(\lambda_1, \dots, \lambda_{[k/2]}))$$

abbiamo, per l'invarianza di P ,

$$P(A) = P(gAg^{-1}) = \check{P}(\lambda_1, \dots, \lambda_{[k/2]})$$

Sia adesso $h_{12|34} \in O(k)$ l'applicazione definita da

$$\begin{aligned} v_1 &\leftrightarrow v_3 \\ v_2 &\leftrightarrow v_4 \end{aligned}$$

Il coniugio con $h_{12|34}$ permuta il primo e il secondo blocco della matrice $Bl(\lambda_1, \dots, \lambda_{[k/2]})$; ne segue la S_k -invarianza del polinomio \check{P} , ovvero \check{P} è un polinomio simmetrico nelle λ_i . Sia ora $h_{1|2} \in O(k)$ l'applicazione definita da

$$v_1 \leftrightarrow v_2$$

Si ha

$$h_{1|2} \cdot Bl(\lambda_1, \dots, \lambda_{[k/2]}) \cdot h_{1|2}^{-1} = Bl(-\lambda_1, \dots, \lambda_k)$$

dunque la $O(k)$ invarianza di P implica che il polinomio \check{P} è un polinomio pari nella variabile λ_1 . Ripetendo questo ragionamento per le altre variabili, troviamo che \check{P} è un polinomio simmetrico pari nelle variabili λ_i , ovvero che è un polinomio simmetrico nelle variabili λ_i^2 . Ne segue che esiste ed è unico un polinomio F tale che

$$\check{P}(\lambda_1, \dots, \lambda_{[k/2]}) = F(\gamma_1(\lambda_1, \dots, \lambda_{[k/2]}), \gamma_2(\lambda_1, \dots, \lambda_{[k/2]}), \dots, \gamma_{[k/2]}(\lambda_1, \dots, \lambda_{[k/2]}))$$

dove i polinomi $\gamma_i(\lambda_1, \dots, \lambda_{[k/2]})$ sono definiti dall'equazione

$$\prod_i (1 + \lambda_i^2 t^2) = \sum_i \gamma_i(\lambda_1, \dots, \lambda_{[k/2]}) t^{2i}$$

Osserviamo che si ha

$$\prod_i (1 + \lambda_i^2 t^2) = \det(I + t \cdot Bl(\lambda_1, \dots, \lambda_{[k/2]}))$$

da cui

$$\gamma_i(\lambda_1, \dots, \lambda_{[k/2]}) = P_{2i}(A)$$

Poniamo

$$p_i(A) := \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{2i} P_{2i}(A)$$

Il polinomio $p_i(A)$ prende il nome di i -esimo polinomio di Pontryagin di A . In conclusione, abbiamo dimostrato

$$P(A) = \tilde{F}(p_1(A), \dots, p_{[k/2]}(A))$$

il che conclude la dimostrazione.

Per definizione la i -esima classe di Pontryagin di un fibrato riemanniano $E \rightarrow M$ è

$$p_i(E) := [p_i(\Omega)] \in H_{dR}^{4i}(M, \mathbb{C})$$

Dalla definizione risulta immediatamente che, se indichiamo con $E_{\mathbb{C}} := E \otimes \mathbb{C}$ il complessificato di un fibrato reale E , si ha

$$p_i(E) = (-1)^i c_{2i}(E_{\mathbb{C}})$$

D'altro canto, se E è un fibrato complesso di rango k , possiamo vedere E come un fibrato reale $E_{\mathbb{R}}$ di rango $2k$. Il complessificato di $E_{\mathbb{R}}$ è un fibrato complesso di rango $2k$ e risulta

$$E_{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C} \simeq E \oplus \bar{E} \simeq E \oplus E^*$$

dove \bar{E} indica il fibrato coniugato di E , mentre E^* indica il fibrato duale. (Ricordiamo che per uno spazio vettoriale complesso V , lo spazio coniugato \bar{V} è definito come lo spazio vettoriale che ha per elementi gli stessi elementi di V , ma con l'azione di \mathbb{C} su \bar{V} definita da

$$\begin{aligned} \mathbb{C} \times \bar{V} &\rightarrow \bar{V} \\ (\lambda, v) &\mapsto \lambda \star v := \bar{\lambda}v \end{aligned}$$

Se V è un fibrato complesso di base $\{e_i\}$, $V_{\mathbb{R}}$ è il fibrato reale di base $Re(e_i)$, $Im(e_i)$, e dunque $V_{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C}$ può essere visto come il fibrato complesso di base $\{e_i, \bar{e}_i\}$. A questo punto i due isomorfismi scritti sopra sono immediati). Si ha pertanto

$$p_i(E_{\mathbb{R}}) = (-1)^i c_{2i}(E \oplus E^*) = \sum_{l=0}^{2i} (-1)^{l-i} c_l(E) c_{2i-l}(E)$$

6.4. Classe di Pontryagin totale. Classe L di Hirzebruch. Classe \hat{A} .

In analogia a quanto fatto per i fibrati hermitiani, vediamo ora alcuni esempi di classi caratteristiche ottenibili come polinomi nelle classi di Pontryagin di un fibrato riemanniano $E \rightarrow M$.

i) *La classe di Pontryagin totale.* Si tratta, per definizione, della classe

$$p(E) := 1 + p_1(E) + \cdots + p_{[k/2]}(E) = \left[\det \left(1 + \frac{1}{2\pi} \Omega \right) \right]$$

Dalla definizione seguono immediatamente le proprietà seguenti:

$$p(E \oplus F) = p(E) \wedge p(F)$$

$$p(f^*E) = f^*p(E)$$

In particolare si ha

$$p(E \oplus 1) = p(E)$$

ovvero la classe di Pontryagin totale è stabile.

ii) *La classe di Hirzebruch.* Definiamo la serie di Hirzebruch come

$$L(A) := \left(\det \left(\frac{A}{\tanh A} \right) \right)^{1/2}$$

dove A è una matrice. Con queste notazioni, la classe di Hirzebruch di E è, per definizione,

$$L(E) := \left[L \left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \Omega \right) \right]$$

I primi termini della serie $L(E)$ sono

$$L(E) = 1 + \frac{1}{3}p_1(E) + \frac{1}{45}(-p_1(E)^2 + 7c_2(E)) + \dots$$

Vale inoltre

$$L(E \oplus F) = L(E) \wedge L(F)$$

e dunque, in particolare, la classe di Hirzebruch è stabile. Infine, la classe $L(TM)$ prende il nome di classe di Hirzebruch della varietà M .

iii) *La classe \hat{A} .* Definiamo la serie \hat{A}

$$\hat{A}(B) := \left(\det \left(\frac{B}{\sinh B} \right) \right)^{1/2}$$

dove B è una matrice. Con queste notazioni, la classe \hat{A} di E è, per definizione,

$$\hat{A}(E) := \left[\hat{A} \left(\frac{\sqrt{-1}}{4\pi} \Omega \right) \right]$$

I primi termini della serie $\hat{A}(E)$ sono

$$\hat{A}(E) = 1 - \frac{1}{24}p_1(E) + \frac{1}{5760}(7p_1(E)^2 - 4c_2(E)) + \dots$$

Vale inoltre

$$\hat{A}(E \oplus F) = \hat{A}(E) \wedge \hat{A}(F)$$

e dunque, in particolare, la classe \hat{A} è stabile. Al solito, la classe $\hat{A}(TM)$ prende il nome di classe \hat{A} della varietà M . Il numero

$$\hat{A}(M) := \int_M \hat{A}(TM)$$

prende il nome di *genere* \hat{A} della varietà.

7. Lezione 7. NOTE A CURA DI FABIO CIOLLI.

7.1. Fibrati orientabili.

Un fibrato reale E di rango k sulla varietà M è detto **orientabile** se $\bigwedge^k E = \bigwedge^{max} E$ è banale. In questo caso il fibrato in rette $(\bigwedge^{max} E, \pi, M)$ possiede una sezione globale non nulla.

Se E è orientabile allora $\bigwedge^{max} E \setminus 0 = \cup_{m \in M} (\bigwedge^{max} E_m \setminus 0)$ ha due componenti connesse; la scelta di una di esse è detta scelta di una **orientazione** per E . Fissata un'orientazione per E , e quindi una sezione banalizzante per $\bigwedge^{max} E$, è chiaro come dati comunque due intorni trivializzanti U_α e U_β sia possibile scegliere due basi locali ortonormali $\{s_1^\alpha, \dots, s_k^\alpha\}$ e $\{s_1^\beta, \dots, s_k^\beta\}$ tali che

$$s_1^\alpha, \wedge \dots \wedge s_k^\alpha = c s_1^\beta, \wedge \dots \wedge s_k^\beta, \quad c > 0.$$

Quindi, se E è orientabile e dotato di metrica, le funzioni di transizione possono essere scelte a valore in $\mathbf{SO}(k)$ invece che in $\mathbf{O}(k)$, ossia

$$g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow \mathbf{SO}(k).$$

Viceversa, se il gruppo di struttura di E può essere ridotto da $\mathbf{O}(k)$ a $\mathbf{SO}(k)$, allora è chiaro che possiamo banalizzare $\bigwedge^{max} E$ e quindi E è orientabile.

7.2. Polinomi $\mathbf{SO}(k)$ -invarianti. Classe di Eulero.

Si indichi con $\mathbf{I}(\mathbf{SO}(k))$ l'algebra dei polinomi invarianti per $\mathbf{SO}(k)$. Lo studio di questi polinomi porta a due casi, a seconda della parità di k .

Primo caso, k dispari: $k = 2m + 1$. Analogamente al caso visto per $\mathbf{I}(\mathbf{O}(k))$, data una matrice antisimmetrica A , ossia $A \in \text{Lie}(\mathbf{SO}(2m + 1)) = \text{Lie}(\mathbf{O}(2m + 1))$, esiste sempre una matrice $g \in \mathbf{SO}(2m + 1)$ la cui azione aggiunta trasforma A in una matrice diagonale a blocchi, con $m + 1$ blocchi:

$$gAg^{-1} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \lambda_1 \\ -\lambda_1 & 0 \end{pmatrix} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \begin{pmatrix} 0 & \lambda_2 \\ -\lambda_2 & 0 \end{pmatrix} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \begin{pmatrix} 0 & \lambda_m \\ -\lambda_m & 0 \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & (0) \end{pmatrix}$$

Come per il caso di $\mathbf{I}(\mathbf{O}(k))$, si trovano polinomi \check{p} che dipendono solo dagli autovalori λ_i :

$$P(A) = P(gAg^{-1}) = \check{p}(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$$

L'azione della matrice $h \in \mathbf{SO}(2m + 1)$ definita sulla base canonica come

$$h : \begin{cases} e_1 \longrightarrow e_3 \\ e_2 \longrightarrow e_4 \\ e_3 \longrightarrow e_1 \\ e_4 \longrightarrow e_2 \end{cases}$$

scambia il primo con il secondo blocco della matrice, lasciando invariati i polinomi \check{p} . Analogamente tramite $h \in \mathbf{SO}(2m + 1)$ opportuna si possono scambiare due blocchi qualsiasi, ottenendo

$$\check{p}(\lambda_1, \dots, \lambda_m) = \check{p}(\lambda_{\sigma(1)}, \dots, \lambda_{\sigma(m)}), \quad \sigma \in \mathbf{S}_m.$$

Nel caso $\mathbf{I}(\mathbf{O}(2m+1))$, per verificare che $\check{p}(\lambda_1, \dots, \lambda_m) = \check{p}(-\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ si è utilizzata la trasformazione $h \in \mathbf{O}(k)$, $h : \begin{cases} e_1 & \rightarrow & e_2 \\ e_2 & \rightarrow & e_1 \end{cases}$. Ma h ha matrice

$$h = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \notin \mathbf{SO}(2m+1).$$

Si considera allora la trasformazione \tilde{h} con matrice

$$\tilde{h} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & (-1) \end{pmatrix} \in \mathbf{SO}(2m+1)$$

che scambia λ_1 con $-\lambda_1$, ottenendo $\check{p}(\lambda_1, \dots, \lambda_m) = \check{p}(-\lambda_1, \dots, \lambda_m)$. Quindi vale:

$$\check{p}(\lambda_1, \dots, \lambda_i, \dots, \lambda_m) = \check{p}(\lambda_1, \dots, -\lambda_i, \dots, \lambda_m),$$

ossia \check{p} è un polinomio simmetrico nelle λ_i^2 . Si ottiene quindi, come nel caso di $\mathbf{O}(2m+1)$, che esiste un unico polinomio simmetrico F , tale che

$$\check{p}(\lambda_1, \dots, \lambda_m) = F(\sigma_1(\lambda_1^2, \dots, \lambda_m^2), \dots, \sigma_m(\lambda_1^2, \dots, \lambda_m^2))$$

e $P(A) = F(p_1(A), \dots, p_m(A))$ dove p_i sono i polinomi di Pontryagin, ottenendo ancora

$$\mathbf{I}(\mathbf{SO}(2m+1)) = \mathbf{C}[p_1, \dots, p_m]$$

e non ci sono quindi nuove classi caratteristiche in questo primo caso.

Secondo caso, k pari: $k = 2m$. Non c'è più la possibilità di utilizzare (-1) nel blocco finale della matrice per definire \tilde{h} e quindi non è più possibile scambiare λ_i con $-\lambda_i$.

Si procede allora come segue: fissato $g_0 \in \mathbf{O}(k) \setminus \mathbf{SO}(k)$ si può scivere

$$P(A) = \frac{1}{2}(P(g_0 A g_0^{-1}) + P(A)) + \frac{1}{2}(P(A) - P(g_0 A g_0^{-1})) \stackrel{def}{=} P_0(A) + P_1(A)$$

dove:

$P_0(A)$ e $P_1(A)$ sono $\mathbf{SO}(k)$ -invarianti,

$P_0(A)$ è $\mathbf{O}(k)$ -invariante

e vale $P_1(h A h^{-1}) = -P_1(A)$, per $h \in \mathbf{O}(k) \setminus \mathbf{SO}(k)$.

Scelto h come sopra che realizza lo scambio $e_1 \leftrightarrow e_2, \dots, e_{2m-1} \leftrightarrow e_{2m}$, si ottiene analogamente ai casi visti:

$$P_1(A) = \check{p}_1(\lambda_1, \dots, \lambda_i, \dots, \lambda_m) = -\check{p}_1(\lambda_1, \dots, -\lambda_i, \dots, \lambda_m), \quad i = 1, \dots, m$$

ossia λ_i divide $\check{p}_1(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ per ogni $i = 1, \dots, m$, e allora vale

$$\check{p}_1(\lambda_1, \dots, \lambda_m) = \lambda_1 \cdots \lambda_m \cdot \check{p}_2(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$$

dove \check{p}_2 è una funzione simmetrica delle λ_i^2 . Quindi in questo caso $P(A)$ si scrive come

$$P(A) = \check{p}(\lambda_1, \dots, \lambda_m) = \check{p}_0(\lambda_1, \dots, \lambda_m) + H \check{p}_2(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$$

dove si è posto $H = \lambda_1 \cdots \lambda_m$, in modo che valga $\det A = H^2$, ovvero:

$$P(A) = F_0(\sigma_1(\lambda_1^2, \dots, \lambda_m^2), \dots, \sigma_m(\lambda_1^2, \dots, \lambda_m^2)) + H F_2(\sigma_1(\lambda_1^2, \dots, \lambda_m^2), \dots, \sigma_m(\lambda_1^2, \dots, \lambda_m^2))$$

dove F_0 e F_2 sono funzioni simmetriche degli argomenti.

Per trovare l'equivalente di H nel caso in cui A non è in forma diagonale, si procede nel modo seguente. Si definisce il **polinomio di Pfaff** come:

$$Pf(A) = \frac{1}{(2m)!} \sum_{\sigma \in \mathbf{S}_{2m}} (-1)^\sigma A_{\sigma(1)\sigma(2)} \cdots A_{\sigma(2m-1)\sigma(2m)}$$

ed il **polinomio di Eulero** come

$$e(A) = \frac{(-1)^m}{(2\pi)^m} Pf(A)$$

Per vedere che $e(A)$ è $\mathbf{SO}(k)$ invariante e che corrisponde ad H quando A è diagonale, introduciamo la seguente forma esterna:

$$\omega(A) = \frac{1}{2\pi} \sum_{i < j} A_{ij} v_i \wedge v_j$$

dove $\{v_i\}_{i=1, \dots, 2m}$ è una base ortonormale di \mathbf{R}^{2m} equiorientata alla base standard e si è scritto $Av_i = A_{ij}v_j$. In questo modo il polinomio di Eulero si riscrive come:

$$e(A) = \frac{1}{(2m)!} \langle \omega(A)^m, v_1 \wedge \cdots \wedge v_{2m} \rangle$$

e si vede chiaramente che $e(A)$ è $\mathbf{SO}(k)$ -invariante perchè basi equiorientate si trasformano una nell'altra tramite $\mathbf{SO}(k)$. Scelta allora una base diagonale per A , ossia tale che:

$$\begin{aligned} Av_1 &= \lambda_1 v_2 \\ Av_2 &= -\lambda_1 v_1 \\ Av_3 &= \lambda_2 v_4 \\ Av_4 &= -\lambda_2 v_3 \\ &\vdots \end{aligned}$$

si ottiene

$$\begin{aligned} \omega(A) &= -\frac{\lambda_1}{2\pi} v_1 \wedge v_2 - \frac{\lambda_2}{2\pi} v_3 \wedge v_4 - \dots \\ e(A) &= -\frac{\lambda_1}{2\pi} \cdots -\frac{\lambda_m}{2\pi} = \frac{1}{(2\pi)^m} (-1)^m \lambda_1 \cdots \lambda_m. \end{aligned}$$

Quindi vale

$$e(A)^2 = \frac{1}{(2\pi)^k} \lambda_1^2 \cdots \lambda_m^2 = \frac{1}{(2\pi)^k} \det(A) = p_m(A)$$

ossia il quadrato del polinomio di Eulero è uguale all'ultimo polinomio di Pontryagin $p_m(A)$. In questo secondo caso il risultato ottenuto è il seguente:

$$\mathbf{I}(\mathbf{SO}(2m)) = \mathbf{C}[p_1, \dots, p_{m-1}, e] \quad \text{con} \quad e^2 = p_m$$

Si può allora dare la seguente

Definizione 14. Dato un fibrato reale orientabile E di rango $m = 2k$ sulla varietà M si indica con $e(E, \nabla^E) \in \Omega^{2m}(M)$ la **forma di Eulero** e si definisce la **classe di Eulero di E** come $[e(E, \nabla^E)] = e(E) \in H^{2m}(M, \mathbf{C})$. La sua espressione in coordinate locali è data attraverso la matrice della curvatura Ω come $e(\Omega)$.

Osservazione 1. Sia E un fibrato complesso e $E_{\mathbf{R}}$ la sua realizzazione; se E ha $\text{rango}_{\mathbf{C}} = m$ allora $E_{\mathbf{R}}$ ha $\text{rango}_{\mathbf{R}} = 2m$. Si osservi che poichè E è complesso segue che $E_{\mathbf{R}}$ è orientabile: infatti se $g_{\alpha\beta} : U_{\alpha} \cap U_{\beta} \rightarrow \mathbf{U}(m)$ sono le funzioni di transizione di E , allora $(g_{\alpha\beta})_{\mathbf{R}} : U_{\alpha} \cap U_{\beta} \rightarrow \mathbf{SO}(2m)$ sono le funzioni di transizione di $E_{\mathbf{R}}$ e vale $\det(g_{\alpha\beta})_{\mathbf{R}} = |\det(g_{\alpha\beta})|^2$. Vale allora la seguente

Proposizione 8. Risultata

$$e(E_{\mathbf{R}}) = c_m(E) \quad \text{in} \quad H_{dR}^{2m}(M, \mathbf{C}).$$

Dimostrazione: Se $\langle \cdot, \cdot \rangle_E$ indica la metrica hermitiana su E , la sua parte reale $\langle \cdot, \cdot \rangle_{E_{\mathbf{R}}}$ è una metrica su $E_{\mathbf{R}}$; inoltre se v_1, \dots, v_m è una base ortonormale di E allora $w_1 = v_1, w_2 = iv_1, w_3 = v_2, \dots, w_{2m} = iv_m$ è una base ortonormale di $E_{\mathbf{R}}$.

Una matrice antihermitiana A su uno spazio lineare complesso induce una matrice antisimmetrica $A_{\mathbf{R}}$ sulla realizzazione di questo spazio.

Allora se v_1, \dots, v_m è una base che diagonalizza A , ossia

$$\begin{aligned} Av_1 &= i\lambda_1 v_1 \\ &\vdots \\ Av_m &= i\lambda_m v_m \end{aligned}, \quad \lambda_i \in \mathbf{R}$$

si ottiene per la m -esima classe di Chern:

$$c_m(A) = \left(\frac{i}{2\pi}\right)^m (i\lambda_1) \cdots (i\lambda_m) = \left(\frac{-1}{2\pi}\right)^m \lambda_1 \cdots \lambda_m.$$

D'altro canto

$$A_{\mathbf{R}}w_1 = Av_1 = i\lambda_1 v_1 = \lambda_1(iv_1) = \lambda_1 w_2, \quad A_{\mathbf{R}}w_2 = -\lambda_1 w_1$$

quindi in questa base $A_{\mathbf{R}}$ si scrive in maniera diagonale a blocchi, ottenendo come visto

$$e(A) = \left(\frac{-1}{2\pi}\right)^m \lambda_1 \cdots \lambda_m$$

e quindi il risultato.

Osservazione 2. Si verifica dalle definizioni che $e(A \oplus B) = e(A)e(B)$.

7.3. Tre best sellers della geometria moderna.

A questo punto si hanno tutti gli strumenti per poter enunciare tre importanti teoremi, veri e propri *best sellers* della geometria moderna; la dimostrazione di questi risultati sarà ottenuta come applicazione del teorema dell'indice di Atiyah - Singer.

Teorema 7. (Chern - Gauss - Bonnet) *Sia M una varietà compatta senza bordo e orientabile di dimensione $2m$. Indicata con*

$$\chi(M) = \sum_{i=0}^{2m} (-1)^i \dim H_{dR}^i(M, \mathbf{C})$$

la caratteristica di Eulero - Poincarè di M , si ha:

$$\int_M e(M, \nabla^{TM}) = \chi(M)$$

Osservazione. La caratteristica di Eulero - Poincarè si può definire anche a partire dalla coomologia singolare.

Teorema 8. (della segnatura di Hirzebruch) Sia M come nel teorema (7) di dimensione $4m$. Si consideri la forma bilineare simmetrica

$$H_{dR}^{2m}(M, \mathbf{R}) \times H_{dR}^{2m}(M, \mathbf{R}) \longrightarrow H_{dR}^{4m}(M, \mathbf{R}) = \mathbf{R}$$

che agisce sulle coppie di $2m$ -forme come:

$$([\alpha], [\beta]) \longmapsto \int_M [\alpha \wedge \beta]$$

e sia $\sigma(M)$ la sua segnatura. Si ha

$$\sigma(M) = \int_M L(M)$$

dove $L(M) = [L(TM, \nabla^{TM})]$ è la classe di Hirzebruch.

Teorema 9. (Riemann - Roch - Hirzebruch) Sia M una varietà complessa e E un fibrato olomorfo. Si possono definire

$$H^{0,i}(M, \mathcal{O}(E)),$$

gruppi di coomologia a valori nel fascio delle sezioni olomorfe di E . Indicando con

$$\chi(M, \mathcal{O}(E)) = \sum_i (-1)^i \dim H^{0,i}(M, \mathcal{O}(E))$$

la caratteristica di Eulero della coomologia a valori nel fascio $\mathcal{O}(E)$, risulta

$$\chi(M, \mathcal{O}(E)) = \int_M Td(M) \wedge Ch(E)$$

dove $Td(M) = [Td(T^{1,0}M, \nabla)]$ è la classe di Todd di M e $Ch(E)$ la classe di Chern di E . In particolare per il **genere aritmetico** della varietà, $\chi(M, \mathcal{O})$, risulta

$$\chi(M, \mathcal{O}) = \int_M Td(M)$$

7.4. Alcune informazioni su varietà complesse e fibrati olomorfi.

Sia $E \rightarrow M$ un fibrato complesso olomorfo con metrica hermitiana su una varietà complessa M . Si pensi in particolare a $M = \mathbf{C}^n$. Indicando le coordinate con $(z_1, \dots, z_n) = (x_1 + iy_1, \dots, x_n + iy_n)$, e introducendo i campi vettoriali

$$\frac{\partial}{\partial z_j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} - i \frac{\partial}{\partial y_j} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} + i \frac{\partial}{\partial y_j} \right),$$

si può scrivere

$$\begin{aligned} (T_p \mathbf{C}^n) \otimes \mathbf{C} &= \text{span}_{\mathbf{C}} \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}, \frac{\partial}{\partial y_n} \right) = \\ &= \text{span}_{\mathbf{C}} \left(\frac{\partial}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial z_n}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_n} \right) = (T_p^{1,0} \mathbf{C}^n) \oplus (T_p^{0,1} \mathbf{C}^n). \end{aligned}$$

Analogamente, se si indicano con

$$dz_j = dx_j + i dy_j, \quad d\bar{z}_j = dx_j - i dy_j$$

gli elementi di base delle 1-forme, si ha:

$$(T_p^* \mathbf{C}^n) \otimes \mathbf{C} = \text{span}_{\mathbf{C}} (dz_1, \dots, dz_n, d\bar{z}_1, \dots, d\bar{z}_n) = \bigwedge_p^{1,0}(\mathbf{C}^n) \oplus \bigwedge_p^{0,1}(\mathbf{C}^n).$$

Si può verificare che questi splitting sono globali poichè M è complessa; infatti se si indicano con z_j le coordinate in un intorno U e con w_j le coordinate in un intorno V , si ha con ovvi simboli $\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} = \frac{\partial \bar{w}_i}{\partial \bar{z}_j} \frac{\partial}{\partial \bar{w}_i}$ e analoga per $\frac{\partial}{\partial z_j}$, essendo tutti i cambiamenti di coordinate olomorfi.

In generale si indica con $\Lambda_{\mathbb{C}}^*(M) = \oplus \Lambda^{p,q}(M)$ il fibrato delle forme differenziali, dove $\Lambda^{p,q}(M)$ sono le forme di grado $p+q$ esprimibili come combinazioni lineari di $dz^{j_1} \wedge \cdots \wedge dz^{j_p} \wedge d\bar{z}^{i_1} \wedge \cdots \wedge d\bar{z}^{i_q}$. Si noti che si può scrivere l'operatore di derivazione d come:

$$d = \partial + \bar{\partial} \quad \text{tali che} \quad \partial^2 = \bar{\partial}^2 = \partial\bar{\partial} + \bar{\partial}\partial = 0$$

dove $\partial : \Lambda^{p,q}(M) \rightarrow \Lambda^{p+1,q}(M)$ e $\bar{\partial} : \Lambda^{p,q}(M) \rightarrow \Lambda^{p,q+1}(M)$.

Sia ora $E \rightarrow M$ un fibrato complesso olomorfo su M . Si osservi che risulta ben definito l'operatore

$$\bar{\partial} : C^\infty(M, \Lambda^{p,q}(M) \otimes E) \longrightarrow C^\infty(M, \Lambda^{p,q+1}(M) \otimes E).$$

Più precisamente, se $\{e_j\}$ è una base locale olomorfa di E , allora, per definizione:

$$\bar{\partial} : (\omega \otimes e_j) \longmapsto \bar{\partial}\omega \otimes e_j$$

dove $\omega \otimes e_j \in C^\infty(M, \Lambda^{p,q}(M) \otimes E)$, se $\omega \in \Lambda^{p,q}(M)$ (la definizione non dipende dalla base olomorfa scelta).

In particolare esiste l'operatore $\bar{\partial} : C^\infty(M, E) \rightarrow C^\infty(M, \Lambda^{0,1}(M) \otimes E)$. Si può dare allora la seguente

Definizione 15. *Sia ∇ una connessione su E . Si dirà che ∇ è una **connessione complessa** se risulta:*

$$\prod^{0,1} \nabla_s = \bar{\partial}s, \quad s \in C^\infty(M, E)$$

dove $\prod^{0,1} \nabla : C^\infty(M, \Lambda^*(M) \otimes E) \rightarrow C^\infty(M, \Lambda^{0,1}(M) \otimes E)$ è la proiezione della connessione ∇ sulla parte antiolomorfa di grado 1 delle sezioni a valori nel fibrato $\Lambda^*(M) \otimes E$.

Osservazione. Rispetto ad una base olomorfa una connessione complessa ha forma di connessione di tipo $(1, 0)$.

Vale il seguente risultato, analogo al teorema di Levi - Civita:

Proposizione 9. *Sia E un fibrato olomorfo. Data una metrica hermitiana su E esiste ed è unica la connessione complessa con essa compatibile.*

Dimostrazione Mostriamo inizialmente l'unicità.

Sia $\{e_i\}$ è una base locale di E per l'aperto U ed $h = h_{ij} = h(e_i, e_j)$ una metrica su E . Allora vale per compatibilità:

$$(31) \quad dh_{ij} = (\omega_i^l e_l, e_j) + (e_i, \omega_j^k e_k) = \omega_i^l h_{lj} + \bar{\omega}_j^k h_{ik}.$$

Poichè si ha $\omega_i^l \in \Lambda^{1,0}(U)$ dalla (31) segue:

$$(32) \quad dh_{ij} = \partial h_{ij} + \bar{\partial} h_{ij} = \omega_i^l h_{lj} + \bar{\omega}_j^k h_{ik}$$

dove il primo addendo nel termine a destra è una forma di tipo $(1, 0)$ e il secondo di tipo $(0, 1)$. Quindi dalla (32) si ottiene $\partial h_{ij} = \omega_i^l h_{lj}$, e la sua complessa coniugata, che si che si può riscrivere come:

$$(33) \quad \omega = \partial h h^{-1}.$$

Infine, per ottenere l'esistenza, si verifica che la (33) definisce effettivamente una connessione come nell'enunciato.

Corollario 2. *Risulta in questo caso:*

$$\Omega = \bar{\partial}\omega$$

Dimostrazione Per quanto visto vale:

$$\partial\omega = \partial(\partial h h^{-1}) = \partial h \partial(h^{-1}) = -\partial h h^{-1} \wedge \partial h h^{-1} = -\omega \wedge \omega.$$

D'altro canto $\Omega = d\omega + \omega \wedge \omega = \partial\omega + \bar{\partial}\omega + \omega \wedge \omega$ quindi il risultato.

Osservazione. Ω è una forma di tipo $(1, 1)$.

Esempi. Si consideri in generale $L \rightarrow M$ un fibrato complesso olomorfo di rango 1. Su ogni aperto U_α la metrica è definita attraverso una singola funzione $h_\alpha > 0$, con $h_\alpha \in C^\infty(U_\alpha)$. Indicando con $g_{\alpha\beta}$ le funzioni di transizione su $U_\alpha \cap U_\beta$, vale $h_\alpha = |g_{\alpha\beta}| h_\beta$. Per quanto visto, si ha allora $\omega_\alpha = \partial h_\alpha h_\alpha^{-1} = \partial \log h_\alpha$ da cui:

$$\Omega_\alpha = \bar{\partial} \partial \log h_\alpha = -\partial \bar{\partial} \log h_\alpha.$$

Sia ora M una superficie di Riemann (ossia una varietà complessa di dimensione 1), allora $T^{1,0}M$ è un fibrato complesso di rango 1, isomorfo sui reali a TM . Sia h una metrica su $T^{1,0}M$. Per quanto visto, si ha per la prima classe di Chern:

$$\begin{aligned} c_1(T^{1,0}M) &= \left[\frac{1}{2\pi i} \partial \bar{\partial} \log h \right] = \left[\frac{1}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \log h dz \wedge d\bar{z} \right] = \\ &= \left[\frac{1}{2\pi i} \frac{1}{4} \Delta \log h dz \wedge d\bar{z} \right] = \left[\frac{1}{2\pi} \left(-\frac{1}{2h} \Delta \log h \right) \frac{ih}{2} dz \wedge d\bar{z} \right] = \\ &= \left[\frac{1}{2\pi} K d vol_M \right] \end{aligned}$$

dove K è la curvatura gaussiana di M . Quindi vale:

$$\int_M c_1(T_{1,0}M) = \frac{1}{2\pi} \int_M K d vol_M = \chi(M) = 2 - 2g$$

dove g è il genere di M . Otteniamo anche il teorema di Chern - Gauss - Bonnet in dimensione 2 dato che, in questo caso $(T^{1,0}M)_{\mathbf{R}} = TM$ e vale quindi:

$$\int_M e(TM) = \int_M c_1(T_{1,0}M)$$

Esempio. Se $L \rightarrow \mathbf{C}P^1$ è il fibrato tautologico dello spazio proiettivo unidimensionale, vale:

$$\int_{\mathbf{C}P^1} c_1(L) = -1.$$

Per la verifica del risultato, si scriva $\mathbf{C}P^1 = \{[z_0, z_1] \in \mathbf{C}^2 \setminus \{0\}\}$ e $U \cup V = \mathbf{C}P^1$ un suo ricoprimento tramite i due aperti $U = \{z_0 \neq 0\}$ e $V = \{z_1 \neq 0\}$. Su U e V si individuano due carte locali:

$$\begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ [z_0, z_1] & \longmapsto & z = \frac{z_1}{z_0} \end{array}, \quad \begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ [z_0, z_1] & \longmapsto & v = \frac{z_0}{z_1} \end{array}.$$

Si ricordi che il fibrato $L \rightarrow \mathbf{C}P^1$ è definito come $L = \{([x], v) \in \mathbf{C}P^1 \times \mathbf{C}^2 : v = \lambda[x]\}$, ed il *local frame* è dato per le due carte da:

$$\begin{array}{ccc} s_U : & U & \longrightarrow L|_U \\ & [z_0, z_1] & \longmapsto ([z_0, z_1], (1, z)) \end{array}, \quad \begin{array}{ccc} s_V : & V & \longrightarrow L|_V \\ & [v_0, v_1] & \longmapsto ([v_0, v_1], (v, 1)) \end{array}$$

ossia in breve, $s_U : z \mapsto (z, (1, z))$ e $s_V : v \mapsto (v, (v, 1))$ rispettivamente. Si noti che sull'intersezione $U \cap V$ vale $s_V(v) = (v, 1) = (\frac{1}{z}, 1) = \frac{1}{z}(1, z) = \frac{1}{z}s_U(z)$, ossia $z s_V = s_U$ come deve essere. Quindi s_U e s_V costituiscono due basi locali olomorfe. La metrica indotta su L da $\mathbf{C}P^1 \times \mathbf{C}^2$ è nei due casi:

$$\|s_U(z)\| = 1 + z^2 = h(z), \quad \|s_V(v)\| = 1 + v^2 = h(v).$$

Sia ora ∇ l'unica connessione complessa compatibile con la metrica; allora

$$\omega_U = \partial h \cdot h^{-1} = \frac{\bar{z}}{(1 + |z|^2)} dz,$$

da cui

$$\Omega_U = \bar{\partial} \omega = \frac{d\bar{z} \wedge dz}{(1 + |z|^2)^2} = \frac{2i dx \wedge dy}{(1 + |x|^2 + |y|^2)^2}.$$

Analogamente $\Omega_V = \frac{d\bar{v} \wedge dv}{(1 + |v|^2)^2}$. Da queste si ha:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{C}P^1} c_1(L) &= \int_{\mathbf{C}P^1} \left[\frac{i}{2\pi} \Omega \right] = \int_{\mathbf{C}P^1} \left[\frac{-1}{\pi} \frac{dx \wedge dy}{(1 + |x|^2 + |y|^2)^2} \right] = \\ &= \frac{-1}{\pi} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{\rho d\rho d\theta}{(1 + \rho^2)^2} = \frac{-1}{\pi} \cdot \pi = -1 \end{aligned}$$

quindi il risultato, che indica come $c_1(L)$ è chiusa ma non esatta, ossia come il fibrato L sia non banale.

L'esempio si può considerare in generale per il fibrato $L \rightarrow \mathbf{C}P^n$. Si rimanda al compito per casa del 5/12.

8. Lezione 8. NOTE A CURA DI GUIDO PEZZINI.

8.1. Algebre di Clifford.

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita dotato di una forma bilineare simmetrica q ; si pensi in primo luogo a $V = T_x M$, dove (M, g) è una varietà riemanniana, con forma bilineare $q = g_x(\cdot, \cdot)$.

Definizione 16. L'algebra di Clifford $Cl(V, q)$ associata a V e q si definisce come l'algebra con unità generata dai vettori di V , da $1 \in \mathbb{R}$ con le relazioni:

$$v \cdot w + w \cdot v = -2q(v, w) \cdot 1$$

È possibile realizzare $Cl(V, q)$ come quoziente dell'algebra tensoriale $T(V) = \sum_r V^{\otimes r}$; se $I(V) \subset T(V)$ è l'ideale generato dagli elementi del tipo $v \otimes w + w \otimes v + 2q(v, w)$ con $v, w \in V$ si ha:

$$Cl(V, q) = T(V)/I(V)$$

La proiezione naturale $T(V) \rightarrow Cl(V, q)$ fornisce un'applicazione $V \rightarrow Cl(V, q)$. Non è difficile dimostrare che $V \cap I(V) = 0$, per cui $V \rightarrow Cl(V, q)$ è iniettiva.

Per $Cl(V, q)$ vale la proprietà universale enunciata nella seguente:

Proposizione 10. Sia A un'algebra con unità e $f : V \rightarrow A$ un'applicazione lineare tale che

$$f(v) \cdot f(w) + f(w) \cdot f(v) = -2q(v, w) \cdot 1_A, \quad \text{per ogni } v, w \in V;$$

allora esiste un unico omomorfismo di algebre $\tilde{f} : Cl(V, q) \rightarrow A$ che estende f . A meno di isomorfismi, $Cl(V, q)$ è caratterizzata da questa proprietà.

Dimostrazione. Per la proprietà universale di $T(V)$ esiste $f^\otimes : T(V) \rightarrow A$ che estende f . Per l'ipotesi su f , f^\otimes passa al quoziente e fornisce la \tilde{f} voluta. Inoltre, sia C un'altra algebra (contenente V) che soddisfi la medesima proprietà; entrambe le inclusioni $V \rightarrow C$, $V \rightarrow Cl(V, q)$ si estendono rispettivamente a $\phi : Cl(V, q) \rightarrow C$, $\psi : C \rightarrow Cl(V, q)$. Componendo, otteniamo $\psi \circ \phi : Cl(V, q) \rightarrow Cl(V, q)$ che estende l'inclusione $V \rightarrow Cl(V, q)$; dato che l'estensione è unica, $\psi \circ \phi$ è l'identità e ϕ e ψ sono una l'inversa dell'altra.

□

È molto importante per la teoria delle algebre di Clifford la graduazione \mathbb{Z}_2 di cui gode $Cl(V, q)$:

$$Cl(V, q) = Cl(V, q)^0 \oplus Cl(V, q)^1$$

dove $Cl(V, q)^0$ è il sottospazio generato da prodotti di un numero pari di elementi di V mentre $Cl(V, q)^1$ è quello generato da prodotti di un numero dispari di elementi di V . Alternativamente, si può considerare l'automorfismo $\alpha : Cl(V, q) \rightarrow Cl(V, q)$ che estende $v \mapsto -v$ definita su V ; $Cl(V, q)^0$ e $Cl(V, q)^1$ sono gli autospazi di α relativi agli autovalori -1 e 1 . Osserviamo anche che il prodotto rispetta la regola dei segni.

La filtrazione di $T(V)$:

$$T(V) = \sum_k \left(\sum_{r=0}^k V^{\otimes r} \right)$$

viene ereditata da $Cl(V, q)$ tramite la proiezione naturale, ovvero:

$$Cl(V, q) = \sum_k Cl^k(V, q)$$

dove

$$Cl^k(V, q) = \left\{ v \in Cl(V, q) \mid \exists u \in \sum_{r=0}^k V^{\otimes r} \text{ tale che } [u] = v \right\}$$

Possiamo altresì definire:

$$V^{\otimes k} \rightarrow Cl^k(V, q) / Cl^{k-1}(V, q)$$

usando le proiezioni naturali: quest'applicazione è suriettiva ed il nucleo è chiaramente lo stesso ideale che definisce $\Lambda^k V$.

Quindi:

$$Cl^k(V, q) / Cl^{k-1}(V, q) \cong \Lambda^k V$$

perciò l'algebra graduata associata alla filtrazione di $Cl(V, q)$, e cioè $\bigoplus_k Cl^k(V, q) / Cl^{k-1}(V, q)$, è canonicamente isomorfa all'algebra esterna ΛV .

Come corollario otteniamo l'importante

Proposizione 11. *Esiste un isomorfismo di spazi vettoriali*

$$Cl(V, q) \cong \Lambda^* V$$

In particolare $\dim Cl(V, q) = 2^{\dim V}$

Noi considereremo esclusivamente il caso in cui $q(\cdot, \cdot)$ sia un prodotto scalare; si noti che se $\{v_j\}$ è una base ortonormale di V allora

$$v_{i_1} \cdots v_{i_k} \quad i_1 < \cdots < i_k, \quad j = 0, \dots, \dim V$$

è una base dell'algebra di Clifford.

8.2. Moduli di Clifford.

Definizione 17. *Un modulo di Clifford è uno spazio vettoriale E dotato di un'azione dell'algebra $Cl(V, q)$, cioè un omomorfismo di algebre con unità $c : Cl(V, q) \rightarrow \text{End}(E)$. Se E è dotato di metrica $(\cdot, \cdot)_E$ l'azione può essere unitaria il che avviene qualora $c(v) \in O(E, (\cdot, \cdot)_E)$ per ogni $v \in V$ di norma unitaria.*

Osserviamo che se E è un modulo unitario e se v ha norma unitaria allora si ha:

$$(c(v)e_1, c(v)e_2)_E = (e_1, e_2)_E$$

e dato che $(c(v))^2 = -1_E$ si ha:

$$(c(v)e_1, e_2)_E + (e_1, c(v)e_2)_E = 0$$

vale a dire: $c(v)$ è anti-autoaggiunto per ogni $v \in V$.

Proposizione 12. $\Lambda(V)$ è un modulo di Clifford (unitario) su $Cl(V, q)$.

Dimostrazione. In primo luogo si estenda nel modo usuale a $\Lambda(V)$ il prodotto scalare q di V . Ricordiamo che per far ciò si impone $\Lambda^k(V) \perp \Lambda^h(V)$ se $k \neq h$, e poi si dichiara ortonormale la base $(v_{i_1} \wedge \dots \wedge v_{i_k})_{i_1 < \dots < i_k}$ di $\Lambda^k(V)$ se (v_1, \dots, v_n) è una base ortonormale di V . A questo punto definiamo $\epsilon(v)(\alpha) := v \wedge \alpha$ ($v \in V, \alpha \in \Lambda(V)$) e la sua aggiunta tramite q : $i(v) := \epsilon^*(v)$. Si ha:

$$i(v)(w_1 \wedge \dots \wedge w_l) = \sum_{i=1}^l (-1)^{i+1} w_1 \wedge \dots \wedge (v, w_i) \wedge \dots \wedge w_l$$

e ponendo:

$$c(v) := \epsilon(v) - i(v)$$

si ha:

$$c(v)^2 = -q(v, v) \cdot 1$$

in quanto si verifica che:

$$\epsilon(v)i(v) + i(v)\epsilon(v) = q(v, v) \cdot 1$$

Dunque $v \mapsto c(v)$ si estende ad un omomorfismo di algebre $Cl(V, q) \rightarrow End(\Lambda(V))$. L'azione è unitaria grazie al fatto che $c(v)^* = -c(v)$. La dimostrazione è completa.

8.3. Operatori di Dirac.

Sia M varietà riemanniana con metrica g . g induce una metrica, che denotiamo ancora g , su T^*M . Consideriamo:

$$\bigcup_{m \in M} Cl(T_m^*M, g_m) =: Cl(T^*M, g)$$

che può essere dotato in modo ovvio di struttura di fibrato vettoriale: il *fibrato di Clifford* associato al fibrato cotangente di (M, g) .

Supponiamo che esista un secondo fibrato E su M , con ciascuna fibra E_m modulo di Clifford su $Cl(T_m^*M, g_m)$ e supponiamo che l'azione dipenda in modo C^∞ da m (la definizione precisa si dà facilmente sulle carte locali). Il fibrato E sarà sempre dotato di una metrica hermitiana. Infine sia data su E una connessione compatibile ∇^E . Allora rimane definita l'applicazione:

$$\begin{aligned} C^\infty(M, T^*M \otimes E) &\xrightarrow{c} C^\infty(M, E) \\ c(\phi \otimes s)(m) &:= c_m(\phi_m)(s_m) \in E_m \end{aligned}$$

Definizione 18. Ai dati M, g, E, c, ∇^E rimane associato un operatore di Dirac \mathcal{D} , definito come la composizione delle mappe:

$$C^\infty(M, E) \xrightarrow{\nabla^E} C^\infty(M, T^*M \otimes E) \xrightarrow{c} C^\infty(M, E)$$

Vediamo l'espressione locale di \mathcal{D} in funzione di una base locale ortonormale $(e_i)_i$ di TM e della sua base duale $(e^i)_i$. C'è da osservare che la scrittura di \mathcal{D} che seguirà non dipende dalla scelta della base locale ortonormale. Se $(s_j)_j$ è una base locale di E allora abbiamo:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(s_j) &= (c \circ \nabla^E)s_j = c(\nabla^E s_j) = c(\sum_l \omega_j^l s_l) = \\ &= c(\sum_l \sum_k \omega_{j,k}^l e^k s_l) = \sum_k c(e^k) \sum_l \omega_{j,k}^l s_l = \\ &= \sum_k c(e_k) \nabla_{e_k}^E s_j \end{aligned}$$

e dunque:

$$\mathcal{D} = \sum_i c(e_i) \nabla_{e_i}^E.$$

Si richiederà additionally che l'azione di Clifford sia unitaria, e la connessione ∇^E sia *di Clifford*, cioè valga:

$$\nabla_X^E(c(\phi)s) = c(\nabla_X^{LC}\phi)(s) + c(y)\nabla_X^E s$$

dove ∇^{LC} è la connessione di Levi-Civita sul fibrato cotangente.

Vediamo un esempio di operatore di Dirac sul modulo di Clifford ΛM dove M è una varietà riemanniana. Per prima cosa sia in generale V uno spazio vettoriale di dimensione n , con prodotto scalare q . Si scelga $\{e_i\}$ una base ortonormale di V , e si fissi un'orientazione tramite $\text{vol} := e_1 \wedge \cdots \wedge e_n$. Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare indotto su ΛV . Possiamo definire per ogni k l'applicazione $*$ di Hodge:

$$\begin{aligned} * : \quad \Lambda^k V &\rightarrow \Lambda^{n-k} V \\ e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k} &\mapsto \text{sign}(\sigma) e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_{n-k}} \end{aligned}$$

dove $\sigma(1) = i_1, \dots, \sigma(k) = i_k, \sigma(k+1) = j_1, \dots, \sigma(n) = j_{n-k}$. Si verifica senza difficoltà che

$$(34) \quad *^2 = (-1)^{k(n-k)}$$

e che :

$$u \wedge *v = \langle u, v \rangle \text{vol}, \forall u, v \in \Lambda^k V, \quad w \wedge v = \langle *w, v \rangle \text{vol}, \forall w \in \Lambda^{n-k} V, v \in \Lambda^k V$$

Torniamo alla nostra varietà riemanniana di dimensione n e supponiamo in aggiunta che M sia orientabile. Sia $\text{dvol} \in C^\infty(M, \Lambda^n M)$ la forma di volume indotta dalla metrica. Per ogni $x \in M$ rimane definita un'applicazione lineare

$$*_x : \Lambda_x^k M \rightarrow \Lambda_x^{n-k} M$$

che induce un'applicazione di fibrati:

$$* : \Lambda^k M \rightarrow \Lambda^{n-k} M$$

Già sappiamo che date due k -forme ω e α è ben definito il prodotto scalare L^2 :

$$(\omega, \alpha)_{L^2} := \int_M \langle \omega, \alpha \rangle \text{dvol}.$$

Allora rimane ben definito l'operatore d^* aggiunto formale di $d : \Lambda^k M \rightarrow \Lambda^{k+1} M$ rispetto a $(\cdot, \cdot)_{L^2}$, vale a dire che d^* è definito da $(d\omega, \alpha)_{L^2} = (\omega, d^*\alpha)_{L^2}$ per ω k -forma e α $(k+1)$ -forma. Per verificare l'esistenza di d^* ne diamo una espressione in termini di d e $*$. Prese $\omega \in \Lambda^k M$, $\alpha \in \Lambda^{n-k-1}$ si ha per il teorema di Stokes:

$$\begin{aligned} \int_M \langle *d\omega, \alpha \rangle \text{dvol} &= \int_M d\omega \wedge \alpha \\ &= (-1)^{k+1} \int_M \omega \wedge d\alpha = \int_M (-1)^{k+1} \langle *\omega, d\alpha \rangle \text{dvol} \end{aligned}$$

Dato che $*^2 = (-1)^{k(n-k)}$ otteniamo la formula cercata:

$$d^* = (-1)^{nk+n+1} * d *$$

In particolare, se α è una 1-forma, allora $d^*\alpha \in C^\infty(M)$ ed otteniamo il *Teorema della divergenza* :

$$(35) \quad \int_M (d^*\alpha) \text{dvol} = 0$$

Arriviamo finalmente alla definizione di un particolare operatore di Dirac, detto operatore di Gauss-Bonnet (o di Eulero) nella seguente:

Proposizione 13. *Consideriamo ΛM come modulo di Clifford unitario, e la connessione su di esso indotta dalla connessione di Levi-Civita ∇^{LC} . L'operatore di Dirac associato a questi dati è $d + d^*$.*

Dimostrazione. La proposizione segue immediatamente dal lemma seguente.

Lemma 1. $d = \sum_i \epsilon(e^i) \nabla_{e_i}$; $d^* = \sum_j -i(e^j) \nabla_{e_j}$.

Dimostreremo questo Lemma la prossima lezione.

9. Lezione 9. NOTE A CURA DI GIORDANO GIORGI.

9.1. L'operatore di Gauss-Bonnet.

Si vuole ora mostrare che $d + d^* : C^\infty(M, \Lambda^* M) \rightarrow C^\infty(M, \Lambda^* M)$ è un operatore di Dirac. Come già osservato la dimostrazione segue dal seguente lemma:

Lemma 2. *sia ∇^{LC} la connessione di Levi-Civita ed e^i una base ortonormale di T^*M , allora si ha:*

$$\begin{aligned} d &= \sum \varepsilon(e^i) \nabla_{e_i} \\ d^* &= \sum -i(e^i) \nabla_{e_i} \end{aligned}$$

Dunque $d + d^*$ è l'operatore di Dirac associato al modulo $\Lambda^* M$ con azione

$$c(\phi) = \varepsilon(\phi) - i(\phi)$$

e alla connessione di Levi-Civita.

Dimostrazione. Sia $\tilde{d} = \sum \varepsilon(e^i) \nabla_{e_i}$. Si ha $\tilde{d}f = df$ e $\tilde{d}(\phi \wedge \psi) = \tilde{d}\phi \wedge \psi + (-1)^{|\phi|} \phi \wedge \tilde{d}\psi$ poiché per ∇ vale la regola di Leibnitz. Basta quindi verificare che per ogni 1-forma θ valga $\tilde{d}\theta = d\theta$. Si ricordi che la connessione di Levi-Civita sul duale è definita richiedendo che valga

$$X \langle e^i, e_j \rangle = \langle \nabla_X e^i, e_j \rangle + \langle e^i, \nabla_X e_j \rangle$$

Quindi $\forall X, Y$ si ha:

$$X \langle \theta, Y \rangle = \langle \nabla_X \theta, Y \rangle + \langle \theta, \nabla_X Y \rangle$$

ossia

$$X(\theta(Y)) - \theta(\nabla_X Y) = (\nabla_X \theta)(Y)$$

Si mostra ora che $\tilde{d}\theta(X, Y) = d\theta(X, Y) \forall X, Y \in C^\infty(M, TM)$:

$$\begin{aligned} \tilde{d}\theta(X, Y) &= (\sum e^i \wedge \nabla_{e_i} \theta)(X, Y) = \\ &= \sum (e^i(X) (\nabla_{e_i} \theta)(Y) - (\nabla_{e_i} \theta)(X) e^i(Y)) \end{aligned}$$

ma $X = e^i(X) e_i$ e $Y = e^i(Y) e_i$ dunque

$$\begin{aligned} (\nabla_X \theta)(Y) - (\nabla_Y \theta)(X) &= X(\theta(Y)) - \theta(\nabla_X Y) - Y(\theta(X)) + \theta(\nabla_Y X) = \\ &= X(\theta(Y)) - Y(\theta(X)) - \theta(\nabla_X Y - \nabla_Y X) = \\ &= X(\theta(Y)) - Y(\theta(X)) - \theta([X, Y] + T(X, Y)) \end{aligned}$$

ove T è la torsione. Nel caso in cui $\nabla = \nabla^{LC}$ allora $T \equiv 0$ e

$$\tilde{d}\theta(X, Y) = X(\theta(Y)) - Y(\theta(X)) - \theta([X, Y]) = d\theta(X, Y)$$

ove nell'ultima uguaglianza si è utilizzata la formula di Cartan. Per d^* , si consideri $\theta = ae^i \wedge \dots \wedge e^p$. Basta verificare che:

$$(-1)^{np+n} * d^* \theta = i(e^i) \nabla_{e_i} \theta$$

Si supponga che $\nabla_{e_j} e_i = 0$ in X , allora:

$$\begin{aligned} *d^* \theta &= *(d^*(ae^i \wedge \dots \wedge e^p)) = *(d^*(ae^{p+1} \wedge \dots \wedge e^n)) = \\ &= *(\sum_{i=1}^p e_i(a) e^i \wedge e^{p+1} \wedge \dots \wedge e^n) = \\ &= \sum_{i=1}^p e_i(a) *(e^i \wedge e^{p+1} \wedge \dots \wedge e^n) = \\ &= \sum_{i=1}^p e_i(a) (-1)^{n(p+1)+i-1} e_1 \wedge \dots \wedge \hat{e}_i \wedge \dots \wedge e_p = \\ &= (-1)^{n(p+1)} \sum_{i=1}^p (e_i(a) i(e^i) (e_1 \wedge \dots \wedge e_p)) = \\ &= (-1)^{n(p+1)} \sum_{i=1}^p i(e^i) \nabla_{e_i} (ae^i \wedge \dots \wedge e^p) = \\ &= (-1)^{n(p+1)} (i(e^i) \nabla_{e_i} \theta) \end{aligned}$$

Osservazione.

$\Lambda^*M = E$ è un fibrato di Dirac essendo metrica, connessione ed azione di Clifford tutte compatibili. Inoltre $\Lambda^*M = \Lambda^{pari} \oplus \Lambda^{dispari}M$ ossia

$$d + d^* = \begin{pmatrix} 0 & d + d^*|_{dispari} \\ d + d^*|_{pari} & 0 \end{pmatrix}$$

ove un blocco è l'aggiunto formale dell'altro.

Per definizione $d + d^*|_{pari}$ è l'**operatore di Gauss-Bonnet o di Eulero**.

9.2. L'operatore di segnatura.

Sia M una varietà tale che $\dim M = 2k$. Sia $\tau = (\sqrt{-1})^{p(p-1)+k}$ con

$$\tau : \Lambda_{\mathbb{C}}^p M \rightarrow \Lambda_{\mathbb{C}}^{n-p} M$$

ove $\Lambda_{\mathbb{C}}^p M \equiv \Lambda^p M \otimes \mathbb{C}$. Si ha $\tau^2 = 1$ ed inoltre $(d + d^*)\tau = -\tau(d + d^*)$. Sia

$$\Lambda_p^{\pm} M = \{\omega \in \Lambda_p^* M \otimes \mathbb{C} : \tau\omega = \pm\omega\}$$

Da quanto detto $C^{\infty}(M, \Lambda_{\mathbb{C}}^* M) = C^{\infty}(M, \Lambda_{\mathbb{C}}^+ M) \oplus C^{\infty}(M, \Lambda_{\mathbb{C}}^- M)$; si definisce operatore di segnatura:

$$D_{sign}^+ = d + d^*|_{\Lambda^+}$$

Anche in questo caso l'operatore di Dirac è associato ad un fibrato di Dirac.

9.3. L'operatore $\bar{\partial} + \bar{\partial}^*$.

Sia V uno spazio vettoriale reale con prodotto scalare $q(\cdot, \cdot)$. Si supponga che esista $J \in End(V)$ tale che $J^2 = -Id$ ed inoltre $q(Jv, Jv) = q(v, v)$. Si definiscano $V^{1,0}, V^{0,1}$:

$$V^{1,0} = \{v \mid Jv = iv\}$$

$$V^{0,1} = \{v \mid Jv = -iv\}$$

e quindi $V \otimes \mathbb{C} = V^{1,0} \oplus V^{0,1}$. $\Lambda^*V^{0,1}$ è un modulo di Clifford per l'azione seguente, posto $v = v^{1,0} + v^{0,1}$:

$$c(v) = \sqrt{2}(\varepsilon(v^{0,1}) - i(v^{1,0}))$$

Si noti che V ha necessariamente dimensione pari. Sia $\{e_1, \dots, e_n, e_{n+1}, \dots, e_{n+n}\}$ una base tale che

$$Je_j = e_{j+n} \quad Je_{j+n} = -e_j \quad 1 \leq j \leq n$$

Dunque si ha:

$$V^{1,0} = Span(e_1 - ie_{1+n}, \dots, e_n - ie_{2n})$$

$$V^{0,1} = Span(e_1 + ie_{1+n}, \dots, e_n + ie_{2n})$$

Quindi $e_j = \{(e_j - ie_{j+n}) + (e_j + ie_{j+n})\}/2$ e si verifica da questa decomposizione che $c(e_j)^2 = -1$. In conclusione $\Lambda^*V^{0,1} \equiv \Lambda^{0,*}V$ ha una struttura naturale di modulo di Clifford. Sia ora M una varietà quasi-complessa, ossia esiste $J \in C^{\infty}(M, End(TM))$ tale che $J^2 = -1$, sia g una metrica J -invariante e sia ∇ una connessione su $(T^{0,1})^*$. Si indichi ancora con ∇ la connessione indotta su $\Lambda^{0,*}M$. L'operatore:

$$\mathcal{D} = \sum c(e^i) \nabla_{e_i} : C^{\infty}(M, \Lambda^{0,*}M) \rightarrow C^{\infty}(M, \Lambda^{0,*}M)$$

è un operatore di Dirac. Dunque su ogni varietà quasi-complessa esiste un operatore di Dirac naturale, dipendente da $g(\cdot, \cdot)$ e da ∇ . Si noti che se (M, h) è complessa hermitiana, allora c'è un secondo importante operatore differenziale del primo ordine, l'operatore $\bar{\partial} + \bar{\partial}^*$. Si può verificare che esiste una connessione ∇ su $(T^{0,1})^*$ tale che $\mathcal{D} = \sqrt{2}(\bar{\partial} + \bar{\partial}^*)$. In generale questa connessione *non* è

di Clifford. Tuttavia, se, (M, h) è di Kähler allora $\sqrt{2}(\bar{\partial} + \bar{\partial}^*) = \mathbb{D}$ con \mathbb{D} sempre definito dall'azione di Clifford sopra introdotta e $\nabla^{0,1}$ indotta dalla connessione di Levi-Civita associata a $Re(h)$. (Il fatto che la connessione di Levi-Civita rispetti la decomposizione in forme $(1, 0)$ e $(0, 1)$ è una conseguenza dell'ipotesi Kähler; non è in generale vero.) In questo caso la connessione è di Clifford. *Concludendo*: su una varietà di Kähler l'operatore $\sqrt{2}(\bar{\partial} + \bar{\partial}^*)$ è un operatore di Dirac associato ad un fibrato di Clifford. Analogamente, sia E un fibrato olomorfo hermitiano sulla varietà di Kähler M e sia ∇^E la connessione complessa compatibile con la metrica. Abbiamo definito (lezione 7) $\bar{\partial}_E$. Consideriamo $\Lambda^{0,*}M \otimes E$; è un modulo di Clifford rispetto all'azione $c \otimes Id_E$. Consideriamo la connessione prodotto tensoriale di $\nabla^{0,1}$ (i.e. Levi-Civita) e ∇^E . Questa connessione è di Clifford; otteniamo quindi un operatore di Dirac che risulta essere proprio $\sqrt{2}(\bar{\partial}_E + \bar{\partial}_E^*)$.

9.4. Operatori differenziali.

Siano E, F due fibrati vettoriali su M . L'applicazione lineare

$$P : C^\infty(M, E) \rightarrow C^\infty(M, E)$$

è un operatore differenziale se per ogni carta banalizzante U comune ad E ed F

$$\begin{aligned} \chi &: U \rightarrow A \subseteq \mathbb{R}^n \\ \phi &: E|_U \rightarrow A \times \mathbb{C}^n \\ \psi &: F|_U \rightarrow A \times \mathbb{C}^m \end{aligned}$$

ed indicando con $i_U : C_0^\infty(U, E|_U) \hookrightarrow C^\infty(M, E)$ l'immersione delle funzioni a supporto compatto e con $r_U : C^\infty(M, F) \rightarrow C^\infty(U, F|_U)$ la restrizione, risulti commutativo il seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccccc} C_0^\infty(U, E|_U) & & r_U \circ P \circ i_U & & C^\infty(U, F|_U) \\ & \downarrow & & & \uparrow \\ C_0^\infty(A, A \times \mathbb{C}^n) & & P_U & & C^\infty(A, A \times \mathbb{C}^m) \end{array}$$

con P_U matrice di operatori differenziali. Si utilizzerà la notazione $P \in \text{Diff}^*(M; E, F)$; $P \in \text{Diff}^k(M; E, F)$ se per ogni banalizzazione non compaiono operatori di ordine superiore a k .

9.5. Simbolo principale.

Se $P \in \text{Diff}^k(M; E, F)$ allora è ben definito

$$\sigma_k(P) \in C^\infty(T^*M, \text{Hom}(\pi^*E, \pi^*F))$$

detto simbolo principale dell'operatore P .

Sia $(x, \xi) \in T^*M$ ed $e_x \in E_x$; introduciamo $f \in C^\infty(M)$ ed $e \in C^\infty(M, E)$ tali che $df|_x = \xi$ e $e(x) = e_x$. Definiamo $\sigma_k(P)(x, \xi) \in \text{Hom}(E_x, F_x)$ come segue :

$$\sigma_k(P)(x, \xi)(e_x) = i^k \frac{1}{k!} P((f - f(x))^k e)(x)$$

Si verifica che $\sigma_k(P)(x, \xi)$ non dipende dalle scelte fatte e che è un'applicazione lineare da $E_x \rightarrow F_x$. In una banalizzazione locale si ha:

$$\begin{aligned} \sigma_k \left(\sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(ij) \left(\frac{1}{\sqrt{-1}} \frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{1}{\sqrt{-1}} \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^{\alpha_n} \right) (x, \xi) = \\ \sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(ij) (\xi^1)^{\alpha_1} \cdots (\xi^n)^{\alpha_n} \end{aligned}$$

Vale, inoltre, la seguente proprietà: se $P \in \text{Diff}^k(M; E, F)$ e $Q \in \text{Diff}^m(M; F, G)$ allora $PQ \in \text{Diff}^{m+k}(M; E, G)$ e

$$\sigma_{k+m}(PQ) = \sigma_k(P)\sigma_m(Q)$$

Definizione 19. P è ellittico se $\forall (x, \xi) \neq 0 \in T^*M$

$$\sigma_k(P)(x, \xi) \in \text{Iso}(E_x, F_x)$$

Siano $\langle, \rangle_E, \langle, \rangle_F$ metriche hermitiane su E ed F rispettivamente, si costruisca il prodotto scalare $(u, u')_E = \int_M \langle u, u' \rangle_E \text{dvol} \forall u, u' \in C^\infty(M, E)$. L'operatore $P : C^\infty(M, E) \rightarrow C^\infty(M, F)$ ammette un aggiunto formale $P^* : C^\infty(M, F) \rightarrow C^\infty(M, E)$ se vale

$$(Pu, v)_F = (u, P^*v)_E \quad \forall u \in C^\infty(M, E) \quad \forall v \in C^\infty(M, F)$$

Se $P \in \text{Diff}^k(M; E, F)$ allora non è difficile dimostrare riducendosi a carte locali ed integrando per parti che esiste ed è unico $P^* \in \text{Diff}^k(M; F, E)$ ed inoltre:

$$\sigma(P^*) = \sigma(P)^*$$

Dopo queste generalità sugli operatori differenziali vogliamo ora calcolare il simbolo principale per l'operatore di Dirac. In una carta locale

$$\mathbb{D} = \sum c(dx^j)\nabla_j;$$

l'uguaglianza si verifica immediatamente dalla definizione $\mathbb{D} = c \circ \nabla$.

Dunque si ha:

$$\begin{aligned} \sigma(\mathbb{D})(x, \xi) &= \sum c(dx^k)(\sqrt{-1})\xi^k = \\ &= (\sqrt{-1})c(\xi^k dx^k) = (\sqrt{-1})c(\xi) \end{aligned}$$

In definitiva:

$$\sigma(\mathbb{D})(x, \xi) = (\sqrt{-1})c(\xi)$$

da cui segue che \mathbb{D} è ellittico. Inoltre

$$\sigma(\mathbb{D}^2)(x, \xi) = -c(\xi)^2 = \|\xi\|^2 \text{Id}_{E_x}$$

e dunque anche \mathbb{D}^2 è un operatore ellittico.

9.6. Laplaciani generalizzati.

Sia $P \in \text{Diff}^2(M; E, E)$ con E fibrato hermitiano. Si dirà che P è un *laplaciano generalizzato* se

$$\sigma(P)(x, \xi) = \|\xi\|^2 \text{Id}_{E_x}$$

Scriveremo brevemente $\sigma(P)(x, \xi) = \|\xi\|^2$. Da quanto sopra segue che \mathbb{D}^2 è un laplaciano generalizzato. Localmente P ammetterà la seguente espressione:

$$P = -g^{ij} \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} + (\text{ordine } 1) + (\text{ordine } 0)$$

Ad esempio in \mathbb{R}^n , con la metrica piatta:

$$P = - \sum \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)^2$$

è un laplaciano generalizzato. Si noti il segno $-$.

Osservazione.

Per i laplaciani generalizzati si ha una buona teoria dell'equazione del calore.

10. Lezione 10. NOTE A CURA DI CLAUDIA LA CHIOMA.

10.1. Alcune proprietà degli operatori di Dirac.

Iniziamo questa lezione con una proprietà generale degli operatori di Dirac.

Proposizione 14. *Sia E un modulo di Clifford hermitiano e sia \mathbb{D} un operatore di Dirac:*

$$(36) \quad \mathbb{D} : C^\infty(M, E) \longrightarrow C^\infty(M, E)$$

Se l'azione di Clifford è unitaria e ∇^E è una connessione di Clifford, allora l'operatore di Dirac è formalmente autoaggiunto:

$$(37) \quad (\mathbb{D}s, s') = (s, \mathbb{D}s') \quad \forall s, s' \in C^\infty(M, E)$$

Dimostrazione. Per definizione

$$(s, s') = \int_M \langle s, s' \rangle dvol.$$

Sappiamo che, per il teorema della divergenza (35),

$$(38) \quad \int_M (d^* \omega) dvol = 0 \quad \forall \omega \in \Omega^1(M)$$

Basta quindi verificare che

$$(39) \quad \langle \mathbb{D}s, s' \rangle - \langle s, \mathbb{D}s' \rangle = d^* \omega \quad \text{per qualche } \omega \in \Omega^1(M)$$

Si scelga una base locale ortonormale e_i tale che $\nabla_{e_i} e_j = 0$ in $m \in M$: si ha, in m ,

$$\begin{aligned} & \langle \mathbb{D}s, s' \rangle - \langle s, \mathbb{D}s' \rangle = \\ & = \langle \sum c(e^\alpha) \nabla_{e_\alpha} s, s' \rangle - \langle s, \sum c(e^\alpha) \nabla_{e_\alpha} s' \rangle = \\ & = \sum e_\alpha \langle c(e^\alpha) s, s' \rangle \end{aligned}$$

dove si è usato il fatto che la connessione è di Clifford e l'azione unitaria. Sia ora $\omega \in \Omega^1(M)$ definita come segue:

$$(40) \quad \omega(X) = - \langle c(X^*) s, s' \rangle$$

allora, in $m \in M$ vale la seguente uguaglianza:

$$\begin{aligned} d^* \omega &= - \sum i(e^\alpha) \nabla_{e_\alpha} \omega = \\ &= - \sum (\nabla_{e_\alpha} \omega)(e_\alpha) = \sum e_\alpha (\omega(e_\alpha)) \end{aligned}$$

Nell'ultimo passaggio abbiamo utilizzato la scelta particolare di base locale ortonormale e la definizione di connessione sul fibrato cotangente:

$$(41) \quad (\nabla_X \theta)(Y) = X(\theta(Y)) - \theta(\nabla_X Y)$$

Abbiamo in definitiva dimostrato che $\langle \mathbb{D}s, s' \rangle - \langle s, \mathbb{D}s' \rangle = d^* \omega$ che è quanto basta per concludere.

Osservazione: Sia (V, q) uno spazio vettoriale euclideo di $\dim V = n$; sia E un modulo di Clifford per V ; sia $\{v_1, \dots, v_n\}$ una base per V . Ricordiamo che $C^\infty(V, E)$ sono le funzioni a valori in E , mentre x_1, \dots, x_n sono le coordinate indotte da $\{v_1, \dots, v_n\}$. Rimane definito l'operatore di Dirac associato a questo modulo di Clifford :

$$(42) \quad \mathbb{D} = \sum c(v_i) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

Un semplice calcolo dimostra che :

$$(43) \quad \mathbb{D}^2 = -\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \dots - \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$$

A destra c'è il **Laplaciano** Δ ; vediamo quindi che \mathbb{D} è una radice quadrata di Δ . Questo risultato si generalizza alle varietà differenziabili (formula di Bochner/Weitzenbock/Lichnerowicz; verrà dimostrata nella Lezione 12).

Introdurremo ora un importante operatore di tipo Dirac su particolari varietà differenziabili, le varietà spin. Per definire le varietà spin abbiamo bisogno di ulteriori informazioni sull'algebra di Clifford $Cl(V, q)$ e sulla sua complessificazione.

10.2. Teorema di periodicità per le algebre di Clifford.

Introduciamo le seguenti notazioni:

$$\begin{aligned} Cl(V, q) &= Cl(V, q) \otimes \mathbb{C} \\ Cl(k) &= Cl(\mathbb{R}^k, \langle, \rangle_{\mathbb{R}^k}). \end{aligned}$$

Teorema 10. TEOREMA DI PERIODICITÀ *Sia $V = \mathbb{R}^k$ con la metrica standard. Allora si ha un isomorfismo di algebre:*

$$(44) \quad Cl(\mathbb{R}^{k+2}) \simeq Cl(\mathbb{R}^k) \otimes M_{2 \times 2}(\mathbb{C}).$$

Dimostrazione. Consideriamo le *matrici di Pauli*:

$$\gamma_2 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \quad \gamma_3 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma_4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \gamma_2 \gamma_3$$

È facile verificare che valgono le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} \gamma_3 \gamma_2 &= -\gamma_4 & \gamma_2 \gamma_4 &= -\gamma_3 & \gamma_4 \gamma_2 &= \gamma_3 \\ \gamma_2 i &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Supponiamo ora che sia $k \geq 1$ e definiamo un'applicazione:

$$f : Cl(k+2) \longrightarrow Cl(\mathbb{R}^k) \otimes M_{2 \times 2}(\mathbb{C})$$

come segue: sia $\{\xi_1, \dots, \xi_k, \xi_{k+1}, \xi_{k+2}\}$ una base ortonormale per \mathbb{R}^{k+2} allora

$$\begin{aligned} 1 &\longrightarrow Id \\ \xi_j &\longrightarrow \xi_j \otimes (\gamma_2 i) \quad \text{per } 1 \leq j \leq k \\ \xi_{k+1} &\longrightarrow Id \otimes \gamma_3 \\ \xi_{k+2} &\longrightarrow Id \otimes \gamma_4 \end{aligned}$$

Un facile calcolo mostra che

$$f(\xi_i)f(\xi_j) + f(\xi_j)f(\xi_i) = -2\delta_{ij}Id$$

L'applicazione f può essere quindi estesa come omomorfismo di algebre a tutta l'algebra di Clifford $Cl(\mathbb{R}^{k+2})$. A titolo di esempio: per $j, l \leq k$

$$\begin{aligned} f(\xi_j)f(\xi_l) &= \xi_j \xi_l \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ f(\xi_l)f(\xi_j) &= \xi_l \xi_j \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

e quindi, sommando le due relazioni si ottiene:

$$f(\xi_j)f(\xi_l) + f(\xi_l)f(\xi_j) = -2\delta_{jl}Id$$

come si voleva. Analogamente:

$$\begin{aligned} f(\xi_{k+1})f(\xi_j) + f(\xi_j)f(\xi_{k+1}) &= (1 \otimes \gamma_3)(\xi_j \otimes \gamma_2^i) + (\xi_j \otimes \gamma_2^i)(\otimes \gamma_3) = \\ &= \xi_j \otimes i\gamma_2\gamma_3 + \xi_j \otimes i\gamma_3\gamma_2 = 0 \end{aligned}$$

Le altre relazioni si dimostrano in maniera analoga. Vogliamo dimostrare che f è biunivoca. Ragionando sulle dimensioni si vede che bisogna solo verificare che è suriettiva. Basta osservare che denotati con :

$$\begin{aligned} \alpha_{pari} &= \text{prodotto di un numero pari di elementi di } \{\xi_1, \dots, \xi_k\} \\ \alpha_{dispari} &= \text{prodotto di un numero dispari di elementi di } \{\xi_1, \dots, \xi_k\} \end{aligned}$$

si ha:

$$\begin{aligned} \alpha_{pari} &\longmapsto \alpha_{pari} \otimes Id \\ \alpha_{dispari} &\longmapsto \alpha_{dispari} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ \alpha_{pari}\xi_{k+1}\xi_{k+2} &\longmapsto \alpha_{pari} \otimes \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \\ \alpha_{dispari}\xi_{k+1}\xi_{k+2} &\longmapsto \alpha_{dispari}i\gamma_2\gamma_3\gamma_4 = \alpha_{dispari} \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \\ \alpha_{pari}\xi_{k+1} &\longmapsto \alpha_{pari} \otimes \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \\ \alpha_{dispari}\xi_{k+1} &\longmapsto \alpha_{dispari} \otimes \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \\ \alpha_{pari}\xi_{k+2} &\longmapsto \alpha_{pari} \otimes \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \alpha_{dispari}\xi_{k+2} &\longmapsto \alpha_{dispari} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

È ora ovvio che gli elementi a destra generano tutto $Cl(k) \otimes M_{2 \times 2} \mathbb{C}$. Abbiamo quindi dimostrato la tesi del teorema per $k > 0$. Per $k = 0$ definiamo f da $Cl(2)$ a $M_{2 \times 2} \mathbb{C}$ mandando ξ_1 in γ_3 e ξ_2 in γ_4 . Anche questa f si estende ad un isomorfismo di algebre \square

Osservazione.

$$\begin{aligned} Cl(\mathbb{R}) &= \mathbb{R}[x]/(x^2 + 1) \simeq \mathbb{C} \\ Cl(\mathbb{R}) &\simeq \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \end{aligned}$$

Utilizzando questa osservazione ed il teorema di periodicità otteniamo il

Corollario 3.

$$(45) \quad Cl(2k) = M_{2^k \times 2^k}(\mathbb{C})$$

Da questo corollario si deduce che le algebre di Clifford di dimensione pari sono algebre di matrici. Per le algebre di ordine dispari si ottiene:

$$(46) \quad \mathcal{Cl}(2k+1) = \mathbb{M}_{2^k \times 2^k}(\mathbb{C}) \oplus \mathbb{M}_{2^k \times 2^k}(\mathbb{C})$$

Osservazione.

Vi ricordo che $\mathcal{Cl}(k)$ è graduata:

$$\mathcal{Cl}(k) = \mathcal{Cl}^0(k) \oplus \mathcal{Cl}^1(k)$$

dove $\mathcal{Cl}^0(k)$ indica un numero pari di prodotti, mentre $\mathcal{Cl}^1(k)$ indica un numero dispari di prodotti. Si ha:

Proposizione 15.

$$\mathcal{Cl}^0(k+1) \simeq \mathcal{Cl}(k)$$

Dimostrazione. Sussiste di fatto il seguente isomorfismo:

$$\mathcal{Cl}(k+1)^0 \simeq \mathcal{Cl}(k) \text{ (reale)}$$

Infatti fissiamo una base ortonormale in $\mathbb{R}^k \oplus \mathbb{R}$ e consideriamo l'applicazione:

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^k &\longrightarrow \mathcal{Cl}(k+1)^0 \\ \xi_j &\longrightarrow \xi_j \xi_{k+1} \end{aligned}$$

Allora:

$$\begin{aligned} f(\xi_i)f(\xi_j) + f(\xi_j)f(\xi_i) &= \xi_i \xi_{k+1} \xi_j \xi_{k+1} + \xi_j \xi_{k+1} \xi_i \xi_{k+1} = \\ &= \xi_i \xi_j + \xi_j \xi_i = -2\delta_{ij} \end{aligned}$$

pertanto

$$f: \mathcal{Cl}(k) \longrightarrow \mathcal{Cl}^0(k+1)$$

è ben definita ed è un isomorfismo (è suriettiva e le dimensioni sono uguali). \square

10.3. Il gruppo Spin.

Sia V uno spazio vettoriale euclideo orientato, $\dim V \geq 2$, con prodotto scalare q . Consideriamo il sottoinsieme di $\mathcal{Cl}(V, q)$

$$\text{Pin}(V) = \{a \in \mathcal{Cl}(V, q) \mid a = \eta_1 \cdots \eta_l, \eta_j \in V, \|\eta_j\|^2 = 1\}$$

dove $\|\eta\|^2 = q(\eta, \eta)$. Tale insieme ha una struttura di gruppo perchè:

$$(\eta_1 \cdots \eta_l)^{-1} = \eta_l \cdots \eta_1 (-1)^l$$

Definiamo ora il gruppo:

$$\text{Spin}(V) = \text{Pin}(V) \cap \mathcal{Cl}^0(V, q)$$

pertanto

$$\text{Spin}(V) = \{\eta_1 \cdots \eta_{2l}, \|\eta_j\| = 1\}$$

dove

$$(\eta_1 \cdots \eta_{2l})^{-1} = \eta_{2l} \cdots \eta_1$$

Notare che per gli elementi $a \in \text{Spin}(V)$ si ha $a^{-1} = a^T$, dove con T si intende l'ovvia operazione di trasposizione sull'algebra di Clifford: $(\eta_{i_1} \cdots \eta_{i_p})^T = (-1)^{p(p-1)/2} (\eta_{i_p} \cdots \eta_{i_1})$.

Definiamo ora un'azione di $\text{Pin}(V)$ su $\mathcal{Cl}(V, q)$: sia $w \in \text{Pin}(V)$, $x \in \mathcal{Cl}(V, q)$:

$$\rho(w)(x) = wxw^{-1}.$$

Per ogni w , $\rho(w)$ è un omomorfismo di algebre: infatti

$$\rho(w)(xy) = wxyw^{-1} = wxw^{-1}wyw^{-1} = \rho(w)(x)\rho(w)(y)$$

Quest'azione trasforma $V \hookrightarrow Cl(V, q)$ in se stesso; infatti siano dati $x \in V$, $w \in V$, $\|w\|=1$,

$$\rho(w)(x) = \mathcal{R}_w(x)$$

dove \mathcal{R}_w è la riflessione rispetto a $(\mathbb{R}w)^\perp$. Infatti, per ogni $x \in V$, $x = \alpha w + \beta w'$, con $w' \in (\mathbb{R}w)^\perp$. Allora $q(w, w') = 0$, quindi $ww' = -w'w$; ne segue:

$$\rho(w)(x) = w(\alpha w + \beta w')(-w) = (\alpha - \beta w'w)(-w) = -\alpha w + \beta w' = \mathcal{R}_w(x)$$

(per capire questi passaggi basta disegnare i vettori e fare la proiezione). Allora, per ogni $w \in Spin(V)$, $\rho(w)$ lascia V invariato ed agisce su V come un elemento di $SO(V)$ (si hanno soltanto un numero pari di riflessioni). Da ciò segue che:

$$\rho : Spin(V, q) \longrightarrow SO(V, q)$$

e $\rho(\cdot)$ è un omomorfismo di gruppi. Vediamo anche che ρ è suriettiva per una nota proprietà delle trasformazioni ortogonali (una conseguenza del Teorema spettrale):

se $P \in SO(V)$ allora $P = R_{\eta_1} \cdots R_{\eta_{2p}}$ con la condizione $2p \leq \dim V$; pertanto

$$P = \rho(\eta_1 \cdots \eta_{2p})$$

A questo punto possiamo studiare il $Ker\rho$:

Lemma 3. *Valgono le seguenti:*

- i. Se $\dim V = 2m$ allora $Z(Cl(V, q)) = \mathbb{R} \cdot 1$;
- ii. Se $\dim V = 2m + 1$ allora $Z(Cl(V)) = Span(1, \xi_1 \cdots \xi_{2m+1})$.

dove $Z(Cl(V, q))$ è l'insieme degli elementi che commutano con tutti gli elementi dell'algebra. ($Z(Cl(V, q))$ si dice centro dell'algebra di Clifford.)

Osservazione. Dall'ultima relazione si vede che nel caso di dimensione dispari:

$$Z(Cl(V)) \cap Cl^0(V) = \mathbb{R} \cdot 1$$

Dimostrazione.

- i. Consideriamo $\{e_1, \dots, e_n\}$ base ortonormale di V . Sia $v \in Z(Cl(V))$; allora $v = \sum_{i_1 < \dots < i_p} C^{i_1 \cdots i_p} e_{i_1 \cdots i_p}$ e, per ipotesi, $v \cdot e_i = e_i \cdot v$. Fissiamo ora $e_{i_1} \cdots e_{i_p}$; se p è pari e $i \in \{i_1, \dots, i_p\}$, allora

$$e_i e_{i_1} \cdots e_{i_p} = -e_{i_1} \cdots e_{i_p} e_i$$

Se p è dispari e $i \notin \{i_1, \dots, i_p\}$, allora

$$e_i e_{i_1} \cdots e_{i_p} = -e_{i_1} \cdots e_{i_p} e_i$$

Pertanto, per ogni multiindice $|I| > 0$, $\exists i \in \{1, \dots, n\}$, tale che

$$e_i e_I = -e_I e_i$$

da cui segue che v è necessariamente un multiplo dell'identità.

- ii. La dimostrazione è analoga alla precedente.

□

Sia ora $w \in Ker\rho$; allora $\forall x \in V$:

$$\begin{cases} w \cdot w^T & = 1 \\ w \cdot x \cdot w^T & = x \end{cases}$$

cioè $w \cdot x = x \cdot w \quad \forall x \in V$ e quindi $w \in Z(Cl(V)) \cap Spin(V)$. Da questa relazione e dal Lemma segue che $w = \pm 1$ e quindi $Ker \rho = \{\pm 1\}$. Possiamo quindi concludere che $Spin(V)$ è un rivestimento $2 - 1$ di $SO(V)$; inoltre è un gruppo di Lie perchè sottovarietà di un'algebra. Verifichiamo che è un rivestimento non banale: basta mostrare che, essendo $SO(V)$ connesso, tale è anche $Spin(V)$.

Proposizione 16. $Spin(V)$ è connesso.

Corollario 4. $Spin(V)$ non è unione disgiunta di due copie di $SO(V)$.

Dimostrazione della Proposizione: Dato che $SO(V)$ è connesso si ha che $Spin(V)$ ha al più 2 componenti connesse, una che contiene 1, l'altra che contiene -1 . Basta allora verificare che (-1) è connesso ad 1 da un cammino. Consideriamo

$$w(\theta) = ((\cos \theta)e_1 + (\sin \theta)e_2) \cdot (-\cos \theta e_1 + \cos \theta e_2)$$

con $\{e_1, \dots, e_n\}$ base ortonormale per V . Si vede che

$$w(\theta) \in Spin(V) \quad w(0) = 1 \quad w\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$$

e la Proposizione è dimostrata.

Inoltre $Spin(V)$ con $dim V \geq 3$ è semplicemente connesso (per la dimostrazione di questo fatto basta utilizzare il fatto che S^n è semplicemente connesso: un laccetto in $Spin(V)$ è un prodotto di laccetti:

$$\gamma_1(t) \cdots \gamma_{2n}(t)$$

ciascuno dei quali si trova nella sfera dello spazio vettoriale, cioè γ_j laccetto in $\{v \in V \mid \|v\| = 1\}$, che è semplicemente connesso.) Quindi $Spin(V)$ è un rivestimento $2 - 1$ di $SO(V)$ non banale ed è il rivestimento universale se $dim V \geq 3$.

Si ha quindi:

$$\mathcal{L}ie(Spin(V)) \simeq \mathcal{L}ie(SO(V))$$

Più precisamente vale la seguente

Proposizione 17. Sia λ l'isomorfismo:

$$\lambda : \mathcal{L}ie(SO(V)) \rightarrow \mathcal{L}ie(Spin(V)) \subset Cl^0(V)$$

inverso di $\mathcal{L}ie(\rho) : \mathcal{L}ie(Spin(V)) \rightarrow \mathcal{L}ie(SO(V))$; allora

$$\lambda(A_{ij}) = \frac{1}{4}A_{ij}e_i e_j$$

Dimostrazione. Consideriamo $V = \mathbb{R}^k$ con il prodotto scalare canonico. Basta mostrare la tesi per le matrici A con $A_{ij} = 1$, $A_{ji} = -1$ e le altre componenti uguali a zero. Allora $A = g'(0)$ dove $g(t) \in SO(n)$

$$\begin{cases} g(t)e_i &= (\cos t)e_i + (\sin t)e_j \\ g(t)e_j &= (\cos t)e_j - (\sin t)e_i \\ g(t)e_k &= e_k \end{cases} \quad \text{per } k \neq i, j$$

cioè A è il vettore tangente alla curva $g(t)$ in 0. Solleviamo $g(t)$ a $Spin(n)$; definiamo

$$h(t) = \left(\cos \frac{t}{2}\right) + \left(\sin \frac{t}{2}\right)e_i e_j \in Spin(n)$$

Con semplici calcoli di trigonometria si vede che $h(t) \in Spin(n)$ e $\rho(h(t)) = g(t)$. Inoltre

$$h'(0) = \frac{1}{2}e_i e_j = \frac{1}{4}(e_i e_j - e_j e_i)$$

che è quello che dovevamo dimostrare. \square

10.4. Rappresentazioni del gruppo Spin.

Ricordiamo che

$$\begin{cases} \mathcal{Cl}(2k) = \mathbb{M}_{\mathbb{C}}(2^k) \text{ algebra di matrici} \\ \mathcal{Cl}(2k+1) = \mathbb{M}_{\mathbb{C}}(2^k) \oplus \mathbb{M}_{\mathbb{C}}(2^k) \end{cases}$$

dove $\mathcal{Cl}(2k) = Cl(\mathbb{R}^{2k}, q) \otimes \mathbb{C}$. Quindi \mathbb{C}^{2^k} , che è l'unica rappresentazione irriducibile di $\mathbb{M}_{\mathbb{C}}(2^k)$, è, a meno di isomorfismi, l'unica rappresentazione irriducibile di $\mathcal{Cl}(2k)$. Al contrario $\mathcal{Cl}(2k+1)$ ha due rappresentazioni irriducibili ottenute proiettando sul primo e secondo fattore rispettivamente. Sia ora V uno spazio euclideo di $\dim V = 2k$.

Ricordiamo che $Pin(V) \subseteq \mathcal{Cl}(V)$, pertanto tramite l'isomorfismo tra $\mathcal{Cl}(V)$ e $\mathcal{Cl}(2k)$ otteniamo una rappresentazione:

$$\mathcal{R} : Pin(V) \longrightarrow Gl(\mathbb{C}, 2^k)$$

che, per quanto detto, è necessariamente irriducibile ($Pin(V)$ genera tutta l'algebra che non ha sottospazi invarianti); restringendoci a $Spin(V)$ si ottiene la rappresentazione spin

$$\Delta : Spin(V) \longrightarrow GL(\mathbb{C}, 2^k)$$

Proposizione 18. Δ è una rappresentazione unitaria che è somma di due rappresentazioni irriducibili (non equivalenti):

$$\Delta_{\pm} : Spin(V) \longrightarrow GL(S^{\pm})$$

con $\mathbb{C}^{2^k} = S^+ \oplus S^-$.

Dimostrazione. Abbiamo già osservato che la rappresentazione di $Pin(V)$ è irriducibile. Ricordiamo ora che

$$\mathcal{Cl}(2k)^0 \simeq \mathcal{Cl}(2k-1) \simeq \mathbb{M}_{\mathbb{C}}(2^{k-1}) \oplus \mathbb{M}_{\mathbb{C}}(2^{k-1})$$

quindi, restringendo la rappresentazione da $Pin(V)$ a $Spin(V) \subset \mathcal{Cl}(2k)^0$ ho due rappresentazioni irriducibili (proiezione sul primo e sul secondo fattore). Quindi la restrizione di \mathcal{R} a $Spin(V)$ ci dà:

$$\Delta : Spin(V) \longrightarrow GL(S^+) \oplus GL(S^-)$$

pertanto Δ_{\pm} sono definite e sono irriducibili; vediamo infine che

$$\Delta : Spin(V) \longrightarrow U(2^k)$$

Definiamo l'involuzione su $\mathcal{Cl}(2k)$:

$$\left(\sum c_I e_{i_1} \cdots e_{i_k} \right)^* = \sum \bar{c}_I e_{i_k} \cdots e_{i_1}$$

Se $s \in Spin(V)$ allora $ss^* = 1$; si verifica inoltre che l'isomorfismo $\mathcal{Cl}(2k) \simeq \mathbb{M}_{\mathbb{C}}(2^k)$ è uno $*$ -isomorfismo con:

$$(A)^* = \overline{A}^T$$

quindi

$$Id = \Delta(w \cdot w^*) = \Delta(w) \overline{\Delta(w)}^T$$

da cui segue che Δ è unitaria. \square

Osservazione. Per costruzione lo spazio vettoriale $S^+ \oplus S^- = \mathbb{C}^{2^k}$ è un modulo di Clifford perchè è stato ottenuto per restrizione da un modulo di Clifford. Anzi:

$$End(S) = \mathcal{Cl}(V, q)$$

Quindi S è una rappresentazione di $Spin(V)$ ed è un modulo di Clifford. Vedremo la prossima volta che di fatto l'azione di Clifford degli elementi di V è dispari rispetto alla decomposizione:

$$S = S^+ \oplus S^-$$

Passiamo al caso in cui la dimensione dello spazio V è dispari: procedendo in maniera del tutto analoga si dimostra la

Proposizione 19. *Sia V euclideo, $\dim V = 2k + 1$. La restrizione di*

$$Cl^0(V) \simeq \mathbb{M}_{\mathbb{C}}(2^k)$$

a $Spin(V)$ è una rappresentazione unitaria irriducibile.

11. Lezione 11. NOTE A CURA DI PAOLO BRAVI.

11.1. Riassunto.

Sia V uno spazio vettoriale euclideo orientato, denotiamo con q il suo prodotto scalare. Denotando con $\text{Cl}(V, q)$ l'algebra di Clifford (reale) e con $\mathbb{C}\text{Cl}(V, q)$ la sua complessificazione, si ha il seguente:

$$\text{Cl}(V, q) \simeq \text{Cl}(V) \simeq \begin{cases} M_{\mathbb{C}}(2^k) & \text{se } \dim V = 2k \\ M_{\mathbb{C}}(2^k) \oplus M_{\mathbb{C}}(2^k) & \text{se } \dim V = 2k + 1 \end{cases}$$

Ricordando che $\text{Spin}(V) = \{\eta_1 \dots \eta_{2p} : \|\eta\|^2 = 1\} \subseteq \text{Cl}^0(V)$ si ha il seguente.

Teorema 11. *Spin(V) è un gruppo di Lie di dimensione $\frac{\dim V(\dim V - 1)}{2}$ ed è un rivestimento 2 a 1 di $SO(V)$ (semplicemente connesso se $\dim V \geq 3$).*

Se $\dim V = 2k$, $\text{Cl}(V) \simeq M_{\mathbb{C}}(2^k)$ ha un'unica (a meno di isomorfismo) rappresentazione irriducibile $S = \mathbb{C}^{2^k}$. Restringendo questa rappresentazione a $\text{Spin}(V) \subset \text{Cl}(V) \subset \mathbb{C}\text{Cl}(V)$ otteniamo la rappresentazione $\text{Spin}(V) \rightarrow \text{Aut}(S)$, detta *rappresentazione spin*. Abbiamo verificato che la rappresentazione spin è unitaria e che essa si decompone in due mezzette rappresentazioni. Riprendiamo ora questo punto con particolare riguardo ai problemi di graduazione.

11.2. Chiralità.

Ricordiamo che la graduazione di $\mathbb{C}\text{Cl}(V) = \mathbb{C}\text{Cl}^0(V) \oplus \mathbb{C}\text{Cl}^1(V)$ è definita prendendo come elementi omogenei i prodotti di un numero pari (e dispari rispettivamente) di vettori. Inoltre se fissiamo una base ortonormale $\{e_1, \dots, e_{\dim V}\}$ di V , possiamo considerare $\Gamma = \sqrt{-1}^{\lfloor \frac{\dim V + 1}{2} \rfloor} e_1 \dots e_{\dim V} \in \mathbb{C}\text{Cl}(V)$. Tale elemento è detto di *chiralità* e non dipende dalla scelta della base. Si ha $\Gamma^2 = 1$ e

- se $\dim V$ è pari, $\Gamma \in Z(\mathbb{C}\text{Cl}(V))$,
- se $\dim V$ è dispari, $\Gamma \in Z(\mathbb{C}\text{Cl}(V)^0)$ e $\{w : \Gamma w = -w\Gamma\} = \mathbb{C}\text{Cl}^1(V)$.

In particolare se $\dim V = 2k$, Γ induce per moltiplicazione un'involuzione in $\mathbb{C}\text{Cl}^0(V)$ e quindi una ulteriore graduazione $\mathbb{C}\text{Cl}^0(V) = \mathbb{C}\text{Cl}^0(V)^+ \oplus \mathbb{C}\text{Cl}^0(V)^-$ dove ogni elemento si decompone in $w = \frac{w + \Gamma w}{2} + \frac{w - \Gamma w}{2}$.

D'altra parte si ha $\mathbb{C}\text{Cl}^0(V) \simeq \mathbb{C}\text{Cl}(W) = \mathbb{C}\text{Cl}(W)^+ \oplus \mathbb{C}\text{Cl}(W)^-$, dove W è un sottospazio di V di codimensione 1 e la graduazione è quella indotta analogamente da Γ^W . Non è difficile verificare che l'isomorfismo $\mathbb{C}\text{Cl}(W) \simeq \mathbb{C}\text{Cl}^0(V)$ è un isomorfismo di algebre graduate. Si noti che $\mathbb{C}\text{Cl}(W)^- \simeq \mathbb{C}\text{Cl}(W)^0 \simeq \mathbb{C}\text{Cl}(W)^+$ dove, ad esempio, l'isomorfismo $\mathbb{C}\text{Cl}(W)^0 \simeq \mathbb{C}\text{Cl}(W)^+$ è indotto dall'inclusione di $\mathbb{C}\text{Cl}(W)^0$ in $\mathbb{C}\text{Cl}(W)$ seguita dalla proiezione su $\mathbb{C}\text{Cl}(W)^+$ lungo $\mathbb{C}\text{Cl}(W)^-$. Dato che $\mathbb{C}\text{Cl}(W)^0 \simeq M_{\mathbb{C}}(2^{k-1})$ si ha in definitiva $\mathbb{C}\text{Cl}^0(V)^+ \simeq M_{\mathbb{C}}(2^{k-1}) \simeq \mathbb{C}\text{Cl}^0(V)^-$.

Definendo $S^{\pm} = \text{Ker}(c(\Gamma) \mp \text{Id}) \simeq \mathbb{C}^{2^{k-1}}$ si ha che

$$\begin{aligned} \mathbb{C}\text{Cl}^0(V)^+ &\simeq \text{End}(S^+) \\ \mathbb{C}\text{Cl}^0(V)^- &\simeq \text{End}(S^-) \\ \mathbb{C}\text{Cl}^1(V)^+ &\simeq \text{Hom}(S^+, S^-) \\ \mathbb{C}\text{Cl}^1(V)^- &\simeq \text{Hom}(S^-, S^+) \end{aligned}$$

ovvero la seguente.

Proposizione 20. *Se $\dim V = 2k$ e $S \simeq \mathbb{C}^{2^k}$ è la rappresentazione irriducibile di $\text{Cl}(V)$, allora*

- i. $S = S^+ \oplus S^-$ è un modulo di Clifford \mathbb{Z}_2 -graduato hermitiano e l'azione di $v \in V$ è dispari, cioè,

$$c(v) : S^\pm \longrightarrow S^\mp,$$

- ii. la rappresentazione spin si decompone in due mezze rappresentazioni

$$\Delta_{\mathbb{C}}^\pm : Spin(V) \longrightarrow Aut(S^\pm).$$

Dimostrazione. Se $w \in \mathbb{C}l^0(V)$ si ha $\Gamma w = w\Gamma$, quindi $c(\Gamma)c(w) = c(w)c(\Gamma)$ e $c(w) : S^\pm \longrightarrow S^\pm$. Se $w \in \mathbb{C}l^0(V)^+$ si ha $\Gamma w = w = w\Gamma$, quindi $c(w)(c(\Gamma) - \text{Id}) = 0$, ma se $s \in S^-$ allora $c(w)(-2s) = 0$, cioè $c(w)s = 0$ da cui segue che se $w \in \mathbb{C}l^0(V)^+$ allora $c(w)|_{S^-} = 0$ e analogamente se $w \in \mathbb{C}l^0(V)^-$ allora $c(w)|_{S^+} = 0$.

Se $w \in \mathbb{C}l^1(V)$ si ha $c(\Gamma)c(w) = -c(w)c(\Gamma)$ e quindi $c(w) : S^\pm \longrightarrow S^\mp$.

Analogamente $c(\mathbb{C}l^1(V)^+)(S^-) = 0$ e $c(\mathbb{C}l^1(V)^-)(S^+) = 0$. \square

11.3. Varietà Spin.

Definizione 20. Sia E un fibrato vettoriale reale riemanniano orientabile su M con funzioni di transizione $\{g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow SO(k)\}$. Diremo che E ammette una struttura spin se esistono sollevamenti $\{g'_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow Spin(k)\}$ delle funzioni di transizione ($\rho(g'_{\alpha\beta}) = g_{\alpha\beta}$), tali che

$$\begin{cases} g'_{\alpha\beta} g'_{\beta\gamma} g'_{\gamma\alpha} = 1 \\ g'_{\alpha\alpha} = 1 \end{cases}$$

La scelta dei sollevamenti è detta scelta di una struttura spin. Se esiste una struttura spin allora E si dice fibrato spin. M si dice spin quando TM lo è.

Non tutti i fibrati sono spin, così come non tutti i fibrati sono orientabili. L'ostruzione all'orientabilità di un fibrato è misurata da una classe caratteristica $w_1(E) \in H^1(M, \mathbb{Z}_2)$ detta *prima classe di Stieffel-Whitney*. Analogamente, l'ostruzione all'esistenza di una struttura spin è misurata da una classe $w_2(E) \in H^2(M, \mathbb{Z}_2)$, la *seconda classe di Stieffel-Whitney*. Vediamo, in particolare, che localmente una struttura spin esiste sempre. Entriamo brevemente nei dettagli delle definizioni. Per fare questo occorre introdurre i gruppi di coomologia di Čech di M a valori in \mathbb{Z}_2 . Sia $\mathbb{Z}_2 = \{-1, 1\}$; scegliamo quindi la notazione moltiplicativa. Fissiamo in M un ricoprimento $\{U_{\alpha_j}\}$ con la seguente proprietà: l'intersezione di un numero finito di aperti è vuoto oppure contraibile. Usando coordinate normali si può dimostrare che un tale ricoprimento esiste sempre (ricoprimento con palle geodetiche). Una j -cocatena di Čech a valori in \mathbb{Z}_2 è una funzione $f(\alpha_0, \dots, \alpha_j) \in \mathbb{Z}_2$ definita su $(j+1)$ -ple di indici tali che $U_{\alpha_0} \cap \dots \cap U_{\alpha_j} \neq \emptyset$ e con la ulteriore proprietà di essere totalmente simmetrica: $f(\alpha_{\sigma(0)}, \dots, \alpha_{\sigma(j)}) = f(\alpha_0, \dots, \alpha_j)$ per ogni permutazione σ . Il gruppo moltiplicativo delle j -cocatene è denotato con $C^j(M; \mathbb{Z}_2)$. Esiste un operatore di cobordo sulle j -cocatene: $\delta_j : C^j \rightarrow C^{j+1}$:

$$(\delta_j f)(\alpha_0, \dots, \alpha_{j+1}) = \prod_{i=0}^{j+1} f(\alpha_0, \dots, \hat{\alpha}_i, \dots, \alpha_{j+1}).$$

Si verifica facilmente che $\delta^2 = 0$. La coomologia di M a valori in \mathbb{Z}_2 è per definizione $\text{Ker} \delta / \text{Im} \delta$. Gli elementi f in $C^j(M, \mathbb{Z}_2)$ tali che $\delta f = 0$ sono detti j -cocicli. Si verifica che questi gruppi non dipendono dalla scelta del ricoprimento. (Di fatto sono isomorfi alla usuale coomologia con coefficienti in \mathbb{Z}_2).

Torniamo al nostro fibrato riemanniano E e fissiamo un ricoprimento geodetico banalizzante. Siano $\{g_{\alpha\beta}\}$ le funzioni di transizione di questo fibrato associate a questo ricoprimento. Quindi $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow O(n)$. Definiamo un 1-cociclo come segue: $f(\alpha, \beta) = \det(g_{\alpha\beta}) \in \mathbb{Z}_2$. Dalle

proprietà delle funzioni di transizione segue che $\delta f = 0$ e che una diversa scelta di funzioni di transizione definisce un cociclo \tilde{f} che differisce da f per un cobordo. La prima classe di Stieffel-Whitney è allora definita come la classe $w_1(E) = [f] \in H^1(M, \mathbb{Z}_2)$.

Dalla definizione data è facile vedere che

Proposizione 21. *E è orientabile se e soltanto se $w_1(E) = 0$.*

Sia ora E orientabile. Scegliamo dei sollevamenti delle funzioni di transizione al gruppo spin. Dato che $U_\alpha \cap U_\beta$ è contraibile questo sollevamento esiste sempre. Siano $g'_{\alpha\beta}$ questi sollevamenti. L'immagine tramite l'omomorfismo $\rho : \text{Spin}(n) \rightarrow \text{SO}(n)$ di $g'_{\alpha\beta}g'_{\beta\gamma}g'_{\gamma\alpha}$ è uguale a l'identità. Quindi

$$g'_{\alpha\beta}g'_{\beta\gamma}g'_{\gamma\alpha} = \pm \mathbb{1} = \phi(\alpha, \beta, \gamma)\mathbb{1},$$

con $\phi(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{Z}_2$. Si verifica che $\phi \in C^2(M, \mathbb{Z}_2)$ e che è un cociclo. La classe $[\phi] \in H^2(M, \mathbb{Z}_2)$ ed è, per definizione, la seconda classe di Stieffel-Whitney $w_2(E)$. Si dimostra senza particolare difficoltà la seguente

Proposizione 22. *Il fibrato orientabile E è spin se e soltanto se $w_2(E) = 0$.*

Elenchiamo, senza dimostrazione, le principali proprietà della seconda classe di Stieffel-Whitney:

Proposizione 23. *Valgono le seguenti proprietà:*

- i. $w_2((\mathbb{L} \rightarrow \mathbb{C}P^1)_{\mathbb{R}}) \neq 0$;
- ii. w_2 è stabile;
- iii. se E è complesso, allora
 - 3.1) $c_1(E) \in H^2(M, \mathbb{Z})$,
 - 3.2) $w_2(E_{\mathbb{R}}) = c_1(E) \pmod{2\mathbb{Z}}$.

Di seguito riportiamo alcuni esempi.

- i. \mathbb{R}^n è spin.
- ii. Ogni 3-varietà orientabile è spin (perché in questo caso si dimostra che $w_2(TM) = w_1(TM)^2$ e a destra c'è zero dato che per ipotesi M è orientabile).
- iii. Ogni varietà omeomorfa a S^n è spin.
- iv. Qualsiasi varietà con fibrato tangente stabilmente banale è spin (cioè se esiste V tale che $TM \oplus V \simeq M \times \mathbb{R}^N$).
- v. Le superfici di Riemann sono spin, poiché $\int_M c_1(T^{1,0}) = 2 - 2g = 2(1 - g)$ e quindi $w_2 = 0$.
- vi. $\mathbb{R}P^n$ è spin sse $n \equiv 3 \pmod{4}$.
- vii. $\mathbb{C}P^n$ è spin sse n è dispari.
- viii. $\mathbb{H}P^n$ è spin per ogni n .
- ix. $V^n(d) \subset \mathbb{C}P^{n+1}$ ipersuperficie algebrica di grado d è spin sse $n + d \in 2\mathbb{Z}$.

11.4. Fibrato degli spinori.

Sia M spin, scegliamo una struttura spin sul fibrato tangente, cioè dei sollevamenti $g'_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow \text{Spin}(V)$ delle funzioni di transizione $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow \text{SO}(V)$.

Il fibrato degli spinori è ottenuto partendo dalla rappresentazione spin

$$\Delta_{\mathbb{C}} : \text{Spin}(k) \rightarrow \text{Aut}(S^+ \oplus S^-)$$

e definendo le

$$g_{\alpha\beta}^{\$} = \Delta_{\mathbb{C}} \circ g'_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow U(S).$$

Se $\dim M$ è pari allora $S = S^+ \oplus S^-$ e $g_{\alpha\beta}^{\$} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow U(S^+) \oplus U(S^-)$.

Definiamo

$$\$ = \frac{\bigsqcup_\alpha U_\alpha \times S}{\sim},$$

dove la relazione di equivalenza \sim è data dalle $g_{\alpha\beta}^{\$}$. $\$$ è in maniera naturale un modulo di Clifford hermitiano.

Se M ha dimensione $2k$ allora $\$ = \$^+ \oplus \$^-$ è \mathbb{Z}_2 -graduato.

11.5. L'operatore di Atiyah-Singer sulle varietà spin.

Sia $\{\omega_\alpha^{LC}\}$ la connessione di Levi-Civita su TM ,

$$\omega_\alpha \in \Omega^1(U_\alpha, \text{Lie}(\text{SO}(2k))).$$

Consideriamo $\text{Lie}(\rho) : \text{Lie}(\text{Spin}(2k)) \rightarrow \text{Lie}(\text{SO}(2k))$ e notiamo con λ il suo inverso.

Definizione 21. Le $\{\omega_\alpha^{\$} \in \Omega^1(U_\alpha, \text{Lie}(\text{Spin}(2k)))\}$, definite da $\omega_\alpha^{\$} = \lambda(\omega_\alpha^{LC})$, inducono una connessione

$$\nabla^{\$} : C^\infty(M, \$) \rightarrow C^\infty(M, T^*M \otimes \$).$$

Se e_i è una base locale ortogonale di TM e

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} e_j = \omega_{ij}^k e_k,$$

allora, utilizzando la Proposizione (17) della decima Lezione, vediamo che localmente $\nabla^{\$}$ si scrive come segue

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}}^{\$} = \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{1}{4} \omega_{ij}^k c(e^j) c(e^k),$$

$$\nabla^{\$} = \left(\begin{array}{c|c} \nabla^{\$^+} & 0 \\ \hline 0 & \nabla^{\$^-} \end{array} \right).$$

La connessione indotta dalla connessione di Levi-Civita è una connessione di Clifford compatibile con la metrica.

Definizione 22. L'operatore di Atiyah-Singer su una varietà spin è l'operatore di Dirac

$$\mathcal{D} = \sum c(e_i) \nabla_{e_i}^{\$}.$$

L'operatore di Atiyah-Singer è associato ad un fibrato di Dirac. È bene notare che l'operatore di Atiyah-Singer dipende dalla scelta dei sollevamenti, e cioè dalla particolare scelta di struttura spin. Sarà chiaro fra breve che, d'altra parte, l'indice dell'operatore di Atiyah-Singer non dipende da questa particolare scelta. Ciò non risulta vero per invarianti analitici più sofisticati dell'indice.

Nel caso pari l'operatore di Atiyah-Singer è \mathbb{Z}_2 -graduato:

$$\mathcal{D} = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \mathcal{D}^- \\ \hline \mathcal{D}^+ & 0 \end{array} \right) : C^\infty(M, \$^+) \oplus C^\infty(M, \$^-) \rightarrow C^\infty(M, \$^+) \oplus C^\infty(M, \$^-),$$

con $\mathcal{D}^- = (\mathcal{D}^+)^*$.

Esempio. Possiamo generalizzare l'operatore di Atiyah-Singer come segue. Se $W \rightarrow M$ è un fibrato qualsiasi dotato di una metrica e di una connessione compatibile, consideriamo $\$ \oplus W$ con

l'azione di Clifford $c_W(v) = c_{\mathbb{S}}(v) \otimes \mathbb{1}_W$ e la connessione $\nabla^{\mathbb{S} \otimes W} = \nabla^{\mathbb{S}} \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes \nabla^W$. Possiamo allora definire l'operatore di Atiyah–Singer a coefficienti in W come

$$\mathcal{D}_W = c_W \circ \nabla^{\mathbb{S} \otimes W}.$$

Anche questo operatore è associato ad un fibrato di Clifford. Osserviamo che

$$\begin{aligned} \text{End}(E) &= \text{End}(\mathbb{S}) \otimes \text{End}(W) \\ &= \text{Cl}(M) \otimes \text{End}(W) \\ &= \text{Cl}(M) \otimes \text{End}_{\text{Cl}(M)}(E), \end{aligned}$$

e inoltre

$$\Omega^E = \Omega^{\mathbb{S}} \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes \Omega^W.$$

11.6. Enunciato del teorema di Atiyah–Singer per gli operatori di Dirac.

Teorema 12. *Sia (M, g) una varietà riemanniana compatta e \mathcal{D} un operatore di Dirac su un fibrato di Clifford $E \rightarrow M$, allora*

$$\dim \text{Ker}(\mathcal{D}) < +\infty.$$

Teorema 13 (Atiyah–Singer per varietà spin). *Sia M una varietà spin di dimensione $2k$, W un fibrato su M , allora*

$$\dim \text{Ker} \mathcal{D}_W^+ - \dim \text{Ker} \mathcal{D}_W^- = \int_M \hat{A}(M) \wedge \text{Ch}(W).$$

Vogliamo ora enunciare il teorema dell'indice di Atiyah-Singer per un qualsiasi modulo di Clifford. Sia E un modulo di Clifford per V spazio vettoriale euclideo di dimensione $2k$. Se E è irriducibile allora $E \simeq S$, altrimenti esiste W tale che $E \simeq S \otimes W$. In particolare

$$\begin{aligned} \text{End}(E) &\simeq \text{End}(S) \otimes \text{End}_{\text{Cl}(V)}(E) \\ &\simeq \text{Cl}(V) \otimes \text{End}_{\text{Cl}(V)}(E). \end{aligned}$$

Sia ora $E \rightarrow M$ un fibrato di moduli, continua ad essere vero globalmente, come nel caso dell'esempio sopra, che

$$\text{End}(E) \simeq \text{Cl}(M) \otimes \text{End}_{\text{Cl}(M)}(E),$$

perché localmente, se U è contraibile, $E|_U \simeq \mathbb{S}_U \otimes W$. Il fatto che localmente $E|_U \simeq \mathbb{S}_U \otimes W$ ha un'importante conseguenza: utilizzando una partizione dell'unità e la connessione di Clifford locale dell'Esempio 1 vediamo che su un modulo di Clifford esiste sempre una connessione di Clifford. Questo fatto è importante, perché è solo per gli operatori di Dirac associati a fibrati di Dirac che la dimostrazione tramite l'equazione del calore funziona.

Supponiamo che E sia un modulo di Clifford graduato, quindi $E = E^+ \oplus E^-$. Sia

$$\nabla^E = \left(\begin{array}{c|c} \nabla^{E^+} & 0 \\ \hline 0 & \nabla^{E^-} \end{array} \right)$$

una connessione diagonale per E ; associati a questi dati ci sono, come in precedenza, un operatore di Dirac \mathcal{D} ed una curvatura Ω^E . Consideriamo $c(\Gamma)\Gamma^E \in C^\infty(M, \text{End}(E))$ dove Γ^E è l'operatore di graduazione di E ($E^\pm = \{s : \Gamma^E s = \pm s\}$, $(\Gamma^E)^2 = 1$) e Γ è l'operatore di chiralità. Poiché l'azione

è graduata $c(\Gamma)\Gamma^E$ commuta con l'azione di Clifford ed è quindi a valori in $\text{End}_{\text{Cl}(M)}(E)$. Notiamo questo elemento con $\Gamma^{E/\$}$.

Definizione 23. Sia $A \in C^\infty(M, \text{End}(E))$, la supertraccia di A è

$$\text{Str}(A) = \text{Tr}(\Gamma^E A).$$

Se

$$A = \left(\begin{array}{c|c} A_{++} & A_{+-} \\ \hline A_{-+} & A_{--} \end{array} \right)$$

allora

$$\text{Str}(A) = \text{Tr}A_{++} - \text{Tr}A_{--}.$$

Ispirati da questa definizione poniamo per $A' \in C^\infty(M, \text{End}_{\text{Cl}(M)}(E))$

$$\text{Str}^{E/\$}(A') = \text{Tr}(\Gamma^{E/\$}A').$$

Ricordiamo ora che Ω^E è una due forma a valori negli endomorfismi di E . Utilizzando la decomposizione $\text{End}(M) = \text{Cl}(M) \otimes \text{End}_{\text{Cl}(M)}(E)$ vediamo che c'è una decomposizione $\Omega^E = \Omega^{\text{Cl}(M)} \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes \Omega^{E/\$}$ che localmente è data dalla decomposizione dell'Esempio 1.

Definizione 24. Ponendo

$$ch^{E/\$}(\Omega^{E/\$}) = \text{Str}^{E/\$} \left(\exp \left(\frac{i}{2\pi} \Omega^{E/\$} \right) \right),$$

definiamo

$$Ch^{E/\$}(E) = \left[ch^{E/\$}(\Omega^{E/\$}) \right] \in H_{dR}^*(M, \mathbb{C}).$$

Teorema 14 (Atiyah–Singer per operatori di Dirac generalizzati).

$$\text{ind}(\mathcal{D}^+) := \dim \text{Ker } \mathcal{D}^+ - \dim \text{Ker } \mathcal{D}^- = \int_M \hat{A}(M) Ch^{E/\$}(E).$$

Per i 3 esempi considerati nella lezione 7 si può dimostrare con argomenti di algebra lineare (ma non è proprio banale) che l'integrale a destra si specializza agli integrali che compaiono a destra negli enunciati dei 3 teoremi.

12. **Lezione 12.** NOTE A CURA DEL DOCENTE.

12.1. **Laplaciano associato ad una connessione.**

Sia (M, g) una varietà riemanniana compatta senza bordo. Consideriamo un operatore di Dirac \mathcal{D} su un fibrato di Dirac $E \rightarrow M$ di rango k . Abbiamo già visto che se $(x, \xi) \in T_x^*M$ allora il simbolo principale di \mathcal{D}^2 è dato da

$$\sigma_2(\mathcal{D}^2)(x, \xi) = \|\xi\|^2 \text{Id}_{E_x}$$

dove $\|\xi\|^2 = g_x(\xi, \xi)$. In coordinate locali questo vuol dire che

$$\mathcal{D}^2 = -\left(\sum g^{ij} \partial_i \partial_j\right) I_k + \text{termini di grado 1 e grado 0}$$

dove abbiamo denotato con I_k la matrice unità $k \times k$. Dimostreremo ora una formula molto precisa per \mathcal{D}^2 .

Ricordiamo che $\mathcal{D} = c \circ \nabla^E$ con $c : \mathcal{C}^\infty(M, T^*M \otimes E) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M, E)$ un'azione di Clifford unitaria e $\nabla^E : \mathcal{C}^\infty(M, E) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M, T^*M \otimes E)$ una connessione di Clifford hermitiana. Il fibrato $T^*M \otimes E$ ha una metrica naturale data dalla formula:

$$\langle \phi \otimes s, \phi' \otimes s' \rangle_{T^*M \otimes E} = \langle \phi, \phi' \rangle_{T^*M} \langle s, s' \rangle_E$$

Questa metrica induce, per integrazione su M , un prodotto scalare L^2 su $\mathcal{C}^\infty(M, T^*M \otimes E)$. Ha quindi senso considerare l'aggiunto formale di $\nabla^E \equiv \nabla$:

$$\nabla^* : \mathcal{C}^\infty(M, T^*M \otimes E) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M, E).$$

L'operatore

$$\nabla^* \nabla : \mathcal{C}^\infty(M, E) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M, E)$$

è detto *Laplaciano associato alla connessione* ∇ .

12.2. **Formula di Weitzenbock/Bochner/Lichnerowicz.**

Sia ora $\Omega^E \in \mathcal{C}^\infty(M, \Lambda^2 T^*M \otimes \text{End}(E))$ la curvatura di ∇ . Fissiamo una base ortonormale locale $\{e_j\}$ con base duale $\{e^j\}$. A partire dalla curvatura possiamo definire $\Omega_c^E \in \mathcal{C}^\infty(M, \text{End}(E))$:

$$\Omega_c^E(s) = \frac{1}{2} \sum_{j,k} c(e^j) c(e^k) \Omega^E(e_j, e_k) s$$

La definizione è ben posta, indipendente dalla scelta di base ortonormale.

Teorema 15. (Weitzenbock/Bochner/Lichnerowicz) Per un operatore di Dirac \mathcal{D} su un fibrato di Clifford vale la formula:

$$(47) \quad \mathcal{D}^2 = \nabla^* \nabla + \Omega_c^E$$

Per dimostrare la formula abbiamo bisogno di due Lemmi. Ricordo che se X è un campo di vettori su (M, g) , $X \in \mathcal{C}^\infty(M, TM)$, allora la sua *divergenza* è la funzione $\text{div}(X)$ definita dall'identità

$$-\text{div}(X) \text{dvol} = d(i(X) \text{dvol}).$$

Lemma 4. Fissiamo una base ortonormale locale $\{e_j\}$ con base duale $\{e^j\}$. Vale la formula:

$$(48) \quad \nabla_{e_i}^* = -\nabla_{e_i} + \text{div}(e_i)$$

Dimostrazione. $\forall s \in C^\infty(M, E)$ si ha $(s, \nabla_{e_i}^* s') = (\nabla_{e_i} s, s')$; utilizzando la compatibilità di ∇ con la metrica di E abbiamo l'uguaglianza con

$$(49) \quad - \int_M \langle s, \nabla_{e_i} s' \rangle \, \text{dvol} + \int_M e_i \langle s, s' \rangle \, \text{dvol}$$

Sia L_X la derivata di Lie rispetto ad un campo di vettori X ; è ben nota la formula $L_X = d \circ i(X) + i(X) \circ d$ per la quale rimandiamo, ad esempio, a libro di Warner *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups*. Utilizzando la proprietà di derivazione di L_{e_i} e la formula appena scritta possiamo eguagliare l'ultimo membro di (49) a

$$(s, -\nabla_{e_i} s') + \int d(i(e_i)(\langle s, s' \rangle \, \text{dvol})) + \int_M \langle s, s' \rangle \, \text{div}(e_i) \, \text{dvol}$$

da cui segue il Lemma per il teorema di Stokes.

Lemma 5. *Vale la seguente formula:*

$$(50) \quad \nabla^* \nabla s = \sum \nabla_{e_j}^* \nabla_{e_j} s = - \sum (\nabla_{e_j}^2 - \text{div}(e_j) \nabla_{e_j}) s$$

Dimostrazione. La seconda formula segue dal Lemma precedente. Sia $s \in C^\infty(M, E)$; localmente $\nabla s = \sum e^j \otimes \nabla_{e_j} s$. Si ha $\forall s' \in C^\infty(M, E)$:

$$\begin{aligned} (\nabla^*(e^j \otimes s), s')_E &= (e^j \otimes s, \nabla s')_{T^*M \otimes E} = \\ &= (e^j \otimes s, \sum e^i \otimes \nabla_{e_i} s')_{T^*M \otimes E} = (s, \nabla_{e_j} s')_E = (\nabla_{e_j}^* s, s')_E \end{aligned}$$

e quindi $\nabla^*(e^j \otimes s) = \nabla_{e_j}^* s$. Abbiamo, infine,

$$\nabla^* \nabla s = \nabla^* (\sum e^j \otimes \nabla_{e_j} s) = \sum \nabla_{e_j}^* \nabla_{e_j} s$$

ed il Lemma è dimostrato.

Dimostrazione del Teorema. Scegliamo una base locale $\{e_j\}$ tale che in $m \in M$ si abbia $\nabla_{e_j} e_i = 0$. Si ha allora, in m , $[e_i, e_j] = 0$, $\text{div}(e_j) = 0$. Allora, in m , si ha

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^2 s &= \sum_{i,j} c(e^i) \nabla_{e_i} (c(e^j) \nabla_{e_j} s) = \\ &= \sum_{i,j} c(e^i) c(\nabla_{e_i} e^j) \nabla_{e_j} s + \sum_{i,j} c(e^i) c(e^j) \nabla_{e_i} \nabla_{e_j} s = \\ &= 0 - \sum_i \nabla_{e_i} \nabla_{e_j} s + \sum_{i < j} c(e^i) c(e^j) (\nabla_{e_i} \nabla_{e_j} - \nabla_{e_j} \nabla_{e_i}) s = \\ &= \nabla^* \nabla s + \Omega_c^E s. \end{aligned}$$

Nella seconda uguaglianza si è usata l'ipotesi che la connessione sia di Clifford.

12.3. Curvatura scalare positiva.

Vediamo come sia possibile in alcuni casi dare una formula precisa per Ω_c^E . L' esempio forse più famoso è dato dal fibrato degli spinori su una varietà M spin : $E = \mathbb{S} \rightarrow M$. In questo caso si ha

$$(51) \quad \Omega_c^{\mathbb{S}} = \frac{1}{4} (\text{curvatura scalare}) \equiv \frac{1}{4} r_M.$$

Si ricorda che la curvatura scalare r_M è per definizione:

$$r_M = \sum_{l,m} R_{lm}.$$

Otteniamo allora la **formula di Lichnerowicz**: per l'operatore di Atiyah-Singer su una varietà spin risulta

$$(52) \quad \mathcal{D}^2 = \nabla^* \nabla + \frac{1}{4} r_M$$

La (51), e quindi la formula di Lichnerowicz, si dimostra usando la formula esplicita per la connessione spin (Lezione 11)

$$\nabla_i^{\mathbb{S}} = \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{1}{4} \omega_{ij}^k c(e^j) c(e^k)$$

con ω_{ij}^k i coefficienti della connessione di Levi-Civita, e, inoltre, le simmetrie del tensore di curvatura di ∇^{LC} e le regole di anticommutazione nell'algebra di Clifford. Omettiamo i dettagli che sono di natura algebrica elementare.

Più in generale se

$$(53) \quad E = \mathbb{S} \otimes W \quad \text{allora} \quad \Omega_c^E = \frac{1}{4} r_M + \Omega_c^W$$

e otteniamo quindi la **formula di Lichnerowicz** per l'operatore di Atiyah-Singer su una varietà spin **a valori in un fibrato** W

$$(54) \quad \mathcal{D}^2 = \nabla^* \nabla + \frac{1}{4} r_M + \sum_{i < j} c(e^i) c(e^j) \Omega^W(e_i, e_j).$$

In generale, abbiamo il seguente immediato ma fondamentale corollario della formula di Bochner/Weitzenbock/Li

Corollario 5. *Se $\forall m, \Omega_c^E$ ha autovalori strettamente positivi allora non ci sono soluzioni non banali dell'equazione $\mathcal{D}^2 s = 0$.*

Dimostrazione del Corollario. Esiste $c > 0$ tale che $(\Omega_c^E s, s) \geq c \|s\|^2$ per ogni s . D'altra parte $(\nabla^* \nabla s, s) = (\nabla s, \nabla s) \geq 0$. Quindi se

$$\mathcal{D}^2 s = 0 \Rightarrow (\Omega_c^E s, s) = -\|\nabla s\|^2 + \langle D^2 s, s \rangle \leq 0.$$

Ne segue che necessariamente $s = 0$ ed il corollario è dimostrato.

Ci sono alcune conseguenze fondamentali di questo corollario. Una verrà presentata dopo il Teorema di Hodge (Lezione 14); l'altra, sulle varietà spin, possiamo vederla subito.

Dal corollario (5) e dalla formula di Lichnerowicz segue che se (M, g) è spin e se $g(\cdot, \cdot)$ ha curvatura scalare positiva allora $\text{Ker } \mathcal{D}^2 = 0$; dato che \mathcal{D} è simmetrico ciò implica immediatamente che $\text{Ker } \mathcal{D} = 0$. In particolare $\text{ind}(\mathcal{D}^+) = 0$.

Importante applicazione della formula di Atiyah-Singer su varietà spin (Lezione 11) e della formula di Lichnerowicz (52) è quindi il seguente :

Corollario 6. *Se M è una varietà spin di dim $4K$ e se*

$$\int_M [\widehat{A}(TM)] \neq 0$$

allora M non ammette una metrica con curvatura scalare positiva.

L'interesse di questo corollario è nella condizione

$$\widehat{A}(M) := \int_M [\widehat{A}(TM)] \neq 0$$

che è di natura *topologica*. In parole: abbiamo trovato una *ostruzione topologica* all'esistenza di metriche con curvatura scalare positiva.

Ad esempio (vedi Lezione 11) se $d \in 2\mathbb{Z}$ allora $V^{2k}(d) \subset \mathbb{C}P^{2k+1}$, con $d > 2k$, ipersuperficie di grado d , è una varietà spin di dimensione $4k$; si può dimostrare che $\widehat{A}(V^{2k}(d)) \neq 0$ e quindi questa varietà *non ammette* una metrica con curvatura scalare positiva.

12.4. Spazi di Sobolev.

Consideriamo un fibrato vettoriale E complesso su M . Fissiamo una metrica su E e una connessione $\nabla^E \equiv \nabla$. Consideriamo:

$$\|s\|_k^2 = \sum_{j \leq k} \int_M \|\nabla^j s\|^2 d\text{vol}_M$$

dove

$$(55) \quad \begin{aligned} \|\nabla^0 s\|^2 &= \langle s, s \rangle_E \\ \|\nabla^1 s\|^2 &= \langle \nabla^E s, \nabla^E s \rangle_{T^*M \otimes E} \\ \|\nabla^2 s\|^2 &= \langle \nabla^{T^*M \otimes E} \nabla^E s, \nabla^{T^*M \otimes E} \nabla^E s \rangle_{T^*M \otimes T^*M \otimes E} \\ &\text{etc...} \end{aligned}$$

Si noti che questa norma è associata ad un ovvio prodotto scalare:

$$\|s\|_k^2 = \langle s, s \rangle_k.$$

Definiamo gli spazi di Sobolev: $H_k(M, E)$ è il completamento di $C^\infty(M, E)$ nella norma $\|\cdot\|_k$. $H_0(M, E) = L^2(M, E)$ per definizione. $H_k(M, E)$ è quindi uno spazio di Hilbert. Gli spazi di Sobolev sono uno strumento fondamentale nello studio delle proprietà analitiche degli operatori differenziali. I seguenti tre risultati sono fondamentali. Nell'enunciato è sottinteso che le immersioni sono tutte continue:

Teorema 16. *Sia $n = \dim M$.*

1. $C^k(M, E) \hookrightarrow H_k(M, E)$, $\forall k \geq 0$.
2. [Immersione di Sobolev] *Se $s > \frac{n}{2} + k \Rightarrow H_s(M, E) \hookrightarrow C^k(M, E)$.*
3. [Lemma di Rellich] *Se $s > s' \Rightarrow H_s(M, E) \hookrightarrow H_{s'}(M, E)$ e l'immersione è un operatore compatto.*

Idea della Dimostrazione. Con una partizione dell'unità ci si riduce al caso di $M = T^n$, $T^n = \mathbb{R}^n \setminus (2\pi\mathbb{Z})^n$, e fibrato E banale. Per capire questo punto occorre ragionare sui coefficienti delle metriche e delle connessioni coinvolte nella definizione di norma di Sobolev. I dettagli sono elementari ma un pò lunghi e li omettiamo. Si vede quindi che $H_k(T^n)$ è il completamento di $C^\infty(T^n)$ rispetto alla norma

$$\|f\|_k^2 = \sum_{|\alpha| \leq k} \int_{T^n} |D^\alpha f|^2 dx$$

dove $D^\alpha = \left(\frac{1}{\sqrt{-i}} \frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \dots \left(\frac{1}{\sqrt{-i}} \frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n}$.

Il modo migliore per studiare $H_k(T^n)$ è tramite le serie di Fourier. Ricordiamo che la serie di Fourier di $f \in C^\infty(T^n)$ è

$$f(x) = \sum a_\nu e^{i\nu \cdot x}$$

con

$$a_\nu = \hat{f}(\nu) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{T^n} f(x) e^{-i\nu \cdot x} dx \equiv \int_{T^n} f(x) e^{-i\nu \cdot x} \widetilde{dx}.$$

La serie di Fourier di f converge uniformemente ad f con tutte le derivate. I coefficienti $\hat{f}(\nu)$ sono rapidamente decrescenti in ν . Inoltre dal fatto che le funzioni

$$\phi_\nu : x \rightarrow \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}} e^{i\nu \cdot x}$$

costituiscono una base ortonormale di $L^2(T^n)$ segue l'identità di Parseval:

$$\int_{T^n} |f|^2 \widetilde{dx} = \sum_\nu |\hat{f}(\nu)|^2.$$

Possiamo allora scrivere:

$$\int_{T^n} |D^\alpha f|^2 \widetilde{dx} = \sum_\nu |\widehat{D^\alpha f}(\nu)|^2.$$

Siccome

$$\begin{aligned} \widehat{D^\alpha f}(\nu) &= \int_{T^n} D^\alpha f e^{-i\nu \cdot x} \widetilde{dx} = \\ &= \int_{T^n} \nu^\alpha f e^{-i\nu \cdot x} \widetilde{dx} = \nu^\alpha \hat{f}(\nu) \end{aligned}$$

abbiamo in definitiva

$$\begin{aligned} \sum_{|\alpha| \leq k} \int_{T^n} |D^\alpha f|^2 \widetilde{dx} &= \sum_{|\alpha| \leq k} \sum_\nu |\nu^\alpha|^2 |\hat{f}(\nu)|^2 = \\ &= \sum_\nu \left(\sum_{|\alpha| \leq k} |\nu^\alpha|^2 \right) |\hat{f}(\nu)|^2. \end{aligned}$$

Osserviamo ora che $\forall k \geq 0$ esiste C_k tale che

$$\sum_{|\alpha| \leq k} |\nu^\alpha|^2 \leq (1 + |\nu|^2)^k \leq C_k \left(\sum_{|\alpha| \leq k} |\nu^\alpha|^2 \right).$$

Ma allora $\|\cdot\|_k$ è equivalente alla norma

$$\|f\|_k^2 = \sum_\nu (1 + |\nu|^2)^k |\hat{f}(\nu)|^2;$$

che è associata a sua volta al prodotto scalare:

$$\langle f, g \rangle_k = \sum_\nu (1 + |\nu|^2)^k \hat{f}(\nu) \overline{\hat{g}(\nu)}$$

I tre risultati sono stati ora tradotti nel linguaggio delle serie di Fourier e la loro dimostrazione segue dalle proprietà di queste ultime. Per i dettagli vi rimando, ad esempio, a Griffiths-Harris *Principles of Algebraic Geometry* oppure al libro di Roe *Elliptic operators, topology and asymptotic methods*.

13. Lezione 13. NOTE A CURA DI GERARDO MORSELLA.

13.1. Disuguaglianza di Gårding.

Sia M una varietà compatta e senza bordo, e si fissi su di essa una metrica riemanniana $\langle \cdot, \cdot \rangle^{TM}$; indichiamo con $\langle \cdot, \cdot \rangle^{T^*M}$ la metrica da questa indotta su T^*M . Sia poi E un fibrato di $\text{Cl}(M)$ -moduli unitari di rango k , con metrica $\langle \cdot, \cdot \rangle^E$, e sia ∇^E una connessione di Clifford su E . Ricordiamo che per ogni intero non negativo r , l' r -esimo spazio di Sobolev di sezioni di E , $H_r(M, E)$, è definito come il completamento di $C^\infty(M, E)$ nella norma

$$(56) \quad \|s\|_r^2 := \sum_{j=0}^r \int_M \langle \nabla^j s, \nabla^j s \rangle d\text{vol},$$

dove $\nabla^0 s := s$, $\nabla^1 s := \nabla^E s$, $\nabla^2 s := \nabla^{T^*M \otimes E} \nabla^E s$ e così via, e dove le parentesi angolari all'interno dell'integrale indicano la metrica naturale su $T^*M^{\otimes j} \otimes E$ indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle^{T^*M}$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle^E$. Per brevità, e quando ciò non generi confusione, porremo $H_r := H_r(M, E)$ ed $H := H_0 = L^2(M, E)$. Come si verifica facilmente, ogni H_r è uno spazio di Hilbert con il prodotto scalare $(\cdot | \cdot)_r$ definito a partire dalla (56) per polarizzazione e densità. Porremo anche $(\cdot | \cdot) = (\cdot | \cdot)_0$.

Sia \mathcal{D} l'operatore definito da ∇^E e dall'azione c di $\text{Cl}(M)$ su E ; allora, per quanto visto nelle lezioni precedenti, \mathcal{D} è un operatore densamente definito e simmetrico sullo spazio di Hilbert H . Inoltre, come già osservato, si può pensare c come una sezione del fibrato $\text{Hom}(T^*M \otimes E, E)$, e se allora $\|\cdot\|_m$ indica la norma operatoriale su $\text{Hom}(T_m^*M \otimes E_m, E_m)$, si vede facilmente che, per la compattezza di M , la quantità $\|c(m)\|_m$ è limitata: infatti, localmente $c(m)$ è una matrice i cui elementi dipendono in maniera C^∞ da m , e la norma $\|\cdot\|_m$ è maggiorata da una norma indipendente da m . Indicando allora con a il massimo di tale quantità si ottiene, per ogni sezione $s \in C^\infty(M, E)$,

$$(57) \quad \|\mathcal{D}s\|_0^2 = \int_M \langle c(\nabla^E s), c(\nabla^E s) \rangle d\text{vol} \leq a^2 \int_M \langle \nabla^E s, \nabla^E s \rangle d\text{vol} \leq a^2 \|s\|_1^2.$$

Vale poi una disuguaglianza che è, essenzialmente, l'inversa di questa.

Teorema 17 (Gårding). *Esiste una costante $C_0 > 0$ tale che, per ogni $s \in C^\infty(M, E)$, sia*

$$\|s\|_1 \leq C_0 (\|\mathcal{D}s\|_0 + \|s\|_0).$$

Proof. Ricordiamo la formula di Bochner-Weitzenbrock-Lichnerowitz:

$$\mathcal{D}^2 = \nabla^* \nabla + \Omega_c^E,$$

dove ∇^* denota l'aggiunto formale di $\nabla = \nabla^E$, e dove, se $\{e_i\}$ è una base locale di TM , ed $\{e^i\}$ è la relativa base duale,

$$\Omega_c^E(s) = \frac{1}{2} \sum_{i,j} c(e^i) c(e^j) \Omega^E(e_i, e_j) s.$$

Si ha allora, per la simmetria di \mathcal{D} (e indicando con $\|\cdot\|_0$ anche la norma di $H_0(M, T^*M \otimes E)$),

$$\|\mathcal{D}s\|_0^2 = (\mathcal{D}^2 s | s) = \|\nabla s\|_0^2 + (\Omega_c^E s | s),$$

da cui, essendo $\Omega_c^E \in C^\infty(M, \text{End}(E))$ limitato, come operatore su H , per la compattezza di M (con argomento identico a quello usato sopra per c),

$$\|\nabla s\|_0^2 \leq \|\mathcal{D}s\|_0^2 + |(\Omega_c^E s | s)| \leq C (\|\mathcal{D}s\|_0^2 + \|s\|_0^2),$$

con $C > 0$ costante opportuna. Essendo allora $\|\nabla s\|_0^2 = \|s\|_1^2 - \|s\|_0^2$, si ha

$$\|s\|_1 \leq (C \|\mathcal{D}s\|_0^2 + (C+1) \|s\|_0^2)^{1/2} \leq C_0 (\|\mathcal{D}s\|_0 + \|s\|_0),$$

avendo usato $\sqrt{a^2 + b^2} \leq a + b$, $a, b > 0$, ed avendo posto $C_0 := \sqrt{C + 1}$. \square

Più in generale, vale il risultato seguente, di cui omettiamo la dimostrazione.

Teorema 18. *Per ogni intero non negativo r , esiste una costante $C_r > 0$ tale che, per ogni $s \in C^\infty(M, E)$, sia*

$$(58) \quad \|s\|_{r+1} \leq C_r(\|\mathcal{D}s\|_r + \|s\|_r).$$

Queste disequaglianze permettono, come vedremo, di estendere \mathcal{D} ad un dominio più grande, ottenendo così un operatore autoaggiunto.

13.2. Soluzioni deboli.

Definizione 25. *Il grafico di \mathcal{D} è il sottospazio di $H \oplus H$*

$$G := \{(s, \mathcal{D}s) : s \in C^\infty(M, E)\}.$$

Naturalmente, tale definizione si può ripetere per ogni operatore densamente definito su uno spazio di Hilbert H , sostituendo a $C^\infty(M, E)$ il dominio dell'operatore considerato. Il lemma seguente afferma che \mathcal{D} è un operatore *chiudibile*.

Lemma 6. *Sia \overline{G} la chiusura di G nella norma di $H \oplus H$. Allora \overline{G} è ancora il grafico di un operatore densamente definito su H .*

Proof. \overline{G} è ancora un sottospazio di $H \oplus H$, e quindi, per linearità, basta verificare che se $(0, y) \in \overline{G}$, allora $y = 0$. Sia allora $(x_j)_{j \in \mathbb{N}} \subseteq C^\infty(M, E)$ una successione tale che $(x_j, \mathcal{D}x_j)$ converga a $(0, y)$ in $H \oplus H$, cioè $x_j \rightarrow 0$ e $\mathcal{D}x_j \rightarrow y$ in $L^2(M, E)$; allora, dalla simmetria di \mathcal{D} segue, per ogni $s \in C^\infty(M, E)$,

$$(y|s) = \lim_{j \rightarrow +\infty} (\mathcal{D}x_j|s) = \lim_{j \rightarrow +\infty} (x_j|\mathcal{D}s) = 0,$$

da cui $y = 0$. \square

Osservazione Nella dimostrazione precedente, non si è mai usato il fatto che \mathcal{D} è un operatore di Dirac, e pertanto la si può ripetere, mutatis mutandi, per ogni operatore simmetrico e densamente definito su uno spazio di Hilbert.

L'operatore di cui \overline{G} è il grafico è detto *chiusura* di \mathcal{D} , e verrà indicato con $\overline{\mathcal{D}}$. Il suo dominio è per definizione il sottospazio $\text{Dom}(\overline{\mathcal{D}})$ di H degli $x \in H$ per cui esiste $y \in H$ tale che $(x, y) \in \overline{G}$, cioè

$$\text{Dom}(\overline{\mathcal{D}}) = \{x \in H : \exists (x_j)_{j \in \mathbb{N}} \subseteq C^\infty(M, E), y \in H \text{ per cui } x_j \rightarrow x, \mathcal{D}x_j \rightarrow y\},$$

e se $(x, y) \in \overline{G}$, si pone $\overline{\mathcal{D}}x := y$.

Dalle disequaglianze dimostrate sopra si ottiene allora $\text{Dom}(\overline{\mathcal{D}}) = H_1$: se $x \in H_1$ e $x_j \rightarrow x$, in H_1 , $x_j \in C^\infty$, allora dalla (57) segue che $(\mathcal{D}x_j)_{j \in \mathbb{N}}$ è convergente in H , e pertanto $x \in \text{Dom}(\overline{\mathcal{D}})$, viceversa se $(x, y) \in \overline{G}$ e $(x_j, \mathcal{D}x_j) \rightarrow (x, y)$ in $H \oplus H$, $x_j \in C^\infty$, dal teorema di Gårding segue che $(x_j)_{j \in \mathbb{N}}$ è di Cauchy in H_1 , e quindi converge, in H_1 , ad una \tilde{x} , ma poiché $\|\cdot\|_1$ è più forte di $\|\cdot\|_0$, $x = \tilde{x} \in H_1$. È poi chiaro che $\overline{\mathcal{D}}$ è anch'esso simmetrico.

Siano $x, y \in C^\infty$, con $\mathcal{D}x = y$, allora, per ogni $s \in C^\infty$,

$$(x|\mathcal{D}s) = (\mathcal{D}x|s) = (y|s),$$

ma ha senso considerare l'eguaglianza tra il primo e l'ultimo membro per arbitrari $x, y \in H$. Questo conduce alla nozione di soluzione debole per l'equazione $\mathcal{D}x = y$.

Definizione 26. Siano $x, y \in L^2(M, E)$. Diremo che $\mathcal{D}x = y$ debolmente, se, per ogni $s \in C^\infty(M, E)$, vale $(x|\mathcal{D}s) = (y|s)$.

In realtà, ogni soluzione debole è una soluzione forte per l'equazione associata alla chiusura di \mathcal{D} .

Teorema 19. Siano $x, y \in L^2(M, E)$ tali che $\mathcal{D}x = y$ debolmente. Allora $x \in \text{Dom}(\overline{\mathcal{D}})$ e $\overline{\mathcal{D}}x = y$.

Prima di dare la dimostrazione di questo teorema, abbiamo bisogno di alcune definizioni e risultati riguardanti la regolarizzazione di operatori di Dirac.

Se E_1, E_2 sono fibrati vettoriali su M , e si indicano con $p_i : M \times M \rightarrow M$, $i = 1, 2$, le proiezioni canoniche, si può considerare il fibrato $\text{HOM}(E_1, E_2) := p_1^*(E_2) \otimes p_2^*(E_1^*)$, la cui fibra su (m_1, m_2) è $\text{HOM}(E_1, E_2)_{(m_1, m_2)} = (E_2)_{m_1} \otimes (E_1^*)_{m_2} \simeq \text{Hom}((E_1)_{m_2}, (E_2)_{m_1})$.

Definizione 27. Siano E_i , $i = 1, 2$, fibrati vettoriali su M . Un operatore limitato $F : L^2(M, E_1) \rightarrow L^2(M, E_2)$ è detto regolarizzante se esiste $K_F \in C^\infty(M \times M, \text{HOM}(E_1, E_2))$ tale che, per ogni $s \in L^2(M, E_1)$,

$$(Fs)(m_2) = \int_M K_F(m_2, m_1)s(m_1)d \text{vol}(m_1).$$

Osserviamo che se $E_1 = E_2 = E$, e se $K_F(m_2, m_1)^* = K_F(m_1, m_2)$ (aggiunto fatto rispetto ai prodotti scalari $\langle \cdot, \cdot \rangle_{m_1}^E$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle_{m_2}^E$, su E_{m_1}, E_{m_2} , rispettivamente), allora F_ε è un operatore autoaggiunto su $L^2(M, E)$.

13.3. Mollificatori di Friedrichs. Debole=Forte.

Definizione 28. Un mollificatore di Friedrichs per \mathcal{D} è una famiglia $(F_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ di operatori regolarizzanti su $L^2(M, E)$ tali che:

- i. $(F_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ è uniformemente limitata in norma: $\sup_{\varepsilon>0} \|F_\varepsilon\| < +\infty$;
- ii. $([\mathcal{D}, F_\varepsilon])_{\varepsilon>0}$ si estende ad una famiglia uniformemente limitata di operatori, come in (i);
- iii. per $\varepsilon \rightarrow 0$, F_ε converge debolmente all'identità su $L^2(M, E)$, cioè per ogni $x, y \in L^2(M, E)$, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (x|F_\varepsilon y) = (x|y)$ (in simboli $F_\varepsilon \rightharpoonup \mathbb{I}$).

Notiamo che, poiché chiaramente sia F_ε , che \mathcal{D} , mandano sezioni C^∞ in sezioni C^∞ , il commutatore $[\mathcal{D}, F_\varepsilon]$ è inizialmente definito sul sottospazio denso $C^\infty(M, E)$ di H .

Lemma 7. Esistono sempre mollificatori di Friedrichs autoaggiunti per \mathcal{D} .

Proof. La omettiamo. Ci limitiamo a dare la definizione di F_ε . Usando partizioni dell'unità, ci si riconduce a definire F_ε sulle sezioni a supporto compatto contenuto in una banalizzazione locale per E , e quindi basta definire F_ε sulle funzioni $s \in L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^k)$. Sia allora $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ non negativa, radialmente simmetrica (cioè funzione di $|x|$), a supporto contenuto nella palla di raggio 1 centrata nell'origine, e tale che $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi = 1$, e si definisca $\varphi_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-n} \varphi(\varepsilon^{-1}x)$, $x \in \mathbb{R}^n$. Allora

$$F_\varepsilon s(x) := \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(x - y)s(y)dy,$$

per ogni $s \in L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^k)$. Passando in trasformata di Fourier, si verificano facilmente le (i) e (iii) della definizione 28, mentre la verifica della (ii) è più complicata e non la facciamo. L'autoaggiuntezza è conseguenza del fatto che φ è reale e $\varphi(-x) = \varphi(x)$. \square

Dimostrazione del teorema 19. Sia $(F_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ un mollificatore di Friedrichs per \mathcal{D} , e si ponga $x_\varepsilon := F_\varepsilon x \in C^\infty(M, E)$, con $x \in H$ tale che $\mathcal{D}x = y$ debolmente. Usando allora l'autoaggiuntezza di F_ε , si ha, per ogni $s \in C^\infty$,

$$\begin{aligned} (\mathcal{D}x_\varepsilon | s) &= (x_\varepsilon | \mathcal{D}s) = (F_\varepsilon x | \mathcal{D}s) \\ &= (x | F_\varepsilon \mathcal{D}s) \\ &= (x | \mathcal{D}F_\varepsilon s) + (x | [F_\varepsilon, \mathcal{D}]s) \\ &= (y | F_\varepsilon s) + (x | [F_\varepsilon, \mathcal{D}]s), \end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio si è tenuto conto del fatto che $F_\varepsilon s \in C^\infty$. Dunque, per la limitatezza di F_ε e $[F_\varepsilon, \mathcal{D}]$, esisterà una costante $A > 0$ tale che $|(\mathcal{D}x_\varepsilon | s)| \leq A\|s\|$ per ogni $s \in C^\infty$, ed ogni $\varepsilon > 0$, cioè $\|\mathcal{D}x_\varepsilon\| \leq A$, $\varepsilon > 0$. Pertanto sia $(\mathcal{D}x_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$, che $(x_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$, sono successioni (generalizzate) limitate in H , da cui, insieme alla disuguaglianza di Gårding, segue che $(x_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ è limitata in H_1 , e quindi, a meno di sottosuccessioni, converge debolmente ad un $\tilde{x} \in H_1$ (gli insiemi limitati in uno spazio di Hilbert sono debolmente precompatti). Poiché poi, l'immersione di H_1 in H_0 è compatta (lemma di Rellich, visto nella lezione precedente), $x_\varepsilon \rightarrow \tilde{x}$ in norma in H_0 , ed allora, da $F_\varepsilon \rightarrow \mathbb{I}$, segue $x = \tilde{x} \in H_1 = \text{Dom}(\overline{\mathcal{D}})$. Ma essendo allora $\overline{\mathcal{D}}$ simmetrico, si ha $(y | s) = (x | \mathcal{D}s) = (\overline{\mathcal{D}}x | s)$, per ogni $s \in C^\infty$, cioè $\overline{\mathcal{D}}x = y$. \square

13.4. Proprietà spettrali degli operatori di Dirac.

Come corollario del precedente teorema abbiamo il seguente importante risultato, dovuto a Chernoff,:

Corollario 7. \mathcal{D} è essenzialmente autoaggiunto su $C^\infty(M, E)$.

Proof. Dalle definizioni segue immediatamente che $\mathcal{D}x = y$ debolmente se e soltanto se $x \in \text{Dom}(\overline{\mathcal{D}}^*)$ e $\overline{\mathcal{D}}^*x = y$, dunque quanto appena visto implica che $\text{Dom}(\overline{\mathcal{D}}^*) \subseteq \text{Dom}(\overline{\mathcal{D}})$, ma poiché, per la simmetria di $\overline{\mathcal{D}}$, vale anche l'inclusione opposta, e che $\overline{\mathcal{D}}^*$ estende $\overline{\mathcal{D}}$, ne segue $\overline{\mathcal{D}}^* = \overline{\mathcal{D}}$. \square

Questo risultato vale più in generale se M è una varietà completa. Vale inoltre il seguente risultato di regolarità per le soluzioni di $\overline{\mathcal{D}}x = y$, di cui omettiamo la dimostrazione.

Teorema 20. Per ogni intero $r \geq 1$, e per ogni $x \in H_r(M, E)$, se $\overline{\mathcal{D}}x \in H_r(M, E)$, allora $x \in H_{r+1}(M, E)$.

Proposizione 24. Vale la decomposizione in somma diretta $H \oplus H = \overline{G} \oplus J\overline{G}$, dove J è l'operatore limitato su $H \oplus H$ definito da $J(x, y) := (y, -x)$.

Proof. Poiché evidentemente $\overline{G}^\perp = G^\perp$, basta dimostrare che $G^\perp = J\overline{G}$. Indichiamo con $(\cdot) \bullet (\cdot)$ il prodotto scalare in $H \oplus H$. Sia $(x, y) \in \overline{G}$ con $x_j \rightarrow x$, $\mathcal{D}x_j \rightarrow y$, $x_j \in C^\infty$, allora, per ogni $s \in C^\infty$,

$$J(x_j, \mathcal{D}x_j) \bullet (s, \mathcal{D}s) = (\mathcal{D}x_j, -x_j) \bullet (s, \mathcal{D}s) = (\mathcal{D}x_j | x) - (x_j | \mathcal{D}s) = 0,$$

e quindi $J\overline{G} \subseteq G^\perp$. Viceversa, sia $(x, y) \in G^\perp$, allora, sempre per ogni $s \in C^\infty$,

$$0 = (x, y) \bullet (s, \mathcal{D}s) = (x | s) + (y | \mathcal{D}s),$$

cioè $\mathcal{D}(-y) = x$ debolmente, e quindi $-y \in H_1$ e $(-y, x) = (-y, \overline{\mathcal{D}}(-y)) \in \overline{G}$, e $(x, y) = J(-y, x) \in J\overline{G}$. \square

Anche quest'ultimo risultato dipende in realtà soltanto dal fatto che $\overline{\mathcal{D}}$ è un operatore autoaggiunto.

Siamo ora nella posizione di enunciare e dimostrare un importante teorema riguardante le proprietà spettrali dell'operatore autoaggiunto $\overline{\mathcal{D}}$.

Teorema 21. *Esiste una successione $(\lambda_j)_{j \in \mathbb{Z}} \subseteq \mathbb{R}$, ed una decomposizione in somma diretta $L^2(M, E) = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} K_{\lambda_j}$, tali che*

- i. $K_{\lambda_j} \subseteq C^\infty(M, E)$;
- ii. $\dim K_{\lambda_j} < \infty$;
- iii. $\lambda_{-j} = -\lambda_j$ e $|\lambda_j| \rightarrow +\infty$ per $j \rightarrow \pm\infty$;
- iv. $\overline{\mathcal{D}}|_{K_{\lambda_j}}$ è la moltiplicazione per λ_j .

Proof. Sia $x \in H$ e si consideri la decomposizione di $(x, 0) \in H \oplus H$ in base alla proposizione precedente:

$$(59) \quad (x, 0) = (Qx, \overline{\mathcal{D}}Qx) + (\overline{\mathcal{D}}y, -y),$$

con $Qx, y := Px \in H$ vettori opportuni; questo definisce $Q, P : H \rightarrow H$ come composizioni di due proiettori di $H \oplus H$ (ad esempio Q è composizione del proiettore su \overline{G} e quello sul primo addendo della somma $H \oplus H$). Dunque Q e P sono limitati e con norma maggiorata da 1. Inoltre è chiaro che $\text{Im } Q, \text{Im } P \subseteq H_1$. Si ha allora, dalla (59), $\overline{\mathcal{D}}Qx = y \in H_1$, e quindi, dal teorema 20, $Qx \in H_2$, ed applicando allora ripetutamente la disuguaglianza di Gårding, e la sua generalizzazione (58), che si estendono a $s \in H_{r+1}$, $r \geq 0$, si ha

$$\begin{aligned} \|Qx\|_2 &\leq C_1(\|y\|_1 + \|Qx\|_1) \\ &\leq C_1\|y\|_0 + C_0C_1(\|y\|_0 + \|Qx\|_0) \leq B\|x\|_0, \end{aligned}$$

con $B > 0$ costante opportuna, avendo usato nell'ultimo passaggio la limitatezza di P e Q . Dunque Q è un operatore limitato da H_0 in H_2 , ma poiché l'immersione di H_2 in H_0 è compatta, ne segue che $Q : H \rightarrow H$ è compatto. Inoltre, sempre dalla (59), segue

$$x = Qx + \overline{\mathcal{D}}y = Qx + \overline{\mathcal{D}}^2Qx = (\mathbb{I} + \overline{\mathcal{D}}^2)Qx,$$

cioè, poiché $\mathbb{I} + \overline{\mathcal{D}}^2$ è invertibile con inversa limitata, non avendo 0 nello spettro (essendo $\overline{\mathcal{D}}$ autoaggiunto, $\overline{\mathcal{D}}^2$ è positivo), $Q = (\mathbb{I} + \overline{\mathcal{D}}^2)^{-1}$ è autoaggiunto, positivo e con nucleo ridotto al solo vettore nullo. Applicando allora a Q il teorema spettrale per operatori compatti autoaggiunti, si ottiene una decomposizione in somma diretta $L^2(M, E) = \bigoplus_{j \in \mathbb{N}} M_{\varrho_j}$, con M_{ϱ_j} autospazio di Q relativo all'autovalore ϱ_j , $\dim M_{\varrho_j} < \infty$ e $0 < \varrho_j \leq 1$, $\varrho_j \rightarrow 0$; poiché inoltre $\text{Im } Q \subseteq H_2$, si ha $M_{\varrho_j} \subseteq H_2$. Se allora $\varphi \in H$ è tale che $Q\varphi = \varrho\varphi$, da $\varphi = (\mathbb{I} + \overline{\mathcal{D}}^2)Q\varphi = \varrho(\mathbb{I} + \overline{\mathcal{D}}^2)\varphi$, segue $\overline{\mathcal{D}}^2\varphi = (1 - \varrho)\varphi$, cioè M_{ϱ_j} è autospazio di $\overline{\mathcal{D}}^2$ relativo all'autovalore $(1 - \varrho_j)\varrho_j^{-1} > 0$. Si ponga allora, per j intero positivo, $\lambda_{\pm j} := \pm\sqrt{(1 - \varrho_j)\varrho_j^{-1}}$ e $K_{\lambda_{\pm j}} := (\lambda_j \pm \overline{\mathcal{D}})M_{\varrho_j} \subseteq H_1$: è chiaro che $K_{\lambda_{\pm j}}$ è autospazio di $\overline{\mathcal{D}}$ relativo all'autovalore $\lambda_{\pm j} = \pm\lambda_j$, che $M_{\varrho_j} = K_{\lambda_j} \oplus K_{\lambda_{-j}}$, e che $\lambda_j \rightarrow +\infty$. Si conclude allora osservando che da $\overline{\mathcal{D}}\psi = \lambda\psi$ segue induttivamente, usando il teorema 20, $\psi \in H_r$ per ogni r intero positivo, e quindi, per il teorema di immersione di Sobolev, $\psi \in C^\infty(M, E)$. \square

14. Lezione 14. NOTE A CURA DI GIORDANO GIORGI.

14.1. Calcolo funzionale.

Si denoti con $\sigma(\overline{\mathcal{D}}) = \{\lambda_j\} \subseteq \mathbb{R}$ lo spettro dell'operatore di Dirac $\overline{\mathcal{D}}$. Se f è una funzione limitata su $\sigma(\overline{\mathcal{D}})$ si può definire l'operatore $f(\overline{\mathcal{D}})$ come

$$f(\overline{\mathcal{D}}) := f(\lambda) \cdot v_\lambda \text{ con } v_\lambda \in K_\lambda$$

dove K_λ è l'autospazio relativo all'autovalore λ . Essendo f limitata $f(\overline{\mathcal{D}}) \in \mathcal{L}(L^2, L^2)$ ossia è limitato in L^2 .

Inoltre $[\overline{\mathcal{D}}, A] = 0$ implica $[f(\overline{\mathcal{D}}), A] = 0$ e $f(\overline{\mathcal{D}}) : C^\infty(M, E) \rightarrow C^\infty(M, E)$. Infatti sia $s \in C^\infty(M, E)$, allora $\overline{\mathcal{D}}^k s \in C^\infty(M, E) \subseteq L^2(M, E) \forall k \in \mathbb{N}$. Dunque $f(\overline{\mathcal{D}})\overline{\mathcal{D}}^k s \in L^2(M, E)$ e $\overline{\mathcal{D}}^k f(\overline{\mathcal{D}})s \in L^2(M, E)$ che dà $f(\overline{\mathcal{D}})s \in H_k \forall k \in \mathbb{N}$ ossia $f(\overline{\mathcal{D}})s \in C^l(M, E) \forall l \in \mathbb{N}$ e per il teorema sull'immersione di Sobolev $f(\overline{\mathcal{D}})s \in C^\infty(M, E)$. Tutto ciò verrà utilizzato per definire l'operatore $e^{-t\overline{\mathcal{D}}}$ con $f(\overline{\mathcal{D}}) = e^{-t\lambda^2}$.

14.2. Operatori di Fredholm.

Siano B_1 e B_2 due spazi di Banach e si indichi con $\mathcal{L}(B_1, B_2)$ lo spazio degli operatori lineari e limitati nella topologia indotta dalla norma $\|\cdot\|$.

$F \in \mathcal{L}(B_1, B_2)$ si dice di Fredholm se $\dim \text{Ker} F < \infty$ e $\dim \text{coKer} F < \infty$ e si indicherà con $\text{Fred}(B_1, B_2)$ l'insieme di tali operatori. Si definisce indice di un operatore di Fredholm:

$$\text{ind}(F) = \dim \text{Ker} F - \dim \text{coKer} F$$

Le proprietà di $\text{Fred}(B_1, B_2)$ sono illustrate dal Teorema che segue:

Teorema 22. *$\text{Fred}(B_1, B_2)$ è aperto in $\mathcal{L}(B_1, B_2)$ ed inoltre l'applicazione $\text{ind} : \text{Fred}(B_1, B_2) \rightarrow \mathbb{Z}$ è continua dunque localmente costante.*

Se K è un operatore compatto e F è di Fredholm, allora $F + K$ è di Fredholm e

$$\text{ind}(F + K) = \text{ind}(F)$$

14.3. Indice di un operatore di Dirac.

L'operatore di Dirac

$$\overline{\mathcal{D}} : H^1(M, E) \rightarrow L^2(M, E)$$

è un particolare operatore di Fredholm: $\text{Ker}(\overline{\mathcal{D}})$ ha dimensione finita ed inoltre si ha che $\text{Im}(\overline{\mathcal{D}}) = (\text{Ker}(\overline{\mathcal{D}}))^\perp$ ossia $\text{Im}(\overline{\mathcal{D}})$ chiuso e $\text{coKer}(\overline{\mathcal{D}}) = \text{Ker}(\overline{\mathcal{D}})$. Quindi $\overline{\mathcal{D}}$ è di Fredholm ma con indice nullo.

Per fare ciò si consideri $y = \overline{\mathcal{D}}x$ con $x \in H^1$, allora esiste una successione $x_j \in C^\infty$ tale che $x_j \rightarrow x$ in H^1 , ossia $\overline{\mathcal{D}}x_j \rightarrow \overline{\mathcal{D}}x$ in L^2 . Dunque $\forall s \in \text{Ker}(\overline{\mathcal{D}})$ si ha $(\overline{\mathcal{D}}x_j, s) = (x_j, \overline{\mathcal{D}}s) = 0$ che implica $(\overline{\mathcal{D}}x, s) = 0$ e quindi $\overline{\mathcal{D}}x \perp s$ ossia $\text{Im}(\overline{\mathcal{D}}) \subset (\text{Ker}(\overline{\mathcal{D}}))^\perp$. Viceversa se $x \in (\text{Ker}(\overline{\mathcal{D}}))^\perp$, si introduca l'operatore di Green $f(\overline{\mathcal{D}})$ attraverso il calcolo funzionale con $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(0) = 0$ e $f(\lambda) = \lambda^{-1}$. È evidente che $\overline{\mathcal{D}}f(\overline{\mathcal{D}})x = x \in L^2$ quindi $f(\overline{\mathcal{D}})x \in H^1$ e $x \in \text{Im}(\overline{\mathcal{D}})$.

Per ottenere operatori con indici non nulli bisogna considerarsi moduli di Clifford e corrispondenti operatori di Dirac graduati. Sia dunque $E = E^+ \oplus E^-$ con $E^\pm = \{s \mid \epsilon s = \pm s\}$ ed $\epsilon \in C^\infty(M, \text{End}(E))$ operatore di graduazione con $\epsilon^2 = 1$. Un operatore di Dirac graduato è tale che $\overline{\mathcal{D}}\epsilon + \epsilon\overline{\mathcal{D}} = 0$ ossia anticommute con l'operatore di graduazione e si scrive nella forma:

$$\overline{\mathcal{D}} = \begin{pmatrix} 0 & \overline{\mathcal{D}}^- \\ \overline{\mathcal{D}}^+ & 0 \end{pmatrix}$$

Inoltre se la connessione ∇ e l'azione di Clifford c sono tali che $\overline{\mathcal{D}}$ sia simmetrico, allora

$$\overline{\mathcal{D}}^- = (\overline{\mathcal{D}}^+)^*$$

I quattro esempi finora incontrati godono di questa proprietà: l'operatore di De Rham (Gauss-Bonnet), l'operatore di segnatura, $\sqrt{2}(\bar{\partial} + \bar{\partial}^*)$ su una varietà di Kähler, e $\overline{\mathcal{D}}$ su una varietà spin.

Ovviamente $\overline{\mathcal{D}}^+ : H^1(M, E^+) \rightarrow L^2(M, E^-)$ è un operatore di Fredholm e per quanto visto prima $\text{Im}(\overline{\mathcal{D}}^+) = (\text{Ker}\overline{\mathcal{D}}^-)^\perp$ quindi:

$$\text{ind}(\overline{\mathcal{D}}^+) = \dim \text{Ker}\overline{\mathcal{D}}^+ - \dim \text{Ker}\overline{\mathcal{D}}^-$$

Inoltre $\text{Ker}(\overline{\mathcal{D}}^\pm) \subseteq C^\infty$.

14.4. Teorema di Hodge.

In precedenza sono stati dati esempi di operatori di Dirac: l'operatore di De Rham d , l'operatore $\bar{\partial}$ su una varietà di Kähler. In ciascun caso è possibile definire un complesso, nel senso dell'algebra omologica e le relative classi di coomologia. Si darà ora la definizione di complesso di Dirac di cui gli esempi precedenti sono casi particolari.

Definizione 29. *Data una successione di fibrati vettoriali E_1, \dots, E_k con metrica hermitiana e connessione ∇^{E_j} compatibili ed una successione di operatori differenziali del primo ordine $d_j : C^\infty(M, E_j) \rightarrow C^\infty(M, E_{j+1})$ in modo che $d_{j+1}d_j = 0$, il complesso*

$$C^\infty(M, E_1) \xrightarrow{d_1} C^\infty(M, E_2) \xrightarrow{d_2} \dots \rightarrow C^\infty(M, E_k)$$

si dirà di Dirac se $E = \oplus E_j$ è un fibrato di Dirac, ossia esiste un'azione di Clifford unitaria, la connessione è di Clifford e l'operatore di Dirac associato $\overline{\mathcal{D}} = c \circ \nabla^E$ è uguale a $d + d^*$ con d^* aggiunto formale di d .

Si noti che $\overline{\mathcal{D}}^2 = dd^* + d^*d$ e $\overline{\mathcal{D}}^2(C^\infty(M, E_j)) \subseteq C^\infty(M, E_j)$. Inoltre $\text{Ker}\overline{\mathcal{D}} = \text{Ker}\overline{\mathcal{D}}^2$: è ovvio che $\text{Ker}\overline{\mathcal{D}} \subseteq \text{Ker}\overline{\mathcal{D}}^2$, sia $s \in \text{Ker}\overline{\mathcal{D}}^2$, allora $(\overline{\mathcal{D}}^2 s, s) = (\overline{\mathcal{D}}s, \overline{\mathcal{D}}s) = \|\overline{\mathcal{D}}s\|^2 = 0$ ossia $\overline{\mathcal{D}}s = 0$. Tale osservazione permette di esprimere $\text{ind}(\overline{\mathcal{D}}^+)$ come:

$$\text{ind}(\overline{\mathcal{D}}^+) = \dim \text{Ker}\overline{\mathcal{D}}^- \overline{\mathcal{D}}^+ - \dim \text{Ker}\overline{\mathcal{D}}^+ \overline{\mathcal{D}}^-$$

Per un complesso di Dirac sono ben definiti i gruppi di coomologia

$$H^j(M, E, d) = \frac{\text{Ker}d_j}{\text{Im}d_{j-1}}$$

Nei seguenti esempi classici il complesso di Dirac si specializza come segue:

Esempio 1

$E^j = \wedge^j T^*M \equiv \wedge^j M$ con d usuale differenziale esterno sulle forme e $\overline{\mathcal{D}}^2 = dd^* + d^*d \equiv \Delta_d$ operatore di Laplace-Beltrami.

Esempio 2

$E^j = \wedge^{0,j} M$ con M varietà di Kähler, $d = \bar{\partial}$, l'operatore di Dirac dato da $\overline{\mathcal{D}}/\sqrt{2} = \bar{\partial} + \bar{\partial}^*$ ed il suo quadrato $\overline{\mathcal{D}}^2/2 = \bar{\partial}\bar{\partial}^* + \bar{\partial}^*\bar{\partial} \equiv \Delta_{\bar{\partial}}$.

Esempio 3

$E^j = \bigwedge^{0,j} M \otimes W$ con W fibrato olomorfo e $d = \bar{\partial}_W$.

Nel primo esempio la coomologia è quella di De Rham $H_{dR}^k(M, \mathbb{R})$ che per il Teorema omonimo è isomorfa a $H^k(M, \mathbb{R})$, mentre negli altri due è la coomologia di Dolbeaut $H_{\bar{\partial}}^k(M, \mathbb{C})$, $H_{\partial_W}^k(M, \mathbb{C})$ rispettivamente isomorfe a $H^k(M, \mathcal{O}(M))$ e $H^k(M, \mathcal{O}(W))$, coomologia a valori nel fascio di funzioni (sezioni) olomorfe di M (di W).

Ogni classe di coomologia $\mathcal{C} \subseteq C^\infty(M, E_j)$ è un sottospazio affine essendo ottenuta sommando lo spazio vettoriale $dC^\infty(M, E_{j-1})$ ad una forma chiusa $\alpha \in H^j(M, E, d)$; ci si chiede se esiste un rappresentante privilegiato in una data classe. Per identificarlo si cerca un elemento di norma minima che una rappresentazione grafica suggerisce essere perpendicolare a $dC^\infty(M, E_{j-1})$, ossia $(\alpha, ds) = 0$ per ogni $s \in C^\infty(M, E_{j-1})$ che implica $d^*\alpha = 0$ e quindi $\bar{\mathcal{D}}^2\alpha = 0$. Un tale elemento $\alpha \in \text{Ker } \bar{\mathcal{D}}^2$ si dirà *armonico*. Questa idea intuitiva, che suggerisce l'esistenza di un rappresentante armonico per ogni classe di coomologia, è vera ed è parte del Teorema di Hodge:

Teorema 23. *Sia $\mathbb{H}^j = \{s \in C^\infty(M, E_j) \mid \bar{\mathcal{D}}^2 s = 0\}$. Allora esiste un isomorfismo di spazi vettoriali:*

$$\mathbb{H}^j \cong H^j(M, E, d)$$

ed inoltre $H^j(M, E, d)$ è finito dimensionale.

Dimostrazione Gli \mathbb{H}^j formano un sottocomplesso del complesso di Dirac con la differenziazione banale:

$$\dots \longrightarrow \mathbb{H}^{j-1} \xrightarrow{0} \mathbb{H}^j \xrightarrow{0} \mathbb{H}^{j+1} \longrightarrow \dots$$

Introducendo l'applicazione di inclusione $i : \mathbb{H}^j \hookrightarrow C^\infty(M, E_j)$ si costruisce la doppia catena il cui elemento j -esimo è:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{H}^j & \xrightarrow{0} & \mathbb{H}^{j+1} \\ i \downarrow & & \downarrow i \\ C^\infty(M, E_j) & \xrightarrow{d} & C^\infty(M, E_{j+1}) \end{array}$$

Si vuole mostrare che i è un'equivalenza tra catene. Sia $P : L^2(M, E_j) \rightarrow \mathbb{H}^j$ la proiezione ortogonale ossia $(P\alpha, \beta) = 0$ per ogni $\alpha \in L^2(M, E_j)$ e $\beta \in (\mathbb{H}^j)^\perp$ e sia π la restrizione di P a $C^\infty(M, E_j)$. Allora $\pi \circ i = \mathbb{I}$, ma $i \circ \pi \neq \mathbb{I}$ e si vuole mostrare che esiste un operatore

$$H : C^\infty(M, E_j) \rightarrow C^\infty(M, E_{j-1})$$

tale che $i \circ \pi - \mathbb{I} = dH - Hd$: se $[\alpha] \in H^j(M, E, d)$ allora $i(\pi(\alpha)) - \alpha = dH\alpha$ essendo $d\alpha = 0$ e quindi $[i(\pi(\alpha))] = [\alpha]$ ed i induce un isomorfismo in coomologia. Per costruire H si definisca l'operatore $G = f(\bar{\mathcal{D}})$ sullo spettro di $\bar{\mathcal{D}}$ come segue:

$$f(\lambda) = \begin{cases} \lambda^{-2} & \lambda \neq 0 \\ 0 & \lambda = 0 \end{cases}$$

G è l'**operatore di Green** (relativo a $\bar{\mathcal{D}}^2$), $G = 0$ sul $\text{Ker } \bar{\mathcal{D}} = \text{Ker } \bar{\mathcal{D}}^2$ ed inverte $\bar{\mathcal{D}}^2$ su $(\text{Ker } \bar{\mathcal{D}}^2)^\perp$: $\bar{\mathcal{D}}^2 G = \mathbb{I} - i \circ \pi$. Ricordando che $\bar{\mathcal{D}}^2 = dd^* + d^*d$ si ha $dd^*G + d^*dG = \mathbb{I} - i \circ \pi$. $\bar{\mathcal{D}}^2$ commuta con d essendo $(dd^* + d^*d)d - d(dd^* + d^*d) = dd^*d - dd^*d = 0$ e quindi G commuta con d : basta scegliere un sistema di autovettori in $L^2(M, E_j)$ comune a d e $\bar{\mathcal{D}}^2$ e notare che G opera come operatore di moltiplicazione sugli autospazi di $\bar{\mathcal{D}}^2$. Dunque si ottiene:

$$dd^*G + d^*Gd - \mathbb{I} - i \circ \pi$$

ossia $i \circ \pi - \mathbb{I} = dH - Hd$ con $H = d^*G$.

Teorema 24 (Dualità di Poincaré). *Sia M una varietà compatta connessa orientata n -dimensionale. Allora l'applicazione cup indotta in coomologia dal prodotto esterno:*

$$H^k(M, \mathbb{C}) \otimes H^{n-k}(M, \mathbb{C}) \rightarrow H^n(M, \mathbb{C}) \cong \mathbb{C}$$

è non degenera.

Dimostrazione Bisogna verificare che se $\mathcal{C} \in H^k$ è tale che $\mathcal{C} \cup \mathcal{C}' = 0$ per ogni $\mathcal{C}' \in H^{n-k}$, allora $\mathcal{C} = 0$. Si scelga un rappresentante armonico $\alpha \in \mathcal{C}$ e si consideri $*\alpha$. Ricordando che $d^* = \pm * d *$ e che $** = (-1)^{kn+k}$ si ha che $\bar{\mathcal{D}}^2 * \alpha = dd^* * \alpha + d^* d * \alpha = \pm d * d * * \alpha \pm * d * d * \alpha = \pm * * d * d * \alpha + * d d * \alpha = *(d^* d + dd^*) \alpha = *\bar{\mathcal{D}}^2 \alpha$, ossia $*\alpha$ è armonico e rappresenta una classe \mathcal{C}' ; $\mathcal{C} \cup \mathcal{C}'$ è rappresentato da $\alpha \wedge *\alpha \in H^n(M, \mathbb{C})$. L'isomorfismo $\phi : H^n(M, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$ è dato dall'integrazione $\omega \rightarrow \int \omega$, quindi $\mathcal{C} \cup \mathcal{C}' = 0$ implica

$$\int \alpha \wedge *\alpha = 0 = \|\alpha\|^2 \implies \alpha = 0$$

ossia la tesi.

14.5. Il Teorema di Bochner.

Teorema 25 (Bochner). *Sia M una varietà compatta con primo numero di Betti $b_1(M) = \dim H^1(M, \mathbb{C})$ non nullo. Allora non esiste alcuna metrica con curvatura di Ricci positiva.*

Dimostrazione La formula di Weitzenböck dà la seguente espressione per $\bar{\mathcal{D}}^2$:

$$\bar{\mathcal{D}}^2 = \nabla^* \nabla + \Omega_c^{\wedge^* M}$$

con $\bar{\mathcal{D}}^2 : C^\infty(M, \wedge^* M) \rightarrow C^\infty(M, \wedge^* M)$. Si consideri la restrizione a $T^*M = \wedge^1 M$. Per definizione, se e_i è una base ortonormale per TM :

$$\Omega_c^{\wedge^* M}|_{T^*M} = \frac{1}{2} \sum_{i,j} c(e_i)c(e_j)\Omega_c(e_i, e_j)$$

Si identifichi, tramite la metrica, TM con T^*M : allora per la compatibilità della connessione

$$\Omega_c^{\wedge^* M}|_{TM}(e_k) = \frac{1}{2} \sum_{i,j,l} e_i e_j e_l (R(e_i, e_j)e_k, e_l) = \sum_a \text{Ric}_{ka} e_a$$

Se la curvatura di Ricci fosse positiva, allora per α armonica si ha $(\Omega_c^{\wedge^* M} \alpha, \alpha) = (\bar{\mathcal{D}}^2 \alpha, \alpha) - (\nabla^* \nabla \alpha, \alpha) = -\|\nabla \alpha\|^2 \leq 0$ che implica $\alpha = 0$ ossia $b_1(M) = 0$.

14.6. La caratteristica di Eulero-Poincaré, la segnatura ed il genere aritmetico sono indici.

Si consideri una varietà M n -dimensionale e l'operatore di Laplace-Beltrami sulle forme differenziali dell'esempio 1:

$$d + d^* = \bar{\mathcal{D}} = \begin{pmatrix} 0 & d + d^*|_{\text{dispari}} \\ d + d^*|_{\text{pari}} & 0 \end{pmatrix}$$

con $\bar{\mathcal{D}}^+ = d + d^*|_{\text{pari}}$ e $\bar{\mathcal{D}}^- = d + d^*|_{\text{dispari}}$. Ricordando la formula per $\text{ind} \bar{\mathcal{D}}^+$ si ha, con $k = n/2$ se n è pari e $k = (n-1)/2$ se n è dispari:

$$\begin{aligned} \text{ind} \bar{\mathcal{D}}^+ &= \dim \text{Ker}(\bar{\mathcal{D}}^- \bar{\mathcal{D}}^+) - \dim \text{Ker}(\bar{\mathcal{D}}^+ \bar{\mathcal{D}}^-) = \\ &= \dim(\mathbb{H}^0 \oplus \mathbb{H}^2 \oplus \dots \oplus \mathbb{H}^{2k}) - \dim(\mathbb{H}^1 \oplus \mathbb{H}^3 \oplus \dots \oplus \mathbb{H}^{2k-1}) = \\ &= \sum (-1)^j \dim \mathbb{H}^j = \sum (-1)^j \dim H_{dR}^j(M, \mathbb{R}) = \\ &= \sum (-1)^j \dim H^j(M, \mathbb{R}) \end{aligned}$$

Dunque

$$\text{ind}\overline{\mathcal{D}}^+ = \chi(M)$$

Analogamente se M è una varietà di Kähler e W un fibrato olomorfo,

$$\text{ind}(\overline{\partial}_w + \overline{\partial}_w^*|_{\text{pari}}) = \chi(M, \mathcal{O}(W))$$

Sia M una varietà compatta di dimensione $2l$. Sia $\overline{\mathcal{D}}$ l'operatore di De Rham sulle forme differenziali $\Lambda_{\mathbb{C}}^* M$ considerate come un fibrato di Clifford graduato con operatore di gradazione $\tau = i^l \omega$ e $\omega = e_1 e_2 \cdots e_{2l}$ forma di volume sul fibrato: si verifica che $\omega^2 = (-1)^l$ e dunque $\tau^2 = \mathbb{I}$. $\overline{\mathcal{D}}$ anticommuta con τ essendo l'operatore di Dirac associato al fibrato di Clifford graduato $\Lambda_{\mathbb{C}}^* M = \Lambda_{\mathbb{C}}^+ M \oplus \Lambda_{\mathbb{C}}^- M$ e si indicherà con $\overline{\mathcal{D}}_{\text{segn}}$:

$$\overline{\mathcal{D}}_{\text{segn}} = \begin{pmatrix} 0 & d + d^*|\wedge^- \\ d + d^*|\wedge^+ & 0 \end{pmatrix}$$

L'azione di ω è l'operatore $*$ di Hodge a meno del segno:

$$\tau = i^l \omega = i^{l+p(p-1)} * \text{ su } \bigwedge_{\mathbb{C}}^p M$$

Osservando che τ commuta con $\overline{\mathcal{D}}^2$ (si veda la Dualità di Poincaré), si ha:

$$\begin{aligned} \text{ind}(\overline{\mathcal{D}}_{\text{segn}}^+) &= \dim \text{Ker}(\overline{\mathcal{D}}_{\text{segn}}^- \overline{\mathcal{D}}_{\text{segn}}^+) - \dim \text{Ker}(\overline{\mathcal{D}}_{\text{segn}}^+ \overline{\mathcal{D}}_{\text{segn}}^-) = \\ &= \dim\{\text{forme armoniche in } \Lambda_{\mathbb{C}}^+ M\} - \dim\{\text{forme armoniche in } \Lambda_{\mathbb{C}}^- M\} \\ &= \dim\{h \in \mathbb{H} \mid \tau h = h\} - \dim\{h \in \mathbb{H} \mid \tau h = -h\} \end{aligned}$$

dove si è indicato con \mathbb{H} le forme armoniche in $\Lambda_{\mathbb{C}}^* M$. Si considerino gli spazi invarianti per τ , $V_k = \mathbb{H}^k \oplus \mathbb{H}^{2l-k}$. Se $\alpha \in V_k$ allora $\alpha = \beta + \tau(\beta)$ con $\beta \in \mathbb{H}^k$ e $\tau(\beta) \in \mathbb{H}^{2l-k}$, ricordando la definizione di τ e $\tau \overline{\mathcal{D}}^2 = \overline{\mathcal{D}}^2 \tau$. Sia $\alpha' = \beta - \tau(\beta)$, allora $\alpha' \in V_k$, ma $\tau(\alpha') = -\alpha'$, dunque

$$\dim \text{Ker}(\overline{\mathcal{D}}_{\text{segn}}^- \overline{\mathcal{D}}_{\text{segn}}^+|_{V_k}) = \dim \text{Ker}(\overline{\mathcal{D}}_{\text{segn}}^+ \overline{\mathcal{D}}_{\text{segn}}^-|_{V_k})$$

per ogni $0 \leq k < l$. Quindi per $\text{ind}(\overline{\mathcal{D}}_{\text{segn}}^+)$ si ha:

$$\text{ind}(\overline{\mathcal{D}}_{\text{segn}}^+) = \dim \text{Ker}(\overline{\mathcal{D}}_{\text{segn}}^- \overline{\mathcal{D}}_{\text{segn}}^+|_{V_l}) - \dim \text{Ker}(\overline{\mathcal{D}}_{\text{segn}}^+ \overline{\mathcal{D}}_{\text{segn}}^-|_{V_l})$$

$\tau = i^{l+l(l-1)} * = i^{l^2} *$ sulle l -forme ossia $\tau = i^{4n^2} * = *$ se $l = 2n$ e $\tau = i^{4n(n+1)+1} * = i *$ se $l = 2n+1$. Per l dispari, $** = -1$ e $V(*)_{\pm i}$, autospazi dell'operatore reale $*$ relativi agli autovalori $\pm i$, sono isomorfi essendo $V(*)_i = \overline{V(*)}_{-i}$: in questo caso $\text{ind}(\overline{\mathcal{D}}_{\text{segn}}^+) = 0$. Per l pari, siano \mathbb{H}_{\pm}^l gli autospazi relativi agli autovalori ± 1 per l'operatore $*$ sulle l -forme, allora:

$$\text{ind}(\overline{\mathcal{D}}_{\text{segn}}^+) = \dim \text{Ker}(\mathbb{H}_+^l) - \dim \text{Ker}(\mathbb{H}_-^l)$$

Si fissi una base in \mathbb{H}^l tale che

$$\begin{aligned} \alpha_1^+, \dots, \alpha_{p^+}^+ &\in \mathbb{H}_+^l \\ \alpha_1^-, \dots, \alpha_{p^-}^- &\in \mathbb{H}_-^l \end{aligned}$$

La forma quadratica:

$$\alpha \rightarrow \int \alpha \wedge \alpha \text{ per } \alpha \in \mathbb{H}^l \cong H^l(M, \mathbb{R})$$

è definita positiva su \mathbb{H}_+^l e definita negativa su \mathbb{H}_-^l come si deduce da:

$$\begin{aligned} \int \alpha_j^+ \wedge \alpha_j^+ &= \int \alpha_j^+ \wedge * \alpha_j^+ = (\alpha_j^+, \alpha_j^+) > 0 \\ \int \alpha_j^- \wedge \alpha_j^- &= - \int \alpha_j^- \wedge * \alpha_j^- = -(\alpha_j^-, \alpha_j^-) < 0 \end{aligned}$$

Concludendo

$$\text{ind}(\overline{\mathcal{D}}_{\text{segn}}^+) = \sigma(M)$$

con $\sigma(M) = p^+ - p^-$ la segnatura della forma quadratica ossia di M .

Conclusione.

Le caratteristiche di Eulero $\chi(M)$, $\chi(M, \mathcal{O}W)$ e la segnatura $\sigma(M)$ sono state espresse tramite l'indice dei rispettivi operatori di Dirac graduati. Abbiamo già visto che i tre teoremi *best seller* della geometria moderna: il Teorema di Chern-Gauss-Bonnet, il Teorema della segnatura di Hirzebruch ed il Teorema di Riemann-Roch-Hirzebruch esprimono queste grandezze rispettivamente come:

- Teorema di Chern-Gauss-Bonnet

$$\chi(M) = \int_M e(M, \nabla^{TM})$$

dove $e(M, \nabla^{TM})$ è la classe di Eulero.

- Teorema della segnatura di Hirzebruch

$$\sigma(M) = \int_M L(M)$$

dove $L(M) = [L(TM, \nabla^{TM})]$ è la classe di Hirzebruch

- Teorema di Riemann-Roch-Hirzebruch

$$\chi(M, W) = \int_M Td(M) \wedge Ch(W)$$

dove $Td(M) = [Td(T^{0,1}M, \nabla)]$ è la classe di Todd di M e $Ch(W)$ è la classe di Chern di W .

Alla fine della undicesima lezione abbiamo enunciato il teorema dell'indice di Atiyah-Singer; esso esprime $\text{ind}(\overline{\mathcal{D}}^+)$ come:

$$\text{ind}(\overline{\mathcal{D}}^+) = \int_M \hat{A}(M) \wedge Ch^{E/S}(E).$$

I tre teoremi seguono da quest'ultimo una volta espresso il membro di destra nella forma appropriata: tale analisi, di carattere algebro-lineare (ma non proprio banale) verrà omessa per brevità.

Osservazione. Si è visto che:

$$\chi(M, \mathcal{O}(W)) = \text{ind}(\bar{\partial} + \bar{\partial}^*|_{\text{pari}}) = \int_M Td(M) \wedge Ch(W)$$

su una varietà di Kähler con fibrato olomorfo W . Se la varietà M non è di Kähler, si può comunque introdurre un operatore di Dirac $\overline{\mathcal{D}}$ associato all'azione di Clifford:

$$c(v) = \sqrt{2}(\epsilon(v^{1,0}) - i(v^{0,1}))$$

e ad una connessione di Clifford ∇ su $\wedge^{0,*} M \otimes W \equiv S$ ma, in generale

$$\sqrt{2}(\bar{\partial} + \bar{\partial}^*) \neq \overline{\mathcal{D}}$$

Tuttavia $\sqrt{2}(\bar{\partial} + \bar{\partial}^*) - \overline{\mathcal{D}} = A \in C^\infty(M, \text{End}(S))$ con $A^* = A$. Si può dimostrare che se $\overline{\mathcal{D}}^E$ è un qualsiasi operatore di Dirac su un fibrato di Clifford E allora per

$$\overline{\mathcal{D}}^E + A \text{ con } A \in C^\infty(M, \text{End}(E)) \text{ e } A^* = A$$

si può condurre un'analisi delle proprietà spettrali analoga a quella fatta per $\overline{\mathcal{D}}^E$ (Gårding, decomposizione spettrale, etc...). Quindi, in particolare, $\sqrt{2}(\bar{\partial} + \bar{\partial}^*)$ è un operatore di Fredholm. In realtà

$$\overline{\mathcal{D}}^E + tA$$

è un operatore di Fredholm $\forall t$ che implica

$$\text{ind}(\sqrt{2}(\bar{\partial} + \bar{\partial}^*)) = \text{ind}(\bar{\mathcal{D}})$$

per la proprietà di continuità della funzione indice. Per $\bar{\mathcal{D}}$ vale la formula di Atiyah-Singer e ne segue che il Teorema di Riemann-Roch-Hirzebruch vale per ogni varietà complessa.

15. **Lezione 15.** NOTE A CURA DEL DOCENTE.15.1. **Equazione del calore.**

Sia (M, g) una varietà riemanniana compatta senza bordo. Consideriamo un operatore di Dirac \mathcal{D} su un fibrato di Dirac $E \rightarrow M$ di rango k . L'equazione del calore associata all'operatore \mathcal{D}^2 è per definizione l'equazione

$$(60) \quad \frac{\partial}{\partial t} s + \mathcal{D}^2 s = 0, \quad \in C^\infty(\mathbb{R}^+ \times M; E).$$

Teorema 26. *Per ogni dato iniziale $s_0 \in C^\infty(M, E)$ esiste ed è unica la soluzione di (60) con condizione iniziale $s(0, \cdot) = s_0(\cdot)$. Inoltre la soluzione $s(t, \cdot) := s_t(\cdot)$ soddisfa $\|s_t\|_{L^2} \leq \|s_0\|_{L^2}$.*

Dimostrazione. È facile conseguenza della teoria sviluppata nelle precedenti lezioni.

Unicità. Sia s_t una soluzione. Per la norma L^2 abbiamo allora

$$\frac{\partial}{\partial t} \|s_t\|^2 = \frac{\partial}{\partial t} (s_t, s_t) = -(\mathcal{D}^2 s_t, s_t) - (s_t, \mathcal{D}^2 s_t) = -2(\mathcal{D} s_t, \mathcal{D} s_t) = -2\|\mathcal{D} s_t\|^2 \leq 0$$

Quindi

$$\|s_t\|^2 \leq \|s_0\|^2 \quad \forall t \geq 0$$

da cui la tesi.

Esistenza. Per il calcolo funzionale (si veda la lezione precedente) ha senso considerare l'operatore $\exp(-t\mathcal{D}^2)$ (infatti la funzione $\lambda \rightarrow \exp(-t\lambda^2)$ è sicuramente limitata). Poniamo $s_t := \exp(-t\mathcal{D}^2)s_0$. Allora sappiamo che $s_t \in C^\infty(M, E)$; inoltre la funzione $\lambda \rightarrow \exp(-t\lambda^2)$ è derivabile k volte rispetto a t e la funzione derivata è ancora limitata; possiamo quindi derivare rispetto a t la funzione s_t ed ottenere:

$$\frac{d}{dt} s_t = -\mathcal{D}^2 e^{-t\mathcal{D}^2} s_0 = -\mathcal{D}^2 s_t$$

da cui la tesi. La condizione iniziale è chiaramente soddisfatta per le proprietà della funzione esponenziale e per il calcolo funzionale.

L'operatore $\exp(-t\mathcal{D}^2)$ è detto **operatore del calore**. Dalle proprietà della funzione esponenziale segue che vale la proprietà di semigrupp

$$e^{-(t_1+t_2)\mathcal{D}^2} = e^{-t_1\mathcal{D}^2} \circ e^{-t_2\mathcal{D}^2}.$$

Sia $E \boxtimes E^*$ il fibrato su $M \times M$ che ha come fibra su (m_1, m_2) il fibrato $E_{m_1} \otimes E_{m_2}^* \equiv \text{Hom}(E_{m_2}, E_{m_1})$.

Proposizione 25. *L'operatore del calore $\exp(-t\mathcal{D}^2)$ è un operatore regolarizzante:*

$$(61) \quad (e^{-t\mathcal{D}^2} s)(m_1) = \int_M K_t(m_1, m_2) s(m_2) d\text{vol}_M(m_2), \quad \text{con } K_t \in C^\infty(M \times M; E \boxtimes E^*).$$

Il nucleo K_t è detto **nucleo del calore**.

Dimostrazione. Sarà conseguenza del seguente

Lemma 8. *Sia $A \in \mathcal{L}(L^2(M, E), L^2(M, E))$, $A = A^*$. Supponiamo che $A : L^2(M, E) \rightarrow C^{r+1}(M, E)$ sia continuo come operatore fra spazi di Banach. Allora A^2 è un operatore integrale con nucleo in $C^r(M \times M; E \boxtimes E^*)$.*

Assumiamo il lemma e dimostriamo la proposizione.

$\forall k \in \mathbb{N}$ l'operatore $\mathcal{D}^k \exp(-t\mathcal{D}^2)$ è limitato in L^2 , dato che corrisponde tramite il calcolo funzionale alla funzione $\lambda \rightarrow \lambda^k e^{-t\lambda^2}$. Ne segue, per la norma $\| \cdot \|_0 \equiv \| \cdot \|_{L^2}$ che

$$\|\mathcal{D}^k e^{-t\mathcal{D}^2}\|_0 \leq C \|s\|_0,$$

da cui, per la disuguaglianza di Gårding e utilizzando C per una costante generica:

$$\|e^{-t\mathcal{D}^2} s\|_k \leq C \left(\|e^{-t\mathcal{D}^2} s\|_0 + \|\mathcal{D}^k e^{-t\mathcal{D}^2}\|_0 \right) \leq C \|s\|_0.$$

Ne segue che $e^{-t\mathcal{D}^2} : L^2 \rightarrow H_k$ è continuo $\forall k$ e quindi per il Lemma d'immersione di Sobolev, $e^{-t\mathcal{D}^2} : L^2 \rightarrow C^r$ è continuo $\forall r$. Ma dalla proprietà di semigruppato sappiamo che $e^{-t\mathcal{D}^2} = e^{-\frac{t}{2}\mathcal{D}^2} \circ e^{-\frac{t}{2}\mathcal{D}^2}$ e utilizzando il Lemma abbiamo immediatamente la tesi.

Dimostrazione Lemma (Sketch). Per semplicità consideriamo $E =$ fibrato banale. Consideriamo $m_1 \in M$. Associamo ad $s \in L^2$ il numero complesso $(As)(m_1)$. Otteniamo un funzionale lineare su L^2 e quindi, per il Teorema di Riesz, esiste $v_{m_1} \in L^2$ tale che $(As)(m_1) = \langle s, v_{m_1} \rangle$, i.e.

$$(As)(m_1) = \int_M s(m_2) \overline{v_{m_1}(m_2)} dm_2.$$

Si ha

(i) $m \rightarrow v_m$ è una funzione C^r a valori in L^2 (segue dall'ipotesi $A \in \mathcal{L}(L^2, C^{r+1})$).

(ii) $(A^2 s)(m_1) = \int_M s(m_2) (Av_{m_2})(m_1) dm_2$ (segue da $A = A^*$).

Poniamo $K(m_1, m_2) := Av_{m_2}(m_1)$. Allora $K \in C^r(M \times M)$ perché $m_2 \rightarrow v_{m_2} \in C^r(M, L^2)$ da (i) e quindi $m_2 \rightarrow Av_{m_2} \in C^r(M, C^r(M))$ per ipotesi. Il lemma è dimostrato.

Esempio. Il nucleo del calore del Laplaciano in \mathbb{R}^n è $K_t(x, y) = (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-t\|x-y\|^2}$.

Notazione. Useremo spesso la notazione $K(e^{-t\mathcal{D}^2})(x, y)$ per il nucleo del calore associato a $\exp(-t\mathcal{D}^2)$

15.2. Proiezione ortogonale sul nucleo.

Abbiamo appena visto che e^{-tD^2} è regolarizzante, cioè

$$e^{-tD^2}(m_1) = \int K_t(m_1, m_2) s(m_2) dvol_M$$

con nucleo $K_t \in C^\infty$. Esiste un altro operatore regolarizzante notevole, Π , la proiezione ortogonale $L^2(M, E) \rightarrow Ker(D^2) \subset L^2(M, E)$, con $Ker(D^2)$ di dimensione finita e contenuto in $C^\infty(M, E)$. Per verificare che Π è un operatore integrale con nucleo C^∞ fissiamo una base $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ di $Ker(D^2)$.

È chiaro che se $s \in L^2(M, E)$ allora $\Pi s = \sum_{i:1}^k (s, \varphi_i) \varphi_i$ da cui

$$(62) \quad \Pi s = \sum_{i:1}^k \left(\int_M \langle s, \varphi_i \rangle \varphi_i \right)$$

Supponiamo preliminarmente che φ_i siano funzioni: definiamo allora funzioni C^∞ su $M \times M$, e le denotiamo $\varphi_i \boxtimes \varphi_i^*$, come segue

$$(\varphi_i \boxtimes \varphi_i^*)(m_1, m_2) = \varphi_i(m_1) \overline{\varphi_i(m_2)}.$$

Riscrivendo (62) in termini di queste funzioni abbiamo allora

$$\begin{aligned} (\Pi s)(m_1) &= \sum_{i:1}^k \left(\int_M s(m_2) \overline{\varphi_i}(m_2) dvol_{m_2} \right) \varphi_i \\ &= \int_M \left(\sum_{i:1}^k \varphi_i \boxtimes \varphi_i^* \right) (m_1, m_2) s(m_2) dvol_{m_2} \end{aligned}$$

espressione che dimostra che Π è un operatore integrale con nucleo C^∞ .

In generale se E è un fibrato *hermitiano* allora definiamo

$$\varphi_i \boxtimes \varphi_i^* \in C^\infty(M \times M, E \boxtimes E^*) \equiv C^\infty(M \times M, \text{HOM}(E, E))$$

$$\text{dove } (E \boxtimes E^*)(m_1, m_2) = E_{m_1} \otimes E_{m_2}^* = \text{Hom}(E_{m_2}, E_{m_1})$$

tramite

$$((\varphi_i \boxtimes \varphi_i^*)(m_1, m_2))(v_1) = \langle v_1, \varphi_i(m_2) \rangle \varphi_i(m_1), \quad \text{con } v \in E_{m_2}.$$

Con questa definizione, ed utilizzando nuovamente (62) abbiamo ancora

$$(\Pi s)(m_1) = \int_M K(\Pi)(m_1, m_2) s(m_2) dvol_{m_2}$$

con nucleo

$$K(\Pi) = \sum_{i:1}^k \varphi_i \boxtimes \varphi_i^* \in C^\infty(M \times M; E \boxtimes E^*).$$

16.1. Operatori di Hilbert-Schmidt:

Definizione 30. $A \in \mathcal{L}(H, H)$, con H di Hilbert, si dice di Hilbert-Schmidt se esiste una base ortonormale $(e_i)_i$ tale che $\sum_{i:1}^{+\infty} \|Ae_i\|^2 < +\infty$.

In tal caso possiamo introdurre una nuova norma (la norma di Hilbert-Schmidt) tramite

$$\|A\|_{HS} = \sum_{i,j} |\langle Ae_i, e_j \rangle|^2.$$

Teorema 27. Si ha che

i) $\|A\|_{HS}$ non dipende dalla scelta di $(e_i)_i$, e inoltre $\|A\| \leq \|A\|_{HS}$

ii) $\|A\|_{HS} = \|A^*\|_{HS}$

iii) A di HS $\Rightarrow A$ compatto

iv) $\|A\|_{HS}^2 = (A, A)_{HS}$ dove $(A, B)_{HS} = \sum_{i:1}^{+\infty} (Ae_i, Be_i)$

v) Se $U \in \mathcal{L}(H, H)$ e A è di HS allora UA e AU sono di HS e vale $\|UA\|_{HS} \leq \|U\| \|A\|_{HS}$, cioè HS è un ideale.

Proposizione 26. Sia $H = L^2(M, dm)$ e $K \in C^0(M \times M)$. Definiamo $A \in \mathcal{L}(H, H)$ tramite $Au = \int_M K_A(m_1, m_2)u(m_2)dm_2$. Allora A è di HS e $\|A\|_{HS}^2 = \int \int_M |K_A|^2 dm_1 dm_2$.

Dimostrazione Una base per $L^2(M \times M)$ è data da $e_i \boxtimes \bar{e}_j$ dove $(e_i)_i$ è una base di L^2 . Sviluppiamo $K_A = \sum \langle K_A, e_i \boxtimes \bar{e}_j \rangle e_i \boxtimes \bar{e}_j$ da cui $\|A\|_{HS}^2 = \sum_{i:1}^{+\infty} \|Ae_i\|^2 = \sum_{i,j} |\langle Ae_i, e_j \rangle|^2 =$

$$\sum_{i,j} \left| \int \int K_A(x, y) e_i(x) \bar{e}_j(y) \right|^2 = \sum_{i,j} |\langle K_A, e_i \boxtimes \bar{e}_j \rangle|^2 = \|K_A\|_{L^2(M \times M)}^2.$$

Quindi $\|A\|_{HS}^2 < +\infty$ dato che M è compatta.

Analogamente, se E è un fibrato hermitiano e $K \in C^0(M \times M, E \boxtimes E^*)$ allora l'operatore integrale definito da K è di Hilbert-Schmidt.

Corollario 8. e^{-tD^2} è di HS $\forall t$.

16.2. Operatori di classe traccia.

Definizione 31. $T \in \mathcal{L}(H, H)$ si dice di classe traccia o tracciabile se $T = AB$ con A, B di HS. Se T è tracciabile, poniamo $\text{Tr}(T) := (B, A^*)_{HS}$ da cui

$$\text{Tr}(T) = \sum_{i:1}^{+\infty} (Be_i, A^*e_i) = \sum_{i:1}^{+\infty} (ABe_i, e_i) = \sum_{i:1}^{+\infty} (Te_i, e_i)$$

con la serie assolutamente convergente.

Osservazione. Sia A limitato. Allora A tracciabile $\Rightarrow A$ di HS $\Rightarrow A$ compatto.

Se T è autoaggiunto e se scegliamo $(e_i)_i$ base di autovettori di T (base che esiste per il teorema spettrale per operatori compatti e autoaggiunti) allora $\text{Tr}(T) = \sum_{i:1}^{+\infty} \lambda_i$ dove λ_i sono i relativi autovalori (reali).

Da quanto discusso fino ad ora scopriamo che e^{-tD^2} , che è autoaggiunto, è tracciabile e

$$\text{Tr}(e^{-tD^2}) = \sum_{i:1}^{+\infty} e^{-t\lambda_i^2}, \quad \text{con } \lambda_i \text{ autovalori di } D.$$

Infatti per il corollario (8) sappiamo che $e^{-\frac{t}{2}D^2}$ è di HS e quindi per la proprietà di semigruppò abbiamo che e^{-tD^2} è tracciabile.

Proposizione 27. T tracciabile, B limitato $\Rightarrow TB$ e BT sono tracciabili e $\text{Tr}(BT) = \text{Tr}(TB)$. In parole, la traccia di un commutatore $[T, B]$ è uguale a zero.

Dimostrazione Sia $T = AA'$ con A e A' di HS, $TB = TAA'B$ e

$$\begin{aligned} \text{Tr}(TB) &= \sum_i \langle TB e_i, e_i \rangle = \sum_i \langle B e_i, T^* e_i \rangle = \\ &= \sum_i \langle B e_i, e_k \rangle \overline{\langle T^* e_i, e_k \rangle} = \sum_i \langle B e_i, e_k \rangle \langle T e_k, e_i \rangle = \text{Tr}(BT). \end{aligned}$$

Osservazione: analogamente, se T e B sono di HS allora $\text{Tr}(TB) = \text{Tr}(BT)$ (notare che i prodotti sono tracciabili per definizione).

16.3. Teorema di Lidski.

Teorema 28. (Lidski) Se A è regolarizzante con nucleo $K_A \in C^\infty$ allora A è tracciabile e $\text{Tr}(A) = \int_M K_A |_\Delta \, d\text{vol}$ dove $\Delta = \{(m, m)\} \hookrightarrow M \times M$. Analogamente, se $A : C^\infty(M, E) \rightarrow C^\infty(M, E)$ è regolarizzante con nucleo $K_A \in C^\infty(M \times M, E \boxtimes E^*)$ allora A è tracciabile e

$$(63) \quad \text{Tr}(A) = \int_M \text{tr}_{E_m}(K_A)(m, m) \, d\text{vol}.$$

Osservazione. Il nucleo K_A è tale che $K_A(m, m) \in \text{End}(E_m)$ ed è quindi ben definita la traccia $\text{tr}_{E_m}(K_A)(m, m)$

Dimostrazione. Supponiamo preliminarmente che esistano B, C operatori integrali con nucleo continuo come nella proposizione 26 tali che $A = BC$: allora B e C sono di HS e

$$\text{Tr}(A) = (C, B^*)_{HS} = \text{Tr}(CB) = (B, C^*)_{HS}.$$

Sempre per la proposizione 26

$$\text{Tr}(A) = \int_M \int_M K_B(m_1, m_2) K_C(m_2, m_1) \, dm_1 dm_2;$$

d'altra parte A è anche a nucleo continuo e più precisamente

$$K_A = K_{BC}(m_1, m_2) = \int K_B(m_1, m_2) K_C(m_2, m_3) \, dm_2;$$

da cui la tesi in questo caso particolare. Resta solo da provare che possiamo sempre esprimere $A = BC$ come sopra: siano $B = (1 + D^2)^{-n}$ e $C = (1 + D^2)^n A$, e verifichiamo le ipotesi. Il nucleo di C è C^∞ e per quel che concerne B consideriamo $B' = (1 + D^2)^{-n/2}$: per Garding e Sobolev $B' : L^2 \rightarrow C^1$ se n è abbastanza grande, e per il lemma tecnico della lezione scorsa ne segue che $(B')^2 = B$ ha nucleo C^0 . La proposizione è dimostrata.

Riassumendo, abbiamo provato il seguente fondamentale

Teorema 29. e^{-tD^2} è tracciabile, $\text{Tr}(e^{-tD^2}) = \sum_i e^{-t\lambda_i^2}$. Se K_t denota il nucleo del calore allora

$$(64) \quad \text{Tr}(e^{-tD^2}) = \int_M \text{tr}_{E_m}(K_t(m, m)) \, d\text{vol}$$

16.4. Formula di McKean-Singer.

Ricordiamo innanzitutto che se $V = V^+ \oplus V^-$ è uno spazio vettoriale \mathbb{Z}_2 -graduato e $A \in \text{End}(V)$, allora

$$A = \begin{pmatrix} A_{++} & A_{+-} \\ A_{-+} & A_{--} \end{pmatrix}$$

e, per definizione,

$$\text{tr}(A) = \text{tr}(A_{++}) + \text{tr}(A_{--}) \quad \text{e} \quad \text{str}(A) = \text{tr}(A_{++}) - \text{tr}(A_{--}).$$

Sia $D = \begin{pmatrix} 0 & D^- \\ D^+ & 0 \end{pmatrix}$ l'operatore di Dirac associato al modulo di Clifford graduato $E^+ \oplus E^-$. Consideriamo

$$D^2 = \begin{pmatrix} D^- D^+ & 0 \\ 0 & D^+ D^- \end{pmatrix}, \quad \text{e} \quad e^{-tD^2} = \begin{pmatrix} e^{-tD^- D^+} & 0 \\ 0 & e^{-tD^+ D^-} \end{pmatrix}.$$

Teorema 30. (Formula di McKean-Singer) Si ha

$$(65) \quad \text{ind}(D^+) = \text{Str}(e^{-tD^2}) = \int_M \text{str}_{E_m} K_t(m, m) \, d\text{vol}.$$

Dimostrazione Sia $K_\lambda = K_\lambda^+ \oplus K_\lambda^-$ un autospazio di D^2 associato a λ e sia $n_\lambda^\pm = \dim(K_\lambda^\pm)$. Per quanto visto $\text{Tr}(e^{-tD^- D^+}) = \sum_{\lambda \geq 0} e^{-t\lambda} n_\lambda^+ = n_0^+ + \sum_{\lambda > 0} e^{-t\lambda} n_\lambda^+$ e $\text{Tr}(e^{-tD^+ D^-}) = \sum_{\lambda \geq 0} e^{-t\lambda} n_\lambda^- = n_0^- + \sum_{\lambda > 0} e^{-t\lambda} n_\lambda^-$, quindi $\text{ind}(D^+) = \dim \text{Ker}(D^- D^+) - \dim \text{Ker}(D^+ D^-) = n_0^+ - n_0^-$. Basta quindi provare che $\sum_{\lambda > 0} e^{-t\lambda} n_\lambda^- = \sum_{\lambda > 0} e^{-t\lambda} n_\lambda^+$. Se $\varphi^+ \in K_\lambda^+$ per $\lambda > 0$ allora $D^+ \varphi^+ \in K_\lambda^-$ per $\lambda > 0$: infatti $D^+ D^- (D^+ \varphi^+) = D^+ (D^- D^+ \varphi^+) = \lambda D^+ \varphi^+$. Analogamente se $\varphi^- \in K_\lambda^-$ per $\lambda > 0$ allora $D^- \varphi^- \in K_\lambda^+$ cioè $K_\lambda^+ \xrightarrow{D^+} K_\lambda^- \xrightarrow{\frac{1}{\lambda} D^-} K$ è l'identità. Ne segue che $K_\lambda^+ \simeq K_\lambda^-$ per $\lambda > 0$ e quindi $n_\lambda^+ = n_\lambda^-$ come si voleva.

È possibile dare un'altra dimostrazione della Formula di McKean-Singer.

Dimostrazione alternativa. Sia $\Pi_{\text{Ker}(D^2)}$ la proiezione ortogonale sul nucleo. Verrà dimostrato in uno dei seminari alla fine del corso (seminario di A. Uboldi) che per $t \rightarrow +\infty$,

$$K(e^{-tD^2}) \xrightarrow{C^\infty} \Pi_{\text{Ker}(D^2)}.$$

D'altra parte

$$\Pi_{\text{Ker}(D^2)} = \begin{pmatrix} \Pi_{\text{Ker}(D^- D^+)} & 0 \\ 0 & \Pi_{\text{Ker}(D^+ D^-)} \end{pmatrix}$$

e quindi

$$\text{Str}(e^{-tD^2}) = \int_M \text{str}(K(e^{-tD^2}) |_{\Delta}) \xrightarrow{\text{per } t \rightarrow +\infty} \text{Str}(\Pi_{\text{Ker}(D^2)}) = \text{ind}(D^+).$$

Pertanto basta provare che $\frac{d}{dt} \text{Str}(e^{-tD^2}) = 0$: abbiamo che $D e^{-tD^2} = e^{-tD^2} D$ e inoltre dall'equazione del calore

$$\frac{d}{dt}(e^{-tD^- D^+}) = -D^- D^+ e^{-tD^- D^+}$$

quindi

$$D^+ e^{-tD^- D^+} = e^{-tD^+ D^-} D^+$$

e

$$D^- e^{-tD^- D^+} = e^{-tD^+ D^-} D^-$$

Ne segue che

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} (\text{Tr}(e^{-tD^- D^+}) - \text{Tr}(e^{-tD^+ D^-})) \\ &= \text{Tr}(-D^- D^+ e^{-tD^- D^+}) - \text{Tr}(-D^+ D^- e^{-tD^+ D^-}) \\ &= \text{Tr}(D^+ D^- e^{-tD^+ D^-}) - \text{Tr}(D^- e^{-tD^+ D^-} D^+) = \text{Tr} [D^+, D^- e^{-tD^+ D^-}] = 0 \end{aligned}$$

dato che la traccia è zero sui commutatori.

Nella dimostrazione alternativa abbiamo usato un'estensione della Proposizione (27)

Proposizione 28. *Se D è differenziale ed A regolarizzante allora DA e AD sono regolarizzanti e $\text{Tr}(DA) = \text{Tr}(AD)$.*

Dimostrazione Si ha $\text{Tr}(DA) = \text{Tr}(D(1 + D^2)^{-n}(1 + D^2)^n A) = \text{Tr}((1 + D^2)^n AD(1 + D^2)^{-n}) = \text{Tr}(AD)$ commutando ove necessario e tenendo conto che $(1 + D^2)^n A$ è regolarizzante e quindi HS, che per n abbastanza grande $D(1 + D^2)^{-n}$ ha nucleo C^0 (ed è quindi di HS), che $(1 + D^2)^n AD$ è regolarizzante e che $(1 + D^2)^{-n}$ ha nucleo C^0 (ed è quindi tracciabile).

17. **Lezione 17.** NOTE A CURA DEL DOCENTE.17.1. **Sviluppo asintotico del nucleo del calore. Legge di Weyl.**

Definizione 32. Sia f una funzione definita in \mathbb{R} . Una serie formale $\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$ è detta uno sviluppo asintotico di f in un intorno di $t = 0$ se

(i) $n_k < n_{k+1}$

(ii) $n_k \rightarrow +\infty$ quando $k \rightarrow +\infty$.

(iii) esiste un intorno U_0 di 0 con la seguente proprietà: $\forall \ell \exists C_\ell$ tale che per $t \in U_0$

$$|f(t) - \sum_{k=0}^{\ell} a_k t^{n_k}| \leq C_\ell |t|^{n_{\ell+1}}.$$

Scriveremo $f \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$.

Teorema 31. Sia $K_t \in C^\infty(M \times M; E \boxtimes E^*)$ il nucleo del calore associato a \mathcal{D}^2 . Esiste uno sviluppo asintotico di $K_t|_\Delta$:

$$(66) \quad K_t(x, x) \sim \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \left(\sum_{i=0}^{\infty} t^i K_i(x) \right)$$

che è uniforme in $x \in M$ e tale che $K_j \in C^\infty(M, \text{End}(E)) \forall j$, $K_0 = \text{Id}_E$, K_j dipende localmente dai coefficienti delle metriche, delle connessioni e dalle loro derivate.

Vedremo la dimostrazione di questo teorema in uno dei seminari alla fine del corso (seminario di Claudia La Chioma). Il teorema ha alcuni semplici ma importanti corollari.

Corollario 9.

$$(67) \quad \text{ind } \mathcal{D}^+ = \frac{1}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_M \text{str}(K_{\frac{n}{2}}) d\text{vol}_M$$

La dimostrazione segue dalla formula di McKean-Singer.

Corollario 10. Se M ha dimensione dispari allora $\text{ind } \mathcal{D}^+ = 0$

Infatti, in questo caso non compare il coefficiente di t^0 .

Corollario 11. Se $\{\mathcal{D}(t)\}_{t \in [0,1]}$ è una famiglia differenziabile di operatori di Dirac, allora

$$\text{ind } \mathcal{D}^+(1) = \text{ind } \mathcal{D}^+(0).$$

La dimostrazione è chiara dalla formula (67) (l'indice è un intero mentre il membro di destra dipende in maniera continua da t).

Corollario 12. Sia $\widetilde{M} \rightarrow M$ un rivestimento a k -fogli di M . Possiamo sollevare su \widetilde{M} la metrica di M ed il modulo di Clifford E . Sia $\mathcal{D}_{\widetilde{M}}$ l'operatore di Dirac indotto. Allora

$$\text{ind } \mathcal{D}_{\widetilde{M}}^+ = k \text{ind } \mathcal{D}_M^+.$$

La dimostrazione segue immediatamente dalla formula (67) (l'integrando essendo un'espressione locale nei coefficienti della metrica e delle connessioni che definiscono l'operatore di Dirac).

Corollario 13. (H. Weyl.) Sia $N(\lambda)$ il numero di autovalori di \mathcal{D}^2 che sono $< \lambda$. Allora vale la seguente formula

$$(68) \quad N(\lambda) \sim \frac{\text{rango}(E) \text{vol}(M)}{(4\pi)^{n/2} \Gamma(\frac{n}{2} + 1)} \lambda^{\frac{n}{2}}$$

Sketch della dimostrazione. Abbiamo visto che da una parte $\text{Tr}(e^{-tD^2}) = \sum e^{-t\lambda_j}$ e dall'altra

$$\text{Tr}(e^{-tD^2}) \sim \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \sum t^j \int_M \text{tr}_{E_x} K_j(x) d\text{vol}(x)$$

con $K_0(x) = \text{Id}_{E_x}$. Quindi

$$\sum e^{-t\lambda_j} = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \text{rango}(E) \text{vol}(M) + O(t^{-n/2+1}).$$

Il corollario è ora una conseguenza di un teorema di analisi reale, il Teorema di Karamata. Per i dettagli vi rimando a [2].

Sia $K_t \in C^\infty(M \times M; E \boxtimes E^*)$ il nucleo del calore. Dato che i nostri argomenti sono puramente locali è naturale considerare preliminarmente il caso in cui M è una varietà spin e E è il fibrato degli spinori: $E = \mathcal{S}$. In questo caso sappiamo che il fibrato degli endomorfismi di E è isomorfo al fibrato di Clifford $\text{Cl}(T^*M)$ e ne segue quindi che $K_t|_\Delta \in C^\infty(M, \text{End}(E)) = C^\infty(M, \text{Cl}(T^*M))$. Questa informazione risulta essere cruciale come vedremo nelle prossime sezioni.

17.2. Lemma di Berezin-Patodi.

Vi ricordo che il nostro obiettivo è di determinare la forma differenziale di grado massimo

$$\text{str}(K_{\frac{n}{2}}) d\text{vol}_M \in C^\infty(M, \Lambda^{\dim M} M).$$

La determinazione esplicita di questa forma differenziale, e quindi la dimostrazione della formula per l'indice, coinvolge 2 aspetti; uno puramente algebrico, l'altro di natura più analitica. Il seguente Lemma è l'ingrediente algebrico fondamentale. Vi ricordo che siamo nell'ipotesi che M sia spin ed E uguale al fibrato degli spinori. Dato che M ha dimensione pari il fibrato degli spinori è \mathbb{Z}_2 -graduato dall'operatore di chiralità Γ ed è quindi ben definita la supertraccia rispetto a questa graduazione.

Sia V uno spazio vettoriale orientato dotato di prodotto scalare. Supponiamo che $\dim V = 2k$; sia $\{e_j\}$ una base ortonormale. Assumiamo che $e_1 \wedge \cdots \wedge e_{2k}$ dia l'orientazione di V . Abbiamo visto (lezioni 10 e 11) che esiste, a meno di isomorfismi, un unico spazio vettoriale complesso \mathbb{Z}_2 -graduato S tale che

$$\text{Cl}(V) = \text{End}(S).$$

Su S è ben definita una supertraccia $\text{str} : \text{End}V \rightarrow \mathbb{C}$. Vi ricordo anche che $\text{Cl}(V)$ è un'algebra filtrata, con

$$(69) \quad \text{Cl}^k(V) = \{v \in \text{Cl}(V) \mid \exists u \in \sum_{j=0}^k V^{\otimes j} \text{ tale che } [u] = v\}.$$

Lemma 9. (*Berezin-Patodi.*) *Tramite l'isomorfismo $\text{Cl}(V) = \text{End}(S)$ si ha:*

$$\text{str} = 0 \text{ su } \text{Cl}^j(V) \text{ , } j < 2k; \quad \text{str}(e_1 \cdots e_{2k}) = 2^k (-1)^k.$$

La dimostrazione, che abbiamo visto in dettaglio in classe, non è difficile ma è qui omessa.

Questo Lemma è fondamentale; sia $m_0 \in M$ e consideriamo un intorno geodetico di m_0 , $U \subset M$. Possiamo banalizzare il fibrato degli spinori $\mathcal{S}|_U$ utilizzando il trasporto parallelo indotto dalla connessione spin (indotta a sua volta dalla connessione di Levi-Civita). Otteniamo

$$\mathcal{S}|_U \simeq U \times S, \quad \text{End}(\mathcal{S})|_U \simeq U \times \text{End}(S)$$

ed è quindi chiaro dal lemma di Berezin-Patodi che soltanto una parte degli endomorfismi che compaiono nello sviluppo del nucleo del calore avranno *supertraccia* non nulla e contribuiranno quindi

alla formula finale. Riassumendo: il Lemma di Berezin-Patodi ci fa sperare che delle “semplificazioni miracolose”³ avranno luogo quando considereremo la *supertraccia* del nucleo del calore.

17.3. L’idea geniale (riscaldamento di Getzler).

Sebbene il lemma di Berezin-Patodi ci faccia ben sperare, bisogna riconoscere che siamo ancora molto lontani da un qualsiasi tipo di formula *esplicita* per la supertraccia del nucleo del calore. La dimostrazione del teorema dell’indice tramite l’equazione del calore fu data per la prima volta da Patodi e Gilkey negli anni ’70. Il loro metodo era quello di determinare abbastanza proprietà della forma differenziale $\text{str}K_{n/2}d\text{vol}_M$ per poter affermare che essa doveva essere *necessariamente* la parte di grado massimo di $\widehat{A}(M)$ ⁴. È stato soltanto nel 1986 che Ezra Getzler ha avuto un’idea veramente geniale che permetteva di calcolare *direttamente* $\text{str}K_{n/2}d\text{vol}_M$; questa idea è basata su un metodo di riscaldamento che tiene conto anche del grado di un endomorfismo, dove il grado di una sezione del fibrato degli endomorfismi è definito dall’identificazione

$$(70) \quad \text{End}(\mathcal{E}) \equiv \mathcal{C}\ell(T^*M).$$

e da (69). Abbiamo visto nella lezione 8 che esiste un isomorfismo di fibrati vettoriali $\sigma : \mathcal{C}\ell(T^*M) \rightarrow \Lambda^*M$; ne segue che se $k \in C^\infty(M, \text{End}(\mathcal{E})) \equiv C^\infty(M, \mathcal{C}\ell(T^*M))$ allora è ben definito $\sigma(k) \in \Omega^*(M)$.

Il seguente teorema implica il teorema di Atiyah-Singer su varietà spin:

Teorema 32. (*E. Getzler*) *Sia (M, g) una varietà riemanniana spin di dimensione $n = 2m$ e sia R la curvatura della connessione di Levi-Civita. Consideriamo lo sviluppo asintotico del nucleo del calore $K_t|_{\Delta}$ associato a \mathbb{D}^2*

$$K_t|_{\Delta} \sim (4\pi t)^{-n/2} \sum t^i K_i, \quad K_i \in C^\infty(M, \text{End}(\mathcal{E})) = C^\infty(M, \mathcal{C}\ell(T^*M)).$$

Allora:

(i) $K_i \in C^\infty(M, \mathcal{C}\ell^{2i}(T^*M))$

(ii) Sia $\sigma_K := \sum_{i=0}^{i=n/2} \sigma_{2i}(K_i)$. Allora

$$(71) \quad \sigma_K = \det^{1/2} \left(\frac{R/2}{\sinh(R/2)} \right).$$

La prima parte del teorema ed il Lemma di Berezin-Patodi implicano che non ci sono singolarità nello sviluppo della supertraccia del nucleo del calore:

$$(72) \quad \text{str}(K_t(x, x)) \sim (4\pi t)^{-n/2} \sum_{i \geq n/2} t^i \text{str}K_i(x).$$

Se $\omega \in \Omega^*(M)$ denotiamo con $\omega_{[n]}$ la sua componente di grado n . La seconda parte del teorema implica, insieme a (72), il teorema dell’indice *locale* perché dimostra che

$$\lim_{t \rightarrow 0} \text{str}(K_t(x, x))d\text{vol}_M = (4\pi)^{-n/2} \text{str}K_{n/2}(x, x)d\text{vol}_M = \widehat{A}(M)_{[n]}(x).$$

L’ultimo passaggio segue dall’identificazione fatta fra $\mathcal{C}\ell(T^*M)$ e Λ^*M e dal Lemma di Berezin-Patodi che identifica la supertraccia su $\mathcal{C}\ell(V)$ con l’integrale di Berezin in Λ^*V (l’integrale di Berezin associa ad un elemento $\omega \in \Lambda^*V$, V spazio vettoriale orientato di dimensione m , il coefficiente di $\omega_{[m]}$ rispetto alla forma di volume).

³Il termine è dovuto a McKean e Singer che avevano risolto in dettaglio il caso $\dim M = 2$

⁴Vi rimando alla lezione 11 per l’enunciato del teorema dell’indice per le varietà spin.

Per il corollario 9 otteniamo infine la magica formula

$$\text{ind}(\mathcal{D}^+) = \int_M \widehat{A}(M).$$

Passiamo al riscaldamento di Getzler. Fissiamo un punto m_0 sulla varietà e banalizziamo il fibrato degli spinori in un intorno geodetico utilizzando il trasporto parallelo. Denotiamo le coordinate normali con x ; in queste coordinate m_0 corrisponde a $0 \in \mathbb{R}^n$. Vi ricordo che in queste coordinate i coefficienti della metrica e della connessione spin hanno un'espressione particolarmente semplice, si veda la lezione 4. Consideriamo $K_t(m, m_0)$; utilizzando coordinate normali e la banalizzazione appena descritta otteniamo una funzione $k(t, x) \in C^\infty(\mathbb{R}^+ \times U, \text{End}(S))$ con S lo spazio vettoriale degli spinori associato allo spazio vettoriale con prodotto scalare $V := T_{m_0}^*M$. Per il ben noto isomorfismo $\text{End}(S) \cong \text{Cl}(V)$ otteniamo $k(t, x) \in C^\infty(\mathbb{R}^+ \times U, \text{Cl}(V))$ e quindi, tramite l'isomorfismo di spazi vettoriali $\sigma : \text{Cl}(V) \rightarrow \Lambda^*V$, un elemento in $C^\infty(\mathbb{R}^+ \times U, \Lambda^*V)$.

Sia $u \in (0, 1]$. Definiamo un riscaldamento δ_u su un elemento $\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}^+ \times U, \Lambda^*V)$ come segue

$$(73) \quad (\delta_u \alpha)(t, x) = \sum_{i=0}^n u^{-i/2} \alpha(ut, u^{1/2}x)_{[i]}.$$

Questa operazione induce un riscaldamento per alcuni importanti operatori lineari sullo spazio vettoriale $C^\infty(\mathbb{R}^+ \times U, \Lambda^*V)$. Più precisamente

$$\delta_u \partial_t \delta_u^{-1} = u^{-1} \partial_t, \quad \delta_u \partial_j \delta_u^{-1} = u^{-1/2} \partial_j.$$

Analogamente, se $\xi \in V^*$ allora la moltiplicazione esterna per ξ viene riscalata di $u^{-1/2}$ mentre la moltiplicazione interna viene riscalata di $u^{1/2}$.

Definizione 33. *Il nucleo del calore riscalato $r(u, t, x)$ è definito da*

$$r(u, t, x) := u^{n/2} (\delta_u k)(t, x)$$

È facile vedere che il teorema di Getzler segue dall'esistenza del seguente limite:

$$(74) \quad \lim_{u \rightarrow 0} r(u, t=1, x=0) = (4\pi)^{n/2} \det^{1/2} \left(\frac{R/2}{\sinh R/2} \right) (m_0).$$

Sia L l'operatore differenziale indotto da \mathcal{D}^2 in U tramite la banalizzazione fissata. Sia $L(u) := u \delta_u L \delta_u^{-1}$. Facendo qualche calcolo vediamo che $r(u, t, x)$ soddisfa l'equazione:

$$(\partial_t + L(u))r(u, t, x) = 0.$$

Il seguente teorema è il punto cruciale della dimostrazione di Getzler:

Teorema 33. *Sia $R_{ij} = (R(m_0) \partial_i, \partial_j)$. Per la famiglia di operatori differenziali $L(u)$, $L(u) : C^\infty(U, \Lambda^*V) \rightarrow C^\infty(U, \Lambda^*V)$, si ha $L(u) = K + O(u^{1/2})$ con*

$$(75) \quad K = - \sum_j \left(\partial_i - \frac{1}{4} \sum_j R_{ij} x_j \right)^2$$

Abbiamo dimostrato in dettaglio questo teorema in classe dove abbiamo scoperto che esso è, in ultima analisi, una conseguenza della formula di Lichnerowicz per \mathcal{D}^2 (si veda la lezione 12). Il punto fondamentale è che K è un oscillatore armonico generalizzato in \mathbb{R}^n e, come vedremo fra breve, l'equazione del calore per un tale operatore può essere risolta esplicitamente.

17.4. Oscillatore armonico e formula di Mehler.

Cominciamo con un caso semplice. Consideriamo l'oscillatore armonico

$$H = -\frac{d^2}{dx^2} + x^2$$

sulla retta reale. Cerchiamo una funzione $p_t(x, y)$, $t > 0$, che chiameremo nucleo del calore per H , soddisfacente le seguenti proprietà:

- (i) l'applicazione $\phi \rightarrow \phi_t$ con $\phi_t(x) = \int_{\mathbb{R}} p_t(x, y)\phi(y)dy$ è limitata in \mathcal{S} , lo spazio delle funzioni a decrescenza rapida.
- (ii) $(\partial_t + H)\phi_t(x) = 0$
- (iii) $\lim_{t \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} p_t(x, y)\phi(y)dy = \phi(x)$

Un calcolo diretto mostra che la seguente funzione è una soluzione di questo problema:

$$p_t(x, y) = 2\pi \sinh 2t)^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{2}(\coth 2t)(x^2 + y^2) - 2(\operatorname{cosech} 2t)xy\right).$$

Questa formula è nota come formula di Mehler. Noi saremo interessati al caso $y = 0$; denotiamo con $p_t(x)$ il nucleo del calore in $(x, 0)$.

Si può generalizzare la formula di Mehler per $p_t(x)$ ad operatori più generali dell'oscillatore armonico. Innanzitutto possiamo trovare una formula per un operatore del tipo (sempre in \mathbb{R}):

$$-\frac{d^2}{dx^2} + r^2 x^2/16 + \omega$$

con $r, \omega \in \mathbb{R}$. Si può ulteriormente generalizzare sostituendo a \mathbb{R} uno spazio vettoriale V qualsiasi e considerando

$$H = -\sum_j \left(\partial_i - \frac{1}{4} \sum_j R_{ij} x_j \right)^2 + \Omega$$

dove R_{ij} è una matrice antisimmetrica ed Ω è una qualsiasi matrice. Infine R_{ij} ed Ω possono essere presi con coefficienti in un'algebra commutativa \mathcal{A} , come ad esempio l'algebra $\mathcal{A} = \Lambda^2 V$ (questo sarà precisamente il nostro caso). Facendo un pò di conti si dimostra quanto segue

Proposizione 29. *Il nucleo del calore $p_t(x, R_{ij}, \Omega)$, con valori in $\mathcal{A} \otimes \operatorname{End}(\mathbb{C}^n)$, associato all'operatore*

$$H = -\sum_j \left(\partial_i - \frac{1}{4} \sum_j R_{ij} x_j \right)^2 + \Omega$$

è esplicitamente calcolabile:

$$(76) \quad p_t(x, R_{ij}, \Omega) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \det^{1/2} \left(\frac{tR_{ij}/2}{\sinh tR_{ij}/2} \right) \exp \left(-\frac{1}{4t} \langle \frac{tR_{ij}}{2} \coth \left(\frac{tR_{ij}}{2} \right) x, x \rangle - t\Omega \right).$$

Torniamo all'operatore di Dirac su una varietà spin. Utilizzando il fatto che $L(u) = K + O(u^{1/2})$, con K un oscillatore armonico generalizzato (con $\Omega = 0$ in questo caso) si può dimostrare che $r(u, t, x)$ ha un limite per $u \rightarrow 0$ e che questo limite è proprio la soluzione dell'equazione del calore per l'operatore K . Dal punto di vista analitico questo è il punto più delicato della dimostrazione e l'unica referenza veramente rigorosa è a mio avviso [2]. Notiamo che la dimostrazione di questo fatto fondamentale fa uso della dimostrazione dell'esistenza dello sviluppo asintotico per t piccolo ed è qui omessa dato che non ho riportato la dimostrazione dell'esistenza dello sviluppo asintotico.

Utilizzando la formula di Mehler (76) e ponendo in essa $t = 1$ ed $x = 0$ otteniamo immediatamente (74) e quindi il teorema 32. Se \mathcal{D}_W è l'operatore di Dirac a valori in un fibrato W allora dalla

formula di Lichnerowicz otteniamo per l'operatore limite K un oscillatore armonico ma con Ω diverso da zero e più precisamente uguale alla curvatura della connessione di ∇^W in m_0 . Applicando nuovamente la formula di Mehler si ottiene per il limite $t \rightarrow 0$ della supertraccia del nucleo del calore la componente di grado n della forma

$$\widehat{A}(M)Ch(W, \nabla^W)$$

e quindi, ancora una volta, il teorema dell'indice. Dato che localmente questa è la situazione generale (si veda la lezione 11) il teorema dell'indice per operatori di Dirac generalizzati è finalmente dimostrato.

REFERENCES

- [1] M. Atiyah. *K-Theory*, Benjamin, New York, 1967.
- [2] N. Berline, E. Getzler e M. Vergne. *Heat kernels and Dirac operators*, Springer-Verlag 1992.
- [3] J. Milnor. *Morse Theory*. Princeton University Press, Princeton 1963.
- [4] J. Roe. *Elliptic operators, topology and asymptotic methods*. Longman Scientific and Technical 1988.
- [5] M. Spivak. *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, vol. II, II ed., Publish or Perish, Inc., Wilmington, Delaware, 1979.