Paolo Piazza

Corso di Laurea Magistrale

Lezioni di Geometria Superiore

a.a. 2017-18

Contents

1. Ripasso di Geometria Differenziale I.

1.1. Varietà differenziabili reali.

Per la definizione di varietà differenziabile reale potete consultare Warner [15], da p. 5 a p. 8. In alternativa, Kodaira [7, Definizione 2.6]. Il Kodaira definisce prima le varietà complesse e poi quelle reali, ma non dovreste avere problemi perché le idee sono molto simili. Un'altra buona referenza è Sernesi [12], Capitolo 5. È importante ripassare anche la nozione di partizione dell'unità subordinata ad un ricoprimento.

1.2. Varietà complesse.

Potete consultare il Kodaira [7, Def. 2.3] oppure il Griffith-Harris [4, p.14] oppure il Wells [16].

1.3. Spazio tangente ad una varietà differenziabile in un punto.

Vi rimando a Sernesi [12], sezione 21.
In alternativa Warner [15], da pag 11 a pag 15.

1.4. Ripasso di Algebra Multilineare.

- Sernesi, Geometria 2. Da p. 331 a p. 334.
- Warner, Foundations etc. Da p. 54 a p. 62.
- Lang, Algebra Lineare. Da pag 280 a pag 302.

2. Fibrati vettoriali I.

2.1. Definizione di fibrato vettoriale.

Definizione 1. Un *fibrato vettoriale* C^∞ di rango k è una terna (E, π, M), dove E e M sono varietà C^∞, $\pi : E \to M$ è un'applicazione C^∞ suriettiva, tale che per ogni $m \in M$

(i) la fibra $E_m = \pi^{-1}(m)$ ha una struttura di spazio vettoriale di dimensione k;

(ii) esiste un intorno U di m e un diffeomorfismo $\varphi_U : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^k$ tale che per ogni $m' \in U$

a) $\varphi_U(E_{m'}) \subseteq \{m'\} \times \mathbb{R}^k$

b) $\varphi_U|_{E_{m'}} : E_{m'} \to \{m'\} \times \mathbb{R}^k$ è un isomorfismo di spazi vettoriali.

La varietà M è detta *base* del fibrato; la varietà E è detta *spazio totale* del fibrato.
Gli intorni U sono detti *intorni banalizzanti*, i diffeomorfismi φ_U *banalizzazioni locali.*
Se per ogni $m \in M$ l'intorno U può essere scelto uguale ad M, il fibrato vettoriale si dice *banale.*

Notazione. Denoteremo spesso il fibrato (E, π, M) con $(E \to M)$, oppure, semplicemente con E.

Definizioni analoghe.

- Fibrati vettoriali nella categoria degli spazi topologici e applicazioni continue.

- Fibrati vettoriali su $\mathbb{C}$.

- Se M ed E sono varietà complesse (quindi le carte $\psi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{C}^n$ hanno valori in $\mathbb{C}^n$ e le funzioni di transizione $\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1} : \psi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \subseteq \mathbb{C}^n \to \psi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \subseteq \mathbb{C}^n$ sono biolomorfe) allora (E, π, M) è un fibrato vettoriale complesso *olomorfo* se ogni banalizzazione locale $\varphi_U : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{C}^k$ è biolomorfa.

2.2. Funzioni di transizione.

Dalla definizione segue che M ammette un ricoprimento $\{U_\alpha\}$ con intorni banalizzanti, che chiameremo *ricoprimento banalizzante.* Per ogni coppia di aperti U_α, U_β del ricoprimento, con $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, e per ogni $m \in U_\alpha \cap U_\beta$ l'applicazione

$$g_{\alpha\beta}(m) = \varphi_{U_\alpha}|_{E_m} \circ \left(\varphi_{U_\beta}^{-1}\Big|_{\{m\}\times\mathbb{R}^k} \right) :$$
$$\{m\} \times \mathbb{R}^k \to \{m\} \times \mathbb{R}^k$$

è un isomorfismo di spazi vettoriali.
Allora possiamo pensare alle $g_{\alpha\beta}(m)$ come applicazioni

$$g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to GL(k, \mathbb{R}).$$

Queste vengono dette *funzioni di transizione* e verificano due proprietà:
1) $g_{\alpha\alpha}(m) = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^k}\ \forall m \in U_\alpha \cap U_\beta$,
2) $g_{\alpha\beta} \circ g_{\beta\gamma} = g_{\alpha\gamma}$ in $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$.

Se M è una varietà differenziabile e se sono dati un ricoprimento $\{U_\alpha\}$ di M e mappe $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to GL(k, \mathbb{R})$ soddisfacenti le proprietà 1) e 2), allora è possibile definire un fibrato vettoriale

(E, π, M) che ammetta le $g_{\alpha\beta}$ come funzioni di transizione. Precisamente, consideriamo l'insieme $\widehat{E}$ ottenuto prendendo l'unione disgiunta di tutti gli intorni $U_\alpha \times \mathbb{R}^k$; $\widehat{E}$ ha una naturale topologia. Introduciamo una relazione d'equivalenza $\mathcal{R}$ in $\widehat{E}$ come segue

$$U_\alpha \times \mathbb{R}^k \ni (x, e)\, \mathcal{R}\, (y, f) \in U_\beta \times \mathbb{R}^k \Leftrightarrow x = y \text{ e } e = g_{\alpha\beta}(x) f$$

Sia E lo spazio quoziente dotato della topologia indotta e sia $\pi : E \to M$ la mappa che associa alla classe d'equivalenza di (x, e) il punto $x \in M$. Uno degli esercizi del *secondo compito a casa* consiste nel dimostrare che (E, π, M) ha una naturale struttura di fibrato vettoriale.

Quindi si può dare una definizione alternativa di fibrato vettoriale, come una varietà M su cui siano dati un ricoprimento $\{U_\alpha\}$ e una collezione di mappe differenziabili $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to GL(k, \mathbb{R})$ soddisfacenti le proprietà 1) e 2).

2.3. **Morfismi di fibrati.**

Definizione 2. Siano (E, π, M) e (F, π', M) due fibrati vettoriali (sulla stessa base). Un *morfismo di fibrati* da (E, π, M) a (F, π', M) è un'applicazione differenziabile $f : E \to F$ che manda omomorficamente fibre in fibre corrispondenti, ovvero tale che per ogni $m \in M$

1) $f(E_m) \subseteq F_m$
2) $f|_{E_m} : E_m \to F_m$ è un omomorfismo di spazi vettoriali.

Un morfismo di fibrati $f : E \to F$ si dice *isomorfismo di fibrati* se è un diffeomorphismo e manda isomorficamente fibre in fibre corrispondenti, ovvero se per ogni $m \in M$

$$f|_{E_m} : E_m \to F_m$$

è un isomorfismo di spazi vettoriali. Un'analoga definizione vale nel caso topologico (richiederemo semplicemente che f sia continua e, nel caso di un isomorfismo, che sia un omeomorfismo).
Il seguente lemma è di facile dimostrazione (sarà un esercizio).

Lemma 1. Siano (E, π_E, M) e (F, π_F, M) due fibrati vettoriali. Sia $f : E \to F$ un morfismo di fibrati e supponiamo che $f|_{E_m}$ sia un isomorfismo per ogni $m \in M$. Allora f è un isomorfismo di fibrati (e cioè f è anche un diffeomorfismo).

2.4. **Esempi notevoli.**

Esempio 1. Sia M una varietà differenziabile. Per ogni punto $m \in M$ indichiamo con $T_m M$ lo spazio tangente alla varietà M nel punto m. Poniamo

$$TM = \bigcup_{m \in M} T_m M$$

e definiamo $\pi : TM \to M$ ponendo $\pi(x) = m$ se $x \in T_m M$. Si verifica che (TM, π, M) è un fibrato vettoriale il cui rango è uguale alla dimensione di M. Anche questo sarà un esercizio. Tale fibrato vettoriale si dice *fibrato tangente* ad M. Per ulteriori informazioni potete consultare [15].

Esempio 2. Sia $\mathbb{R}P^n$ lo spazio proiettivo di dimensione n. Ricordiamo che $\mathbb{R}P^n \cong S^n / \sim$, dove $\sim$ è la relazione che identifica i vettori $\underline{x}$ e $-\underline{x}$. Sappiamo che $\mathbb{R}P^n$ è una varietà differenziabile compatta. Consideriamo l'insieme

$$E_1\left(\mathbb{R}^{n+1}\right) = \left\{ ([\underline{x}], \underline{v}) \in \mathbb{R}P^n \times \mathbb{R}^{n+1} : \underline{v} = \lambda \underline{x} \right\}$$

e l'applicazione $\pi : E_1\left(\mathbb{R}^{n+1}\right) \to \mathbb{R}P^n$ definita da $\pi([\underline{x}], \underline{v}) = [\underline{x}]$. La terna $\left(E_1\left(\mathbb{R}^{n+1}\right), \pi, \mathbb{R}P^n\right)$ è un fibrato vettoriale di rango 1. Facciamo vedere come trovare banalizzazioni locali: per ogni

$[\underline{x}] \in \mathbb{R}P^n$, consideriamo U_1, un intorno di $\underline{x}$ in S^n ad intesezione vuota con la sua immagine tramite la mappa antipodale; l'aperto $U = U_1/\sim\, \subseteq \mathbb{R}P^n$ è un intorno banalizzante di $[\underline{x}]$ e il diffeomorfismo $\varphi_U : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}$ definito da $\varphi_U([\underline{x}], t\underline{x}) = ([\underline{x}], t)$ è una banalizzazione locale.
Analogamente la terna $\left(E_1\left(\mathbb{C}^{n+1}\right), \pi, \mathbb{C}P^n\right)$ è un fibrato vettoriale complesso olomorfo di rango 1.

Esempio 3. Sia $n > k$. Poniamo

$$G_k(\mathbb{R}^n) = \{\text{sottospazi vettoriali } k\text{−dimensionali di } \mathbb{R}^n\}.$$

Lo spazio $G_k(\mathbb{R}^n)$ ha una naturale topologia: sia $V_k(\mathbb{R}^n)$ l'aperto di $\mathbb{R}^n \times\times \cdots \times \mathbb{R}^n$ k-volte costituito dalle k-ple di vettori linearmente indipendenti. Esiste una suriezione $\pi : V_k(\mathbb{R}^n) \to G_k(\mathbb{R}^n)$

$$\pi(\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_k) = \mathrm{Span}(\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_k).$$

Dotiamo $G_k(\mathbb{R}^n)$ della topologia quoziente: U è aperto in $G_k(\mathbb{R}^n)$ se e solo se $\pi^{-1}(U)$ è aperto in $V_k(\mathbb{R}^n)$. $G_k(\mathbb{R}^n)$ ha una naturale struttura di varietà differenziabile compatta connessa di dimensione $n(n-k)$ [1]. $G_k(\mathbb{R}^n)$ è detta la *Grassmanniana dei k-piani in* $\mathbb{R}^n$.
Consideriamo l'insieme

$$E_k(\mathbb{R}^n) = \{(p, \underline{v}) \in G_k(\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n : \underline{v} \in p\}$$

e l'applicazione $\pi : E_k(\mathbb{R}^n) \to G_k(\mathbb{R}^n)$ definita da $\pi(p, \underline{v}) = p$. La terna $(E_k(\mathbb{R}^n), \pi, G_k(\mathbb{R}^n))$ è un fibrato vettoriale di rango k e C^∞. La verifica di questa ultima affermazione è un interessante esercizio [2]. Si noti che per $k = 1$ riotteniamo l'esempio 2.
$(E_k(\mathbb{R}^n), \pi, G_k(\mathbb{R}^n))$ è detto *fibrato universale* sulla Grassmanniana.

Esempio 4. Analogamente lo spazio $G_k(\mathbb{C}^n)$ è una varietà complessa compatta di dimensione complessa $n(n-k)$ e la terna $(E_n(\mathbb{C}^n), \pi, G_k(\mathbb{C}^n))$ è un fibrato vettoriale complesso olomorfo di rango k, detto *fibrato universale* su $G_k(\mathbb{C}^n)$.

Osservazioni.
1. Se $T \in GL(n, \mathbb{C})$ allora T induce un'applicazione $T_\sharp : G_k(\mathbb{C}^n) \to G_k(\mathbb{C}^n)$, che è un diffeomorfismo.
2. C'è un'applicazione naturale

$$\psi : G_k(\mathbb{R}^n) \to G_{n-k}(\mathbb{R}^n) \tag{1}$$

ottenuta mandando V in $V^\perp$. Quest'applicazione è un diffeomorfismo.
3. Alcuni autori definiscono la Grassmanniana $G_k(\mathbb{C}^n)$ come l'insieme dei sottospazi di *codimensione* k in $\mathbb{C}^n$. Le due definizioni sono compatibili tramite l'applicazione ψ in (1).

2.5. **Operazioni sui fibrati.**

Dati 2 fibrati su M (E, π^E, M), (F, π^F, M) si possono definire i fibrati

$$E^*, \;\; E \otimes F, \;\; E \oplus F, \;\; \Lambda^n E, \;\; \mathrm{Hom}(E, F) \equiv E \otimes F^*$$

a partire dalle corrispondenti operazioni sulle fibre. Ad esempio, poniamo

$$E \oplus F := \cup_{m \in M} E_m \oplus F_m;$$

rimane allora definito il fibrato $(E \oplus F, \pi^{E\oplus F}, M)$ che per costruzione ha come fibre $(\pi^{E\oplus F})^{-1}(m) = E_m \oplus F_m$. La banalità locale è ereditata da quella di E ed F: per ipotesi $\forall m \in M$ esistono aperti U^E , U^F e diffeomorfismi locali

$$\phi^E : (\pi^E)^{-1}(U^E) \to U^E \times \mathbb{R}^k$$

[1] Lungo esercizio "guidato" del primo compito a casa

[2] per il quale però dovete aver risolto l'esercizio sulla Grassmanniana

$$\phi^F : (\pi^F)^{-1}(U^F) \to U^F \times \mathbb{R}^n$$

con cui si costruisce il diffeomorfismo

$$\phi^{E\oplus F} : (\pi^{E\oplus F})^{-1}(U^E \cap U^F) \to U^E \cap U^F \times \mathbb{R}^{k+n}$$

che dà la banalizzazione di $E \oplus F$. Lascio a voi i dettagli.

2.6. **Fibrato indotto da un'applicazione (pull-back).**

Sia $f : N \to M$ un'applicazione tra le varietà differenziabili M ed N e sia (E, π, M) un fibrato su M. Si consideri l'insieme

$$f^*E = \{(n, v) \in N \times E | f(n) = \pi(v)\}.$$

Utilizzando il fatto che $f^*E = \Phi^{-1}(\Delta)$, con Δ la diagonale in $M \times M$ e $\Phi(n, v) := (f(n), \pi(v))$, si dimostra che f^*E è una sottovarietà di $N \times E$ e che ha, quindi, una naturale struttura di varietà differenziabile [3]. Esistono due applicazioni naturali $\hat{f}$ e π^{ind}:

$$\hat{f} : f^*E \to E \text{ con } \hat{f}(n, v) = v$$

$$\pi^{\text{ind}} : f^*E \to N \text{ con } \pi^{\text{ind}}(n, v) = n$$

La terna (f^*E, π^{ind}, N) ha una naturale struttura di fibrato vettoriale; esso è, per definizione, il *fibrato indotto da f su N* (o fibrato pull-back tramite f).
La fibra di f^*E su n è $E_{f(n)}$, come segue subito dalla definizione; quindi $(f^*E)_n$ ha una struttura di spazio vettoriale per ogni $n \in N$, come deve essere.
Facciamo vedere la banalità locale:
sia U un intorno banalizzante di M; $f^{-1}(U)$ è allora un aperto di N e si ponga $f^{-1}(U) = \tilde{U}$. Sia

$$\psi : U \times \mathbb{R}^k \to \pi^{-1}(U)$$

una banalizzazione di $\pi^{-1}(U)$. Si definisca:

$$\tilde{\psi} : \tilde{U} \times \mathbb{R}^k \to (\pi^{\text{ind}})^{-1}(\tilde{U})$$

con

$$\tilde{\psi}(n, v) = (n, \psi(f(n), v))$$

Si ha $\pi(\psi(f(n), v)) = f(n)$ come deve essere. Non è difficile verificare che $\tilde{\psi}$ è un diffeomorfismo [4]

Osservazioni.
1. Se (E, π, M) è banale e $f : N \to M$ è un'applicazione differenziabile allora il fibrato indotto su N , f^*E, è anche banale (questo fatto discende immediatamente da quanto visto sopra).
Analogamente, è immediato verificare che se (E, π_E, M) e (F, π_F, M) sono due fibrati isomorfi, allora f^*E è isomorfo a f^*F; infatti se $\Phi : E \to F$ è un isomorfismo di fibrati allora $\Psi : f^*E \to f^*F$, $\Psi(n, e) = (n, \Phi(e))$ è ben definita, continua e induce isomorfismo da $(f^*E)_n$ a $(f^*F)_n$ ed è quindi un isomorfismo di fibrati.
2. Notare che, per costruzione,

$$f \circ \pi^{\text{ind}} = \hat{f} \circ \pi \tag{2}$$

e che $\hat{f}$ è un'applicazione continua che manda la fibra di f^*E su n isomorficamente nella fibra di E su $f(n)$: questa properietà caratterizza univocamente il fibrato pull-back a meno di isomorfismi. Si veda [5].

---

[3] Si veda ad esempio [15], Theorem 1.39.
[4] l' inversa è $\tilde{\psi}^{-1} : (\pi^{\text{ind}})^{-1}(\tilde{U}) \to \tilde{U} \times \mathbb{R}^k$ definita da $\tilde{\psi}^{-1}(n, w) = (n, \hat{w})$ con $\psi(n, \hat{w}) = w$.

3. Se $g : Z \to Y$ e $f : Y \to X$ sono due mappe C^∞, allora $(f \circ g)^*E$ è isomorfo a $g^*(f^*E)$: $(f \circ g)^*E \cong g^*(f^*E)$: basterà mandare $(z, e) \in (f \circ g)^*E$ in $(z, (g(z), e)) \in g^*(f^*E)$.
4. Se $i : Y \hookrightarrow X$ è un'inclusione allora ha senso considerare la restrizione di E ad Y, denotata $E|_Y$ (lascio a voi la definizione). Si ha $E|_Y \cong i^*E$: basterà mandare $e \in E|_Y$ in $(\pi(e), e)$.
5. Si può dare una definizione di fibrato indotto utilizzando le funzioni di transizione: se $E = \{(U_\alpha, g_{\alpha\beta})\}$, si ponga

$$f^*E = \{(f^{-1}(U_\alpha), g_{\alpha\beta} \circ f)\}.$$

6. Se $f : N \to M$ è un'applicazione costante, $f(n) = m_0, \forall n \in N$, allora f^*E è banale, perché uguale al fibrato prodotto $N \times E_{m_0}$.

3. **Fibrati vettoriali II .**

3.1. **Sezioni di un fibrato.**

Definizione 3. Sia (E, π, M) un fibrato vettoriale. Una *sezione* C^{∞} del fibrato è un'applicazione differenziabile $s : M \to E$ tale che $\pi \circ s = \mathrm{Id}|_M$ ovvero tale che per ogni $m \in M$ risulti $s(m) \in E_m = \pi^{-1}(m)$.

Denotiamo con $C^{\infty}(M, E)$ l'insieme delle sezioni C^{∞} del fibrato (E, π, M) [5]. Si noti che, poiché ogni fibra è una spazio vettoriale, anche $C^{\infty}(M, E)$ è uno spazio vettoriale, le cui operazioni sono definite punto per punto. Notiamo anche che $C^{\infty}(M, E)$ ha una naturale struttura di $C^{\infty}(M)$-mudulo: se $f \in C^{\infty}(M)$ e $s \in C^{\infty}(M, E)$ allora fs è la sezione che in m vale $f(m)s(m)$.

Proposizione 1. *Un fibrato vettoriale (E, π, M) di rango k è banale se e solo se esistono k sezioni C^{∞} $s_1, ..., s_k$ linearmente indipendenti, ovvero tali che $s_1(m), ..., s_k(m)$ siano linearmente indipendenti per ogni $m \in M$.*

Dimostrazione.
$\boxed{\Rightarrow}$ Supponiamo (E, π, M) banale. Allora esiste una mappa di fibrati $\Phi : E \to M \times \mathbb{R}^k$ che induce un isomorfismo $\Phi : E_m \to \{m\} \times \mathbb{R}^k$ su ogni fibra. Sia $\Psi = \Phi^{-1} : M \times \mathbb{R}^k \to E$ e definiamo le applicazioni $s_i : M \to E$ ponendo $s_i(m) = \Psi(m, \underline{e}_i)$ (dove $\underline{e}_i$ è l'i -simo vettore canonico di $\mathbb{R}^k$). Le applicazioni $s_1, ..., s_k$ sono sezioni C^{∞} e per costruzione sono linearmente indipendenti.
$\boxed{\Leftarrow}$ Supponiamo che esistano k sezioni C^{∞} $s_1, ..., s_k$ linearmente indipendenti. Definiamo $\Psi : M \times \mathbb{R}^k \to E$ ponendo $\Psi(m, \underline{x}) = x^1 s_1(m) + ... + x^k s_k(m)$. L'applicazione Ψ è C^{∞} e induce un isomorfismo su ogni fibra. Allora non è difficile vedere, questo è il Lemma 1, che Ψ è un diffeomorfismo. Quindi (E, π, M) è banale. $\square$

Osservazione 1. Notiamo che la dimostrazione stabilisce l'esistenza *locale* di k sezioni linearmente indipendenti su ogni aperto banalizzante. Si dice che queste sezioni costituiscono una **base locale**. In particolare, utilizzando una partizione dell'unità, vediamo che se M è compatta allora $C^{\infty}(M, E)$ *è un modulo finitamente generato su* $C^{\infty}(M)$. Lascio a voi i semplici dettagli.

Osservazione 2. Se $f : N \to M$ è una mappa C^{∞} ed E è un fibrato su M allora otteniamo una mappa lineare indotta $f^* : C^{\infty}(M; E) \to C^{\infty}(N, f^*E)$ associando a s la sezione f^*s, con $(f^*s)(n) := s(f(n))$. Notiamo che questa mappa porta una base locale di E nell'intorno banalizzante U_α in una base locale di f^*E nell'intorno banalizzante $f^{-1}(U_\alpha)$. In particolare, utilizzando anche la precedente osservazione, vediamo che $C^{\infty}(N, f^*E)$ è generato, come modulo su $C^{\infty}(N)$, dall'immagine di $f^* : C^{\infty}(M; E) \to C^{\infty}(N, f^*E)$.

Osservazione 3. Consideriamo un morfismo di fibrati $f : E \to F$. È allora chiaro che f definisce in maniera naturale una sezione $s_f \in C^{\infty}(M, \mathrm{Hom}(E, F))$: basterà porre $s_f(m) := f|_{E_m}$. Supponiamo che $m_0 \in M$ sia tale che $s_f(m_0) \in \mathrm{Iso}(E_{m_0}, F_{m_0})$, allora esiste un intorno aperto di m_0, U, tale che $s_f(m) \in \mathrm{Iso}(E_m, F_m)$ $\forall m \in U$ (per la dimostrazione basterà considerare un intorno banalizzante di m_0 ed utilizzare il fatto che $GL(k, \mathbb{R})$ è aperto in $M_{k \times k}(\mathbb{R})$).

[5] In molti libri trovate il simbolo $\Gamma(E)$ per lo spazio delle sezioni di E

Esempio. Il fibrato $\left(E_1\left(\mathbb{R}^{n+1}\right), \pi, \mathbb{R}P^n\right)$ non è banale.

Dimostrazione. Basta far vedere che ogni $s \in C^\infty\left(\mathbb{R}P^n, E_1\left(\mathbb{R}^{n+1}\right)\right)$ si annulla in un punto. Sia $s : \mathbb{R}P^n \to E_1\left(\mathbb{R}^{n+1}\right)$ una sezione. Sia $p : S^n \to \mathbb{R}P^n$ la proiezione canonica. L'applicazione $q = s \circ p : S^n \to E_1\left(\mathbb{R}^{n+1}\right)$ è tale che $q(\underline{x}) = ([\underline{x}], t(\underline{x})\underline{x})$, con $t \in C^\infty(S^n)$. Inoltre, poiché $q(-\underline{x}) = q(\underline{x})$, si deve avere $t(-\underline{x}) = -t(\underline{x})$. Allora, poiché S^n è connessa e in particolare $t \in C^0(S^n)$, deve esistere $\underline{x}_0 \in S_n$ tale che $t(\underline{x}_0) = 0$, ovvero tale che $s([\underline{x}_0]) = ([\underline{x}_0], \underline{0})$. $\square$

Possiamo dare anche una definizione alternativa di sezione. Sia (E, π, M) un fibrato vettoriale, con ricoprimento $\{U_\alpha\}$ e funzioni di transizione $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to GL(k, \mathbb{R})$. Una *sezione* C^∞ del fibrato è allora una collezione $\{s_\alpha\}$ di mappe $s_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}^k$ differenziabili tali che per ogni coppia di aperti U_α e U_β non disgiunti e per ogni $m \in U_\alpha \cap U_\beta$ risulti

$$s_\alpha(m) = g_{\alpha\beta}(m)\, s_\beta(m)\,.$$

Le due definizioni sono equivalenti come ora mostreremo.
Sia s una sezione C^∞ (nel senso della prima definizione). Occorre verificare che esiste una collezione $\{s_\alpha\}$ di mappe che soddisfa le condizioni richieste nella seconda definizione. Sia $m \in M$ e siano U_α un intorno di m banalizzante e φ_α una banalizzazione locale su U_α. Se $\underline{e}_1, ..., \underline{e}_k$ sono i vettori della base canonica di $\mathbb{R}^n$, $\varphi_\alpha^{-1}(m, \underline{e}_1), ..., \varphi_\alpha^{-1}(m, \underline{e}_k)$ sono una base di E_m. Quindi esistono k numeri, che chiamo

$$s_\alpha^1(m), ..., s_\alpha^k(m)$$

tali che

$$s(m) = \sum_{i=1}^{k} s_\alpha^i(m)\, \varphi_\alpha^{-1}(m, \underline{e}_i)\,.$$

Allora, considerando la restrizione di s a $U_\alpha \cap U_\beta$, si ha

$$s|_{U_\alpha \cap U_\beta} = \sum_{i=1}^{k} s_\alpha^i(m)\, \varphi_\alpha^{-1}(m, \underline{e}_i) = \sum_{i=1}^{k} s_\beta^i(m)\, \varphi_\beta^{-1}(m, \underline{e}_i)\,.$$

Applicando φ_α al secondo e terzo membro, si ha

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k} s_\alpha^i(m)\ \underline{e}_i \quad &= \quad \sum_{i=1}^{k} s_\beta^i(m)\left(\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}\right)(m, \underline{e}_i) = \\
&= \quad \sum_{i=1}^{k} s_\beta^i(m)\, g_{\alpha\beta}(m)\,(\underline{e}_i) = \\
&= \quad \sum_{i=1}^{k} s_\beta^i(m)\,(g_{\alpha\beta}(m))_i^j\,(\underline{e}_j)\,.
\end{aligned}$$

dove l'indice in basso in $(g_{\alpha\beta}(m))_i^j$ è l'indice di colonna.

Quindi

$$s_\alpha^k(m) = s_\beta^i(m)\,(g_{\alpha\beta}(m))_i^k\,,$$

Allora, ponendo $s_\alpha = \left(s_\alpha^1, ..., s_\alpha^k\right)^t$, si ottiene

$$s_\alpha = g_{\alpha\beta}\, s_\beta.$$

Quindi la collezione $\{s_\alpha\}$ soddisfa le condizioni richieste nella seconda definizione.
Il viceversa è chiaro: se sono date le $\{s_\alpha\}$ e le banalizzazioni, allora possiamo definire una sezione globale s (scrivete i dettagli per esercizio).

3.2. **Il semigruppo** $\mathrm{Vect}(X)$**. Teorema di omotopia.**

In questa sottosezione lavoreremo nella categoria degli spazi topologici e funzioni continue.

Definizione 4. Sia X uno spazio topologico compatto di Hausdorff [6]. $\mathrm{Vect}_k(X)$ è per definizione l'insieme delle classi di isomorfismo di fibrati vettoriali *complessi* di rango k. Analogamente si definisce $\mathrm{Vect}_k^{\mathbb{R}}(X)$, le classi di isomorfismo di fibrati vettoriali *reali* di rango k. Poniamo $\mathrm{Vect}(X) = \cup_k \mathrm{Vect}_k(X)$.

È importante notare che $\mathrm{Vect}(X)$ è un *semigruppo* abeliano rispetto all'operazione $\oplus$, con elemento neutro uguale al fibrato banale $X \times \{0\}$. Notiamo anche che se $f : Y \to X$ è continua allora l'operazione di pull-back induce un morfismo di semigruppi $f^* : \mathrm{Vect}(X) \to \mathrm{Vect}(Y)$. Abbiamo quindi definito un funtore $\mathrm{Vect}(\quad)$ dalla categoria degli spazi topologici compatti e applicazioni continue alla categoria dei semigruppi abeliani e morfismi di semigruppi. Questo funtore risulta essere *omotopico*: questa fatto fondamentale è conseguenza del seguente teorema

Teorema 1. *(di omotopia) Sia Y compatto e siano f_0, f_1, due applicazioni continue $Y \to X$. Sia $(E \to X)$ un fibrato vettoriale su X. Se f_0 è omotopa a f_1, $f_0 \sim f_1$, allora f_0^*E è isomorfo a f_1^*E.*

Il teorema vale nell'ipotesi più generale che Y sia paracompatto.

Dimostrazione.
Sia $\{f_t\}_{t\in[0,1]}$ l'omotopia fra f_0 e f_1. Basta dimostrare che la classe di isomorfismo di f_t^*E è localmente costante in t.
In generale sia $H \to Y \times [0,1]$ un fibrato; utilizzeremo le notazioni

$$Y \times \{\tau\} := Y_\tau\,, \quad H|_{Y\times\{\tau\}} := H_\tau$$

Sia $s_\tau \in C(Y_\tau, H_\tau)$: allora esiste un'estensione $s \in C(Y \times [0,1], H)$ tale che $s|_{Y_\tau} = s_\tau$. Dimostriamo questo fatto: sia $x \in Y_\tau$ ed U un intorno di x che sia banalizzante per H; la sezione s_τ ristretta a $Y_\tau \cap U$ può essere considerata come una funzione a valori vettoriali definita su un chiuso di uno spazio topologico normale; per il teorema di Tietze esiste un'estensione $t_U \in C(U, H|_U)$ di s_τ ristretta a $Y_\tau \cap U$. Dato che Y è compatto esiste un ricoprimento finito di Y_τ, $\{U_1, \dots, U_m\}$ con U_j aperto, ed estensioni t_j di s_τ ristretta a $Y_\tau \cap U_j$. Sia $\{\phi_j\}$ una partizione dell'unità subordinata al ricoprimento $\{U_1, \dots, U_m\}$. È chiaro che $\phi_j t_j$ ha una naturale estensione ad una sezione in $C(Y \times [0,1,H)$: concludiamo che $\sum_j \phi_j t_j$ è un'estensione cercata.
La stessa identica dimostrazione stabilisce il seguente

Lemma 2. (di estensione) Sia X uno spazio topologico compatto di Hausdorff e $W \subseteq X$ un sottoinsieme chiuso. Sia $(E \to X)$ un fibrato vettoriale. Allora ogni sezione $s_W : W \to E|_W$ può essere estesa ad una sezione $s \in C(X, E)$.

La dimostrazione dipende solo dall'esistenza di una partizione dell'unità ed infatti il Lemma vale nell'ipotesi più generale che X sia paracompatto di Hausdorff.
Abbiamo ora bisogno di un altro risultato preliminare:

Lemma 3. Siano E ed F due fibrati su X, X compatto. Sia $W \subseteq X$ un chiuso e supponiamo che esista un isomorfismo di fibrati $\phi : E|_W \to F|_W$. Allora esiste un aperto $U \supseteq W$ ed un morfismo di fibrati $\Phi : E \to F$ che estende ϕ ed è un isomorfismo su U.

[6]**tutti i nostri spazi topologici sono di Hausdorff se non specificato diversamente**

Dimostrazione. Per l'osservazione 3, l'isomorfismo ϕ definisce in maniera naturale una sezione che chiameremo ancora ϕ del fibrato $\mathrm{Hom}(E, F)$ ristretto a W. Per il Lemma precedente esiste un'estensione Φ di ϕ che definisce quindi un morfismo di fibrati $E \to F$ su tutto X. Dato che $\Phi|_W = \phi$ è un isomorfismo, segue esiste un aperto U contente W tale che $\Phi|_U$ è un isomorfismo.Il lemma è dimostrato.

Possiamo ora concludere la dimostrazione del teorema. Sia $f : Y \times [0,1] \to X$ l'omotopia fra f_0 e f_1, quindi $f(y, \tau) = f_\tau$. Sia $\pi : Y \times [0,1] \to Y$ la proiezione sul primo fattore. Fissiamo $\tau \in [0,1]$ Per le proprietà funtoriali del pull-back è chiaro che i fibrati f^*E e $\pi^* f_\tau^*(E)$ sono isomorfi quando ristretti a Y_τ. Per il lemma appena enunciato sappiamo che questo isomorfismo si estende ad un intorno aperto di Y_τ: deduciamo che esiste un $\epsilon > 0$ tale che f^*E e $\pi^* f_\tau^*(E)$ sono isomorfi se ristretti a $Y \times [\tau - \epsilon, \tau + \epsilon]$ e ciò è sufficiente per concludere.

Corollario 1. *Se X ed Y sono due spazi compatti ed $f : Y \to X$ è un'equivalenza omotopica* [7] *allora $f^* : \mathrm{Vect}(X) \to \mathrm{Vect}(Y)$ è un isomorfismo di semigruppi*

Infatti, se g è un'inversa omotopica di f, allora dal teorema di omotopia e dalla definizione abbiamo $f^* \circ g^* = \mathrm{Id}$ e $g^* \circ f^* = \mathrm{Id}$ e quindi f^* è un isomorfismo.

Corollario 2. *Se X è contraibile* [8] *allora ogni fibrato E su X è banale ed esiste quindi un isomorfismo di semigruppi $\mathrm{Vect}(X) \cong \mathbb{N}$.*

Infatti, dire che X è contraibile equivale a dire che la mappa identità su X è omotopa alla mappa costante C ad un punto p_0 di X. Ma, come osservato subito prima di questa sottosezione, il pullback tramite una mappa costante è un fibrato banale; il corollario segue allora immediatamente dal teorema di omotopia ($E = (\mathrm{Id}_X)^* E \simeq X \times E_{p_0} \simeq X \times \mathbb{R}^k$.)

[7] esiste $g : X \to Y$ tale che $f \circ g \sim \mathrm{id}_X$ e $g \circ f \sim \mathrm{id}_Y$

[8] e cioè X è omotopicamente equivalente ad un punto

4. **Ripasso di Geometria Differenziale II: forme differenziali.**

4.1. **Forme differenziali su una varietà differenziabile reale.**

Sia M una varietà differenziabile reale di dimensione m e sia $\mathcal{A}$ un atlante per M. Sappiamo (è stato un esercizio per casa) che è allora ben definito (TM, π, M), il fibrato tangente a M, un fibrato vettoriale reale di rango $\dim M$. Lo spazio delle sezioni di questo fibrato è lo spazio dei *campi vettoriali* su M. Una collezione di aperti banalizzanti per questo fibrato è dato proprio dalle carte di $\mathcal{A}$. Se (U, ϕ) è una tale carta, con $\phi : U \to \mathbb{R}^m$, $\phi = (x^1, \dots, x^m)$, $x^j \in \mathcal{C}^\infty(M)$, allora una base locale di sezioni è data dai campi vettoriali

$$U \ni p \to \frac{\partial}{\partial x^j}\Big|_p \in T_pM\,.$$

È proprio utilizzando questa base locale che si banalizza localmente il fibrato tangente.

Sappiamo che è allora ben definito il fibrato duale (T^*M, π, M) che è detto fibrato cotangente. Le sezioni del fibrato cotangente sono le 1-forme differenziali di M. Data una funzione differenziabile $f : M \to \mathbb{R}$ su M, $f \in C^\infty(M)$, possiamo sempre definire una 1-forma, df, ponendo il suo valore in p, denotato df_p, definito come segue

$$df_p(v) = v([f]_p)$$

con $v \in T_pM$ (v è quindi una derivazione sui germi di funzioni in p) e $[f]_p$ il germe definito da f in $p \in M$. In particolare, se (U, ϕ) è una carta come sopra, allora sono ben definite le sezioni locali

$$U \ni p \to dx^j_p \in T^*_pM\,.$$

Dato che dalle definizioni segue subito che $dx^j_p(\frac{\partial}{\partial x^i}\big|_p) = \delta^j_i$ vediamo che queste m sezioni locali sono una base locale che è infatti la base locale duale a quella vista per il fibrato tangente. Si ha quindi $df|_U = \sum \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$ (basterà far vedere che i due membri coincidono su una base di T^*_pM $\forall p \in U$, il che è immediato scegliendo la base locale $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}$).

Consideriamo ora il fibrato $\Lambda^k(T^*M)$, per $k = 0, \dots, m = \dim M$. Le sezioni di $\Lambda^k(T^*M)$ sono, per definizione, le k-forme differenziali su m. Si pone spesso $\Omega^k(M) := C^\infty(M, \Lambda^k(T^*M))$ e $\Omega^*(M) = \oplus_{k=0}^{\dim M}\Omega^*(M)$ (che è anche lo spazio delle sezioni del fibrato $\oplus_k\Lambda^k(T^*M)$). Da quello che avete imparato (autonomamente) sull'algebra di Grassmann di uno spazio vettoriale e dalla nostra breve discussione qui sopra, deducete subito che le carte di $\mathcal{A}$ sono intorni banalizzanti per questi fibrati e che una base locale di sezioni per $\Lambda^k(T^*M)|_U$ è data da

$$\{dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}, 0 < i_1 < i_2 < \cdots < i_k\}\,.$$

Ciò implica, ovviamente, che ogni $\omega \in \Omega^k(M)$ si scrive localmente, nella carta $(U, (x^1, \dots, x^m))$, come

$$\omega|_U = \sum_{0<i_1<i_2<\cdots<i_k} \omega_{i_1\cdots i_k} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}$$

con $\omega_{i_1\cdots i_k} \in C^\infty(U)$. È inoltre chiaro che $\Omega^*(M)$ eredita un prodotto esterno definito puntualmente: se $\omega \in \Omega^k(M)$ e $\eta \in \Omega^\ell(M)$ allora $\omega \wedge \eta \in \Omega^{k+\ell}(M)$ è la $(k+\ell)$-forma definita da $\omega \wedge \eta(p) := \omega(p) \wedge_p \eta(p)$ dove $\wedge_p$ è il prodotto esterno in $\Lambda^*(T^*_pM)$.

Vi ricordo che se $F : N \to M$ è un'applicazione differenziabile fra due varietà differenziabili, allora è ben definito il differenziale di F in ogni punto $q \in N$, denotato dF_q:

$$dF_q : T_qN \to T_{F(q)}M.$$

Per definizione $dF_q(v)$ è il vettore tangente di $T_{F(q)}M$ definito dalla relazione $dF_p(v)([g]_{F(q)}) := v([g \circ F]_q)$. Questa definizione è compatibile con quella che abbiamo dato per funzioni $f : M \to \mathbb{R}$

una volta identificato $T_{f(p)}\mathbb{R}$ con $\mathbb{R}$ (mandando il vettore $\alpha d/dr|_{f(p)}$ in α). È facile verificare che se $G : M \to R$ è un'altra applicazione differenziabile allora $d(G \circ F)_q = dG_{F(q)} \circ dF_q$. Data quindi un'applicazione differenziabile $F : N \to M$ abbiamo l'applicazione duale

$$(dF_q)^* : T^*_{F(q)}M \to T^*_q N.$$

Notiamo che se $F(q)$ appartiene alla carta $(U, (X^1, \ldots, x^m))$ allora $(dF_q)^*(dx^j|_{F(q)}) = d(x^j \circ F)_q$; infatti, per ogni vettore tangente $v \in T^*_q N$ abbiamo

$$((dF_q)^*(dx^j|_{F(q)}))(v) = dx^j|_{F(q)}((dF_q)(v)) = d(x^j \circ F)_q(v)\,.$$

Sapete bene che $(dF_q)^*$ induce un'applicazione lineare, che è anche un omomorfismo di algebre, da $\Lambda^*(T^*_{F(q)}M)$ a $\Lambda^*(T^*_q N)$. Rimane allora definita un'operazione $F^* : \Omega^*(M) \to \Omega^*(N)$: se $\omega \in \Omega^k(N)$ si scrive in $p = F(q) \in M$ come $\sum \omega_{i_1\cdots i_k}(p) dx^{i_1}|_p \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}|_p$ allora $F^*\omega$ è la forma differenziale il cui valore in $q \in F^{-1}(p)$ è uguale a $\sum \omega_{i_1\cdots i_k}(F(q))(dF_q)^*(dx^{i_1}|_p) \wedge \cdots \wedge (dF_q)^*(dx^{i_k}|_p)$ che può anche essere scritto come $(F^*\omega)(q) := \sum \omega_{i_1\cdots i_k}(F(q)) d(x^{i_1} \circ F)_q \wedge \cdots \wedge d(x^{i_k} \circ F)_q$.

4.2. **Differenziale di de Rham. Coomologia di de Rham.** [9]

Un'operazione fondamentale sulle forme differenziali è quella di differenziazione esterna o differenziazione di de Rham. Sia ω una k-forma; vogliamo definire una $(k+1)$-forma $d\omega$. Sia $p \in M$; per definire $(d\omega)(p)$ consideriamo un intorno coordinato di p, sia esso $(U, (x^1, \ldots, x^m))$. Allora

$$\omega|_U = \sum_{0<i_1<i_2<\cdots<i_k} \omega_{i_1\cdots i_k} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}\,;$$

poniamo

$$(d\omega)|_U := \sum_{0<i_1<i_2<\cdots<i_k} (d\omega_{i_1\cdots i_k}) \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}\,.$$

Si può dimostrare che questa operazione definisce globalmente un unico operatore lineare $d : \Omega^*(M) \to \Omega^{*+1}(M)$ che verifichi le seguenti 3 proprietà:
- $\omega \in \Omega^k(M)$, $\eta \in \Omega^*(M) \Rightarrow d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta$;
- $d^2 = 0$
- se $f \in C^\infty(M)$ allora df è la 1-forma definita dal differenziale di M (vedi sopra).

Si può anche dimostrare, non è difficile, che se $F : N \to M$ allora

$$F^*(d\omega) = d(F^*\omega)\,,$$

a parole: il differenziale commuta con F^*.

Una k-forma ω è detta **chiusa** se $d\omega = 0$. Una k-forma ω è detta **esatta** se $\omega = d\eta$ per qualche $(k-1)$-forma η. Notiamo che una forma esatta è sempre chiusa, dato che $d^2 = 0$. Definiamo il k-mo gruppo di coomologia di de Rham come

$$H^k_{\mathrm{dR}}(M) := \mathrm{Ker}(\mathrm{d}|_{\Omega^k(M)}) / \mathrm{Im}(\mathrm{d}|_{\Omega^{k-1}(M)})\,.$$

Trattasi, di fatto, di spazi vettoriali. I gruppi di coomologia di de Rham sono uno strumento fondamentale in topologia algebrica e geometria differenziale.

[9] ulteriori informazioni e dimostrazioni su Warner pp 65 → 69.

4.3. **Orientabilità. Integrazione. Teorema di Stokes.** [10]

Un fibrato reale E di rango k sulla varietà M è detto *orientabile* se $\bigwedge^k E = \bigwedge^{max} E$ è banale. In questo caso il fibrato in rette $(\bigwedge^{max} E, \pi, M)$ possiede una sezione globale non nulla.

Se E è orientabile allora $\bigwedge^{max} E \setminus 0 = \cup_{m \in M}(\bigwedge^{max} E_m \setminus 0)$ ha due componenti connesse; la scelta di una di esse è detta scelta di una *orientazione* per E. Non è difficile dimostrare che E è orientabile se e solo se ammette un ricoprimento di intorni banalizzanti tali che le funzioni di transizione abbiano tutte determinante positivo. Fissata una orientazione di E diremo che una base locale $\{s_1, \ldots, s_k\}$ ha orientazione positiva se $s_1 \wedge \cdots \wedge s_k$ appartiene alla componente connessa che definisce l'orientazione.

Una varietà differenziabile M è orientabile se il fibrato tangente è orientabile o, equivalentemente, se ammette un atlante tale che lo jacobiano delle mappe di transizione, da una carta ad un'altra, abbia determinante sempre positivo. Se M è orientabile allora anche $\Lambda^{\dim M} T^*M$ è banale (infatti TM e T^*M sono isomorfi). Esiste quindi una m-forma ω, con $m = \dim M$, che non è mai nulla [11]. Una tale forma è detta una forma di volume.

È possibile definire l'integrale $\int_M \omega$ di una m-forma ω su una varietà differenziabile orientabile di dimensione m; lo si definisce prima nelle carte, utilizzando l'integrale in $\mathbb{R}^n$, e poi si usa una partizione dell'unità. Se α è una forma con massimo grado strettamente minore di $\dim M$ allora $\int_M \alpha$ è per definizione uguale a zero. Una volta data la nozione di varietà differenziabile orientabile con bordo e di orientazione indotta sul bordo è possibile dimostrare il fondamentale teorema di Stokes:

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega$$

per ogni $(m-1)$-forma ω. In particolare, se M è senza bordo otteniamo

$$\int_M d\omega = 0$$

per ogni $(m-1)$-forma ω.

[10] ulteriori informazioni e dimostrazioni su Bott-Tu, pagine 27 → 33

[11] è anche vero il viceversa

5. **Sottofibrati. Metriche.**

5.1. **Sottofibrato.**

Sia (E, π, M) un fibrato vettoriale di rango k. Sia F una sottovarietà di E. Diremo che $(F, \pi|_F, M)$ è un sottofibrato se

- $\forall m \in M$ si ha che $F \cap E_m$, con $E_m := \pi^{-1}(m)$, è un sottospazio vettoriale di E_m di dimensione $\ell < k$;
- $\forall m \in M \; \exists \, U$, intorno di x, e una banalizzazione locale di E :

  $$\phi_U : E_U := \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^k$$

  tale che la restrizione ad F fornisce una banalizzazione locale di F:

  $$\phi_U|_F : F_U \to U \times \mathbb{R}^\ell \subset U \times \mathbb{R}^\ell.$$

In termini delle funzioni di transizione: possiamo scrivere in una tale banalizzazione

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} h_{\alpha\beta} & k_{\alpha\beta} \\ 0 & j_{\alpha\beta} \end{pmatrix}$$

e le $h_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to GL(l, \mathbb{R})$ sono le funzioni di transizione di (F, π, M).

Con la stessa tecnica si può costruire il fibrato quoziente $(E/F, \pi, M)$ le cui funzioni di transizione sono le $j_{\alpha\beta}$.

5.2. **Metrica riemanniana su un fibrato reale.**

Dato un fibrato reale (E, π, M), si definisce una metrica g come una sezione del fibrato $E^* \otimes E^*$, $g \in C^\infty(M, E^* \otimes E^*)$, tale che $g(m)$, forma bilineare su $E \times E$, sia *simmetrica* $g(m)(u, v) = g(m)(v, u)$ e definita positiva:

$$g(m)(v, v) > 0 \; \forall v \in E_m \setminus \{\underline{0}\}$$

Utilizzando una partizione dell'unità si dimostra senza particolari difficoltà che esiste sempre una metrica su un fibrato E: basterà definire metriche locali $g^\alpha(\; , \;)$ su ogni intorno banalizzante (e questo si può fare utilizzando la banalizzazione ψ_α e la metrica standard su $U_\alpha \times \mathbb{R}^k$); poi si considera una partizione dell'unità $\{f_\alpha\}$ subordinata a $\{U_\alpha\}$ e per ogni $m \in M$ la forma $g(m)(\; , \;) := \sum_\alpha f_\alpha(m) g^\alpha(m)(\; , \;)$. È facile vedere a questo punto che g definisce una metrica su E.
Se $E = TM$. allora una metrica g su E si dice una **metrica riemanniana sulla varietà** M.

5.3. **Metrica hermitiana su un fibrato complesso.**

Se (E, π, M) è un fibrato complesso, analogamente si definisce la nozione di metrica hermitiana su (E, π, M). L'esistenza di una metrica hermitiana si dimostra ancora una volta utilizzando una partizione dell'unità.

5.4. **Matrice locale della metrica rispetto ad una base locale.**

Tramite le banalizzazioni locali abbiamo $\forall \; U_\alpha$, intorno banalizzante, una base locale di sezioni (già visto). Infatti se $\psi_\alpha : U_\alpha \times \mathbb{R}^k \to \pi^{-1}(U_\alpha)$ è una banalizzazione locale, fissata una base e_i in $\mathbb{R}^k$, si ha una base locale di sezioni definita da:

$$e_i^\alpha(m) := \psi_\alpha(m, e_i) \in C^\infty(U_\alpha, E)$$

(Attenzione: indici in basso, queste sono **sezioni** del fibrato $E|_{U_\alpha}$...)
Se u, v sono sezioni di $\pi^{-1}(U_\alpha)$, allora $u = \lambda^i e_i^\alpha$ e $v = \mu^i s_i^\alpha$, dove si è utilizzata la convenzione della somma su indici ripetuti e:

$$g(u, v) = \lambda^i \mu^j g(e_i^\alpha, e_j^\alpha)$$

Dunque $\forall m \in U_\alpha$, $g(e_i^\alpha, e_j^\alpha)(m) := g_{ij}(\alpha)(m)$ è la matrice locale della metrica rispetto alla base locale $\{e_i^\alpha\}$ calcolata in m.
Sia $\{\eta_i^\alpha\}$ un'altra base locale con

$$\eta_i^\alpha = G_i^j e_j^\alpha$$

allora la matrice locale della metrica rispetto a η_j^α, e cioè $g(\eta_i^\alpha, \eta_j^\alpha)$, è uguale a $G^T g\, G$. In particolare, si considerino due intorni banalizzanti U_α, U_β ed in $U_\alpha \cap U_\beta$ le basi $\{e_i^\alpha\}$, $\{e_i^\beta\}$ definite come sopra utilizzando le due banalizzazioni, allora $e_i^\beta = (g_{\alpha\beta})_i^j e_j^\alpha$, dove vi ricordo ancora una volta che queste sono sezioni e non coordinate.
Se $g(\alpha)(m)$ è la matrice della metrica $\forall m \in U_\alpha$, si ha quindi :

$$g(\beta) = g_{\alpha\beta}^T\, g(\alpha)\, g_{\alpha\beta}$$

Quest'ultima relazione può essere utilizzata per definire la metrica mediante le funzioni di transizione $g_{\alpha\beta}$.

5.5. **Fibrato normale.**

Sia F un sottofibrato di E dotato di metrica g, allora non è difficile dimostrare (ma non è proprio ovvio) che

$$F^\perp = \bigcup_{m \in M} F_m^\perp$$

definisce un sottofibrato di E, detto fibrato ortogonale ad F.

Valgono le seguenti proprietà:

- $E/F \simeq F^\perp$
- $F \oplus F^\perp \simeq E$
- Se $M \subseteq \mathbb{R}^n$ è una sottovarietà e si considera il sottofibrato $TM \subseteq M \times \mathbb{R}^n = T\mathbb{R}^n|_M$, allora $N_M \equiv (TM)^\perp$ è il fibrato normale ad M.
- Analogamente se $M \subseteq (X, g)$ è una sottovarietà di una varietà riemanniana X dotata di metrica g, allora $(TM)^\perp \equiv N_{M/X}$, l'ortogonale di TM in $TX|_M$, è il fibrato normale ad M in X.

6. **Connessioni.**

6.1. **Connessioni su un fibrato.**

Sia X un campo di vettori su M e cioè un elemento di $C^\infty(M, TM)$. Data una sezione $s \in C^\infty(M, E)$, vogliamo derivare s lungo X. Se $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ è una collezione di intorni banalizzanti e se $s \in C^\infty(M, E)$ corrisponde alla collezione $\{s_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}^k\}$ con $s_\beta = g_{\beta\alpha}s_\alpha$ allora potremmo considerare il vettore di $1-$forme $(ds_\alpha^1, .., ds_\alpha^k)$ e porre la derivata di s, o meglio della sua restrizione a U_α, lungo X pari a

$$(ds_\alpha^1(X), .., ds_\alpha^k(X))$$

Tale procedimento, però, non si globalizza: cambiando base si avrebbe

$$ds_\beta = d(g_{\beta\alpha}s_\alpha) = dg_{\beta\alpha}s_\alpha + g_{\beta\alpha}ds_\alpha$$

dunque se $dg_{\beta\alpha} \neq 0$ le ds_β non si trasformano mediante le sole funzioni di transizione ma anche attraverso $dg_{\beta\alpha}$ ed s_α. Ci domandiamo quindi come poter derivare una sezione lungo un campo di vettori. La nozione di *connessione* è introdotta proprio a questo scopo.

Definizione 5. Una connessione su un fibrato (E, π, M) è un operatore lineare

$$\nabla : C^\infty(M, E) \to C^\infty(M, T^*M \otimes E)$$

verificante la regola di Leibnitz: $\forall f \in C^\infty(M)$ e $\forall\ s \in C^\infty(M, E)$

$$\nabla(fs) = df \otimes s + f\nabla s$$

Osservazioni.

1. Utilizzando la dualità fra T^*M e TM è chiaro che possiamo applicare un elemento di $C^\infty(M, T^*M\otimes E)$ ad un elemento di $C^\infty(M, TM)$ e ottenere una sezione in $C^\infty(M, E)$. Ponendo quindi $\nabla s(X) := \nabla_X s$ si ha un operatore

$$\nabla_X : C^\infty(M, E) \to C^\infty(M, E)$$

detto **derivata covariante di** $s \in C^\infty(M, E)$ **lungo** $X \in C^\infty(M, TM)$**.** Si noti che $\forall f \in C^\infty(M)$, $\forall X_1, X_2 \in C^\infty(M, TM)$ si ha

$$\nabla_{fX}(s) = \nabla s(fX) = f\nabla s(X) = f\nabla_X s \tag{3}$$

$$\nabla_{X_1+X_2}(s) = \nabla(s)(X_1 + X_2) = \nabla_{X_1}(s) + \nabla_{X_2}(s) \tag{4}$$

essendo ∇s lineare su TM. Inoltre $\forall s_1, s_2 \in C^\infty(M, E)$

$$\nabla_X(s_1 + s_2) = \nabla_X(s_1) + \nabla_X(s_2) \tag{5}$$

$$\nabla_X(fs) = \nabla(fs)(X) = (df \otimes s)(X) + f\nabla s(X) = X(f)s + f\nabla_X s. \tag{6}$$

La definizione di connessione è data in alcuni testi richiedento che $\forall X \in C^\infty(M, TM)$ sia definito un operatore $\nabla_X : C^\infty(M, E) \to C^\infty(M, E)$ verificante l'uguaglianza del primo e dell'ultimo membro delle (3), (4), (5), (6).

2. L'operatore ∇ è *locale*: se $s|U \equiv 0$ allora $\nabla(s)|U$ è anche la sezione nulla su U. Infatti, se $x \in U$ e f è una bump-function che è uguale a 1 in un intorno W_x di x ed è uguale a zero fuori da un intorno $V_x \subset U$, con $W_x \subset V_x \subset U$, allora, ovviamente, si ha che fs è identicamente uguale a zero: $fs \equiv 0$ su tutto M; d'altra parte $\nabla(fs) = df \otimes s + f\nabla(s)$ da cui segue immediatamente che $\nabla(s)(x) = 0$ come si voleva.

In particolare, ha senso considerare $\nabla|_U$, la restrizione di ∇ ad un aperto $U \subset M$: utilizzeremo spesso il simbolo ∇ anziché $\nabla|_U$, a meno che ciò generi confusione.

3. Sia $T : C^\infty(M,E) \to C^\infty(M,E)$ un applicazione. Sappiamo che $C^\infty(M,E)$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ e che è un modulo su $C^\infty(M)$. Diremo che T è *tensoriale* se T è un operatore $\mathbb{R}$-lineare e se $T(fs) = fT(s)$ per ogni $f \in C^\infty(M)$ e per ogni $s \in C^\infty(M,E)$. Se $T : C^\infty(M,E) \to C^\infty(M,E)$ è tensoriale allora si può definire in maniera naturale un operatore $\widehat{T} \in C^\infty(M, \mathrm{End}(E))$ tale che

$$(Ts)(m) = \widehat{T}(m)(s(m))\,.$$

Daremo i dettagli qui sotto. Viceversa è ovvio che dato un $\widehat{T} \in C^\infty(M, \mathrm{End}(E))$ si può definire $T : C^\infty(M,E) \to C^\infty(M,E)$ tramite $T(s)(m) := \widehat{T}(m)(s(m))$ ed un tale operatore è tensoriale. Dunque vi è una corrispondenza biunivoca fra operatori tensoriali $T : C^\infty(M,E) \to C^\infty(M,E)$ e sezioni $\widehat{T} \in C^\infty(M, \mathrm{End}(E))$, $T \leftrightarrow \widehat{T}$, ed in seguito non faremo distinzione fra T e $\widehat{T}$.
Per definire $\widehat{T}$ a partire da un operatore tensoriale $T : C^\infty(M,E) \to C^\infty(M,E)$ notiamo innanzitutto che T è locale: se U è aperto e $s_{|U}$ è identicamente nulla allora $Ts|_U$ è anche identicamente nulla. Infatti, se $x \in U$ e ϕ è una bump-function che è uguale a 1 in un intorno W_x di x ed è uguale a zero fuori da un intorno $V_x \subset U$, con $W_x \subset V_x \subset U$, allora, ovviamente, si ha che ϕs è identicamente uguale a zero e quindi

$$0 = (T(\phi s))(x) = \phi(x)(T(s))(x) = (T(s))(x)$$

e dato che x è arbitrario, possiamo concludere che $Ts|_U$ è identicamente nullo. Abbiamo quindi dimostrato che T è locale; possiamo quindi restringerci ad un intorno banalizzante e ragionare quindi su un fibrato prodotto $E = M \times \mathbb{R}^k$ per il quale le sezioni sono semplicemente le k-ple di funzioni $\underline{s}$ e per il quale le sezioni di $\mathrm{End}(E)$ sono le funzioni a valori matrici e cioè le matrici con entrate che sono funzioni C^∞ su M. Dato T tensoriale definiamo una matrice di funzioni C^∞, A_T, come segue: consideriamo la funzioni costante $\underline{e}_i : M \to \mathbb{R}^k$ che associa ad ogni punto l'i-mo vettore della base canonica e prendiamo $T\underline{e}_i$, una k-pla di funzioni su M; consideriamo poi la matrice che ha come i-ma colonna la k-pla $T\underline{e}_i$. Dalla tensorialità di T segue facilmente che

$$(T\underline{s})(m) = A_T(m)\underline{s}(m)$$

come richiesto.

4. Allo stesso modo, se $T : C^\infty(M,E) \to C^\infty(M,F)$ è un operatore lineare tale che $T(fs) = fT(s)$ per ogni $f \in C^\infty(M)$ ed ogni $s \in C^\infty(M,E)$, allora si può definire in maniera naturale un operatore $\widehat{T} \in C^\infty(M, \mathrm{Hom}(E,F)) \equiv C^\infty(M, F \otimes E^*)$ tale che $(Ts)(m) = \widehat{T}(m)(s(m))$. In particolare, un operatore $T : C^\infty(M,E) \to C^\infty(M, T^*M \otimes E)$ tale che $T(fs) = fT(s)$ definisce in maniera naturale una sezione di $C^\infty(M, T^*M \otimes \mathrm{End}(E))$ [12] e similmente un operatore $T : C^\infty(M,E) \to C^\infty(M, \Lambda^2(T^*M) \otimes E)$ tale che $T(fs) = fT(s)$ definisce un elemento $C^\infty(M, \Lambda^2(T^*M) \otimes \mathrm{End}(E))$

5. Siano ∇ e ∇' due connessioni, allora $(\nabla - \nabla')(fs) = \nabla(fs) - \nabla'(fs) = df \otimes s + f\nabla s - df \otimes s + f\nabla' s = f(\nabla - \nabla')(s)$ ossia $(\nabla - \nabla')$ soddisfa la proprietà sopra enunciata per l'operatore T e dunque si può scrivere:

$$\nabla = \nabla' + \omega$$

ove $\omega \in C^\infty(M, T^*M \otimes \mathrm{End}(E))$ (dove stiamo quindi identificando gli operatori T con $\hat{T}$).

[12] dove abbiamo utilizzato il fatto che dati due spazi vettoriali V W si ha, $\mathrm{Hom}(W, V \otimes W) = V \otimes W \otimes W^* = V \otimes \mathrm{End}(W)$

6.2. **Descrizione locale delle connessioni.**

Sia U un aperto banalizzante ed e_i una base locale di $\pi^{-1}(U)$. Allora $\nabla e_i \in C^\infty(U, \pi^{-1}(U) \otimes T^*U)$ e dunque

$$\nabla e_i = \omega_i^j \otimes e_j$$

con $\omega_i^j \in C^\infty(U, T^*U) \equiv \Omega^1(U)$. La (ω_i^j) è per definizione la matrice locale di 1-forme associata alla connessione ∇ nella base locale scelta. Data $s \in C^\infty(U, \pi^{-1}(U))$ si ha $s = s^i e_i$ e quindi $\nabla s = \nabla(s^i e_i) = ds^i \otimes e_i + s^i \nabla e_i = ds^k \otimes e_k + s^i \omega_i^k \otimes e_k = (ds^k + s^i \omega_i^k) \otimes e_k$. In forma compatta $\nabla s = ds + \omega s$ ovvero

$$\nabla = d + \omega \quad \text{su} \quad U \quad \text{aperto banalizzante rispetto alla base locale } \{e_i\}$$

Si ha allora, per $s \in C^\infty(M, E)$, $X \in C^\infty(M, TM)$,

$$\nabla_X s|_U = (ds^j + \omega_i^j s^i)(X) e_j, \tag{7}$$

e se su U, $X = X^l \frac{\partial}{\partial x^l}$,

$$\nabla_X s|_U = \left(\frac{\partial s^j}{\partial x^l} X^l + s^i \Gamma_{il}^j X^l \right) e_j, \tag{8}$$

dove $\Gamma_{il}^j \in C^\infty(U)$, sono le componenti di ω_i^j,

$$\omega_i^j = \Gamma_{il}^j dx^l. \tag{9}$$

Da queste formule si vede che fissato $m \in M$, $\nabla_X s(m)$ dipende dalle componenti $X^l(m)$, di $X(m)$, ma non dalle loro derivate. Dato allora un vettore $X_m \in T_m M$, si potrà definire $\nabla_{X_m} s \in E_m$ come $\nabla_{\tilde{X}} s(m)$, con $\tilde{X}$ estensione arbitraria di X_m ad M, non dipendendo, per quanto appena osservato, il valore di questo dall'estensione scelta.

6.3. **Esistenza di una connessione.**

Si noti che se ∇ e ∇' sono due connessioni e $g \in C^\infty(M)$ allora $g\nabla + (1-g)\nabla'$ è ancora una connessione. Ora, su ogni ricoprimento banalizzante U_α possiamo definere una connessione ∇^α specificando la matrice di 1-forme rispetto ad una base locale $\{e_j^\alpha\}$. Utilizzando un ricoprimento $\{U_\alpha\}$ banalizzante, una partizione dell'unità $\{\phi_\alpha\}$ subordinata ad esso e le connessioni locali ∇^α su $\pi^{-1}(U_\alpha)$, si ottiene facilmente una connessione su tutto E; basterà porre $\nabla := \sum_\alpha \phi_\alpha \nabla^\alpha$.

6.4. **Cambiamento di base locale.**

Sia $\tilde{e}_i = G_i^j e_j$ (con il che G è la matrice del cambiamento di base e j è l'indice di riga) allora si ha:

$$\begin{aligned} \nabla(\tilde{e}_i) &= \nabla(G_i^j e_j) = dG_i^j \otimes e_j + G_i^j \nabla e_j \\ &= dG_i^j \otimes e_j + G_i^j \omega_j^k \otimes e_k = (dG_i^k + G_i^j \omega_j^k) \otimes e_k \end{aligned}$$

Il primo membro a sinistra è anche uguale a $\nabla(\tilde{e}_i) = \tilde{\omega}_i^j \otimes \tilde{e}_j = \tilde{\omega}_i^j G_j^m \otimes e_m$ ed essendo $\{e_m\}$ una base si ha:

$$\tilde{\omega}_i^j G_j^k = dG_i^k + G_i^j \omega_j^k$$

ossia

$$(G\omega)_i^k = (dG)_i^k + (\omega G)_i^k$$

che riscriviamo in forma compatta come:

$$\tilde{\omega} = G^{-1} dG + G^{-1} \omega G$$

In particolare in $U_\alpha \cap U_\beta$ si ha:

$$\nabla = d + \omega_\alpha \text{ rispetto a } \{e_i^\alpha\}$$
$$\nabla = d + \omega_\beta \text{ rispetto a } \{e_i^\beta\}$$

e $e_i^\beta = (g_{\alpha\beta})_i^j e_j^\alpha$, dunque:

(10) $$\omega_\beta = (g_{\alpha\beta})^{-1} dg_{\alpha\beta} + (g_{\alpha\beta})^{-1}\omega_\alpha g_{\alpha\beta}$$

formula che lega le matrici locali di 1-forme della connesione in due intorni banalizzanti differenti.

Potremmo come al solito prendere spunto dalla (10) per dare una definizione alternativa di connessione, direttamente tramite le matrici di connessione.

6.5. **Esempi.**

1. Sia M una sottovarietà differenziabile di $\mathbb{R}^N$. Sul fibrato banale $T\mathbb{R}^N|_M = M \times \mathbb{R}^N$ c'è la connessione banale d. Sia poi p la proiezione canonica sul primo addendo della decomposizione in somma diretta $T\mathbb{R}^N|_M = TM \oplus N$, dove N è il fibrato normale ad M, cioè il fibrato ortogonale a $TM \subseteq M \times \mathbb{R}^N$ rispetto alla metrica canonica [13]. Osserviamo anche che esiste un'identificazione

$$C^\infty(M, TM) = \{Y \in C^\infty(M, \mathbb{R}^N) \mid pY = Y\}\,.$$

Allora la posizione

$$\nabla_X Y := p(dY(X)), \qquad X, Y \in C^\infty(M, TM),$$

definisce una connessione su TM, come si verifica facilmente tenendo conto del fatto che sia p che dY sono $C^\infty(M)$-lineari. In alternativa, possiamo estendere p ad una sezione di $C^\infty(M, \mathrm{Hom}(T^*M \otimes T\mathbb{R}^N|_M, T^*M \otimes TM))$ considerando, semplicemente, $\mathrm{Id}_{T^*M} \otimes p$ e porre

$$\nabla Y := (\mathrm{Id}_{T^*M} \otimes p)(dY), \qquad Y \in C^\infty(M, TM),$$

2. Sia $M = G_k(\mathbb{R}^{n+k})$ la grassmanniana dei k-sottospazi in $\mathbb{R}^{n+k}$, e sia

$$E_{k,n+k}(\mathbb{R}) = \left\{(p, \underline{v}) \in G_k(\mathbb{R}^{n+k}) \times \mathbb{R}^{n+k} : \underline{v} \in p\right\}$$

il fibrato tautologico su M. Rispetto alla metrica canonica sul fibrato banale $M \times \mathbb{R}^{n+k}$ vale allora la decomposizione in somma diretta

$$M \times \mathbb{R}^{n+k} = E_{k,n+k}(\mathbb{R}) \oplus E_{k,n+k}(\mathbb{R})^\perp,$$

e sia p la proiezione sul primo addendo. Allora anche in questo caso si verifica facilmente che si ottiene una connessione su $E_{k,n+k}(\mathbb{R})$ ponendo

$$\nabla_X s := p(ds(X)), \quad s \in C^\infty(M, E_{k,n+k}(\mathbb{R})), X \in C^\infty(M, TM).$$

[13] a seconda delle situazioni possiamo riguardare p come una funzione C^∞ su M a valori $M_{N\times N}(\mathbb{R})$ (è una sezione del fibrato degli endomorfismi del fibrato banale $T\mathbb{R}^N|_M$) oppure come una sezione di $C^\infty(M, \mathrm{Hom}(T\mathbb{R}^N|_M, TM))$

7. **Trasporto parallelo e Curvatura.**

7.1. **Connessione pull-back.**

Sia, in generale, $f : N \to M$ un'applicazione C^∞ e consideriamo il fibrato indotto $f^*E \to N$. Si è visto allora che, se $\{U_\alpha\}$ è un atlante banalizzante per E e $\{g_{\alpha\beta}\}$ sono le relative funzioni di transizione, si ottiene un atlante banalizzante per f^*E, con relative funzioni di transizione, considerando $\{f^{-1}(U_\alpha)\}$ e $\{g_{\alpha\beta} \circ f\}$. Se allora ∇^E è una connessione su E e $\{\omega_\alpha\}$ è la famiglia di matrici di 1-forme determinata da ∇^E su $\{U_\alpha\}$, consideriamo le matrici di 1-forme $\omega^*_\alpha := f^*\omega_\alpha := (f^*(\omega_\alpha)^j_i)_{j,i=1,\dots,k}$ e verifichiamo che definiscono una connessione su f^*E: si ha, su $f^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)$:

$$\begin{aligned}
\omega^*_\beta &= f^*\left(g^{-1}_{\alpha\beta} dg_{\alpha\beta} + g^{-1}_{\alpha\beta}\omega_\alpha g_{\alpha\beta}\right) \\
&= f^*(g^{-1}_{\alpha\beta}) f^* dg_{\alpha\beta} + f^*(g^{-1}_{\alpha\beta}) f^*\omega_\alpha f^* g_{\alpha\beta} \\
&= (g_{\alpha\beta} \circ f)^{-1} d(g_{\alpha\beta} \circ f) + (g_{\alpha\beta} \circ f)^{-1} \omega^*_\alpha (g_{\alpha\beta} \circ f)
\end{aligned}$$

avendo usato il fatto che il pull-back commuta con il differenziale, e che, essendo $g_{\alpha\beta}$ una funzione (a valori matrici), $f^*g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} \circ f$. Ha dunque senso la seguente

Definizione 6. Siano E, f e ∇^E come sopra. Le matrici di 1-forme $\{\omega^*_\alpha\}$ considerate sopra definiscono una connessione ∇^{f^*E} su f^*E, detta *connessione indotta da* ∇^E *tramite* f.

Alternativamente, notiamo che $C^\infty(N, f^*E)$ è generato, in quanto modulo su $C^\infty(N)$, dall'immagine dell'applicazione $f^* : C^\infty(M, E) \to C^\infty(N, f^*E)$. Possiamo definire allora la connessione pull-back ponendo:

$$\nabla^{f^*E}(gf^*s) := dg \otimes f^*s + gf^*(\nabla^E s)\,, \quad \forall g \in C^\infty(N)\,, \quad \forall s \in C^\infty(M, E)\,.$$

7.2. **Trasporto parallelo.**

Sia (E, π, M) un fibrato di rango k. Sia $\gamma : I \to M$, $I \subseteq \mathbb{R}$ aperto, una curva C^∞.

Definizione 7. Una *sezione di* E *lungo* γ è una funzione C^∞ $s : I \to E$, tale che $s(t) \in E_{\gamma(t)}$ per ogni $t \in I$. Equivalentemente, una sezione di E lungo γ è un elemento di $C^\infty(I, \gamma^*E)$.

Consideriamo il fibrato γ^*E su I indotto dalla curva $\gamma : I \to M$; se allora ∇^{γ^*E} è la connessione indotta su γ^*E, definiremo una derivazione delle sezioni lungo γ ponendo $\nabla_{\dot\gamma} := \nabla^{\gamma^*E}_{\frac{d}{dt}}$. Osserviamo che poiché ogni fibrato vettoriale su un intervallo di $\mathbb{R}$ è banale, si avrà, globalmente, $\nabla^{\gamma^*E} = d + \varphi$, con $\varphi = (\varphi^j_i dt)_{j,i=1,\dots,k}$, rispetto ad una base globale di sezioni di γ^*E. Allora per ogni fissato $s_0 \in E_{\gamma(t_0)}$, $t_0 \in I$, esisterà un'unica sezione $s_{s_0} \in C^\infty(I, \gamma^*E)$ che sia soluzione (globale, perché l'equazione è lineare), del problema di Cauchy

$$\begin{aligned}
&(\nabla_{\dot\gamma} s)^j = \frac{ds^j}{dt} + \varphi^j_i s^i = 0, \qquad j = 1, \dots, k, \\
&s(t_0) = s_0.
\end{aligned} \tag{11}$$

Qui abbiamo espresso una sezione di γ^*E in termini di una base globale di $C^\infty(I, \gamma^*E)$. Rimane così definita, per ogni curva $\gamma : I \to M$, un'applicazione

$$\tau^\gamma_{t_0,t} : s_0 \in E_{\gamma(t_0)} \to s_{s_0}(t) \in E_{\gamma(t)},$$

che, dalle proprietà analitiche del sistema di equazioni differenziali (11), risulta lineare ed iniettiva (e quindi un isomorfismo); tale applicazione è detta **trasporto parallelo lungo** γ. La possibilità di *connettere* fibre distanti è proprio all'origine dell'uso della parola *connessione.*

Supponiamo in particolare che l'immagine di γ sia contenuta in un intorno banalizzante che sia anche una carta per M. Otteniamo una base globale di $C^\infty(I, \gamma^* E)$ da una base locale di E nell'intorno banalizzante; inoltre la curva γ è data da una n-pla di funzioni $(\gamma^1, \dots, \gamma^n)$. Scriviamo nuovamente $s(t) = (s^1(t), \dots, s^k(t))$ per una sezione di $C^\infty(I, \gamma^* E)$. In questo caso, per definizione di connessione pull-back, abbiamo

$$(\varphi_i^j dt) = \gamma^*(\Gamma_{il}^j dx^l) = (\Gamma_{il}^j \circ \gamma)\dot{\gamma}^l dt$$

e quindi il sistema (11) diventa

$$\frac{ds^j}{dt} + s^i \Gamma_{il}^j(\gamma(t)) \frac{d\gamma^l}{dt} = 0, \qquad j = 1, \dots, k, \quad s(t_0) = s_0. \tag{12}$$

Risulta inoltre che è possibile recuperare la connessione a partire dal trasporto parallelo: si può infatti dimostrare [14] che per ogni sezione s di E ed ogni campo tangente X ad M vale

$$(\nabla_X s)(m) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left[(\tau_{0,t}^\gamma)^{-1} s(\gamma(t)) - s(m) \right],$$

dove γ è una qualunque curva su M tale che $\gamma(0) = m$ e $\dot{\gamma}(0) = X_m$.

7.3. **Ulteriori proprietà.**

Siano E,F fibrati su M, con rispettive connessioni ∇^E, ∇^F. È facile verificare che

$$\nabla^{E \oplus F} := \begin{pmatrix} \nabla^E & 0 \\ 0 & \nabla^F \end{pmatrix}$$

definisce una connessione su $E \oplus F$, con matrice locale di 1-forme

$$\omega^{E \oplus F} = \begin{pmatrix} \omega^E & 0 \\ 0 & \omega^F \end{pmatrix},$$

e che

$$\nabla^{E \otimes F} := \nabla^E \otimes \mathbb{I}_{C^\infty(M,F)} + \mathbb{I}_{C^\infty(M,E)} \otimes \nabla^F$$

definisce una connessione su $E \otimes F$, con matrice di 1-forme $\omega^{E \otimes F} = \omega^E \otimes \mathbb{I} + \mathbb{I} \otimes \omega^F$, prodotti tensoriali di matrici.
Inoltre si definisce una connessione ∇^{E^*} sul fibrato duale E^* di E tramite la formula

$$(\nabla_X \theta)(s) + \theta(\nabla_X s) = X(\theta(s)) \tag{13}$$

con $\theta \in C^\infty(M, E^*)$ e $s \in C^\infty(M, E)$. Se denotiamo con $(\cdot, \cdot)$ la dualità naturale tra E ed E^* allora possiamo equivalentemente scrivere

$$d(\theta, s) = (\nabla\theta, s) + (\theta, \nabla s). \tag{14}$$

Se $\{e_i\}$ è una base locale di E ed $\{e^i\}$ è la relativa base duale, vale quindi

$$0 = d(e^i, e_j) = (\nabla^{E^*} e^i, e_j) + (e^i, \nabla^E e_j),$$

Si trova allora che $\omega^{E^*} = -(\omega^E)^T$. Se il fibrato E ha una metrica g, la connessione ∇^E si dirà *compatibile con la metrica* se

$$dg(s,t) = g(\nabla^E s, t) + g(s, \nabla^E t), \qquad s, t \in C^\infty(M, E), \tag{15}$$

dove naturalmente si intende $g(\omega \otimes s, t) = \omega g(s, t) = g(s, \omega \otimes t)$, per $\omega \in \Omega^1(M)$; equivalentemente richiediamo che per ogni $X \in C^\infty(M, TM)$,

$$Xg(s,t) = g(\nabla^E_X s, t) + g(s, \nabla^E_X t)\,;$$

se poi E è reale e $\{e_i\}$ è una base locale ortonormale, dalla (15) si ha:

$$\begin{aligned} 0 = d\langle e_i, e_j\rangle_E &= \langle \omega_i^k \otimes e_k, e_j\rangle_E + \langle e_i, \omega_j^l \otimes e_l\rangle_E \\ &= \omega_i^j + \omega_j^i, \end{aligned}$$

e quindi la matrice di 1-forme di connessione, calcolata rispetto ad una base locale ortonormale, è antisimmetrica. In generale, la matrice di 1-forme di una connessione compatibile con la metrica g, calcolata rispetto ad una qualsiasi base locale, soddisfa

$$dg = g\omega + \omega^T g\,. \tag{16}$$

dove g è ora la matrice locale della metrica in una base locale. Viceversa, è facile verificare che se questa condizione è soddisfatta per ogni base locale allora la connessione è compatibile con la metrica.

Analogamente si verifica che se E è complesso e la metrica è hermitiana, la matrice di connessione rispetto ad una base ortonormale è antihermitiana: $\omega + \overline{\omega}^T = 0$. Per una base locale qualsiasi troviamo invece la relazione

$$dh = h\omega + \overline{\omega}^T h$$

dove con h abbiamo denotato qui la matrice locale della metrica hermitiana.

7.4. **Curvatura.**

Sia (E, π, M) un fibrato vettoriale di rango k. Una connessione ∇ su E è un'applicazione $\nabla : C^\infty(M, E) \to C^\infty(M, T^*M \otimes E)$ soddisfacente la regola di Leibniz. La si può poi estendere ad una applicazione $\mathbb{R}$-lineare (o meglio, ad una famiglia di applicazioni), $\tilde\nabla : C^\infty(M, \bigwedge^p T^*M \otimes E) \to C^\infty(M, \bigwedge^{p+1} T^*M \otimes E)$, richiedendo che valga

$$\tilde\nabla(\varphi \otimes s) = d\varphi \otimes s + (-1)^p \varphi \wedge \nabla s, \qquad \varphi \in C^\infty(M, \bigwedge^p T^*M), s \in C^\infty(M, E),$$

dove naturalmente si intende $\varphi \wedge (\omega \otimes s) = (\varphi \wedge \omega) \otimes s$, $\omega \in \Omega^1(M)$. Poiché, se $f \in C^\infty(M)$, $(f\varphi) \otimes s = \varphi \otimes (fs)$, affinché la definizione di $\tilde\nabla$ sia sensata è necessario verificare che $\tilde\nabla((f\varphi) \otimes s) = \tilde\nabla(\varphi \otimes (fs))$. Si ha:

$$\begin{aligned} \tilde\nabla((f\varphi) \otimes s) &= d(f\varphi) \otimes s + (-1)^p (f\varphi) \wedge \nabla s \\ &= df \wedge \varphi \otimes s + f d\varphi \otimes s + (-1)^p f\varphi \wedge \nabla s = df \wedge \varphi \otimes s + f\tilde\nabla(\varphi \otimes s), \end{aligned}$$

e, d'altra parte,

$$\begin{aligned} \tilde\nabla(\varphi \otimes (fs)) &= d\varphi \otimes (fs) + (-1)^p \varphi \wedge \nabla(fs) \\ &= f(d\varphi \otimes s) + (-1)^p (\varphi \wedge df) \otimes s + (-1)^p f(\varphi \wedge \nabla s) \\ &= df \wedge \varphi \otimes s + f\tilde\nabla(\varphi \otimes s), \end{aligned}$$

avendo usato nell'ultimo passaggio $\varphi \wedge df = (-1)^p df \wedge \varphi$. La definizione è dunque ben posta. D'ora in poi, con un piccolo abuso di notazione, porremo $\tilde\nabla = \nabla$.

In particolare da quanto appena visto segue $\nabla(f\nabla s) = df \wedge \nabla s + f\nabla^2 s$, ed allora per $\nabla^2 : C^\infty(M,E) \to C^\infty(M, \bigwedge^2 T^*M \otimes E)$, si ha

$$\begin{aligned}\nabla^2(fs) &= \nabla(df \otimes s + f\nabla s)\\ &= d^2 f \otimes s - df \wedge \nabla s + df \wedge \nabla s + f\nabla^2 s = f\nabla^2 s,\end{aligned}$$

poiché $d^2 f = 0$. Dunque ∇^2 si identifica con una sezione del fibrato $\bigwedge^2 T^*M \otimes \mathrm{End}(E)$, definisce cioè una 2-forma su M a valori endomorfismi di E.

Definizione 8. Siano E, ∇ come sopra. La sezione $\nabla^2 \in C^\infty(M, \bigwedge^2 T^*M \otimes \mathrm{End}(E))$ è detta la *curvatura* della connessione ∇.

Vediamo l'espressione della curvatura in coordinate locali. Sia $\{e_i\}$ una base locale di E, allora con le notazioni usuali:

$$\begin{aligned}\nabla^2(e_i) &= \nabla(\omega_i^j \otimes e_j)\\ &= d\omega_i^j \otimes e_j - \omega_i^j \wedge \omega_j^h \otimes e_h\\ &= (d\omega_i^h + \omega_j^h \wedge \omega_i^j) \otimes e_h = \Omega_i^h \otimes e_h.\end{aligned}$$

Dunque localmente la curvatura ∇^2 è determinata da una matrice di 2-forme, $\Omega = (\Omega_i^h)_{h,i=1,\dots,k}$, calcolabile a partire dalle 1-forme di connessione ω_i^j tramite le

$$\Omega_i^h = d\omega_i^h + \omega_j^h \wedge \omega_i^j, \qquad h,i = 1,\dots,k, \tag{17}$$

che si riscrivono anche, in forma matriciale,

$$\Omega = d\omega + \omega \wedge \omega,$$

dove il prodotto esterno a secondo membro è un prodotto righe per colonne di matrici di 1-forme. Poiché inoltre, come osservato sopra, la curvatura definisce una sezione globale di $\bigwedge^2 T^*M \otimes \mathrm{End}(E)$, si ha che se Ω_α (risp. Ω_β) è la matrice di curvatura in un aperto banalizzante U_α (risp. U_β), e se, come al solito, $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to GL(k,\mathbb{R})$ è la funzione di trasizione relativa, su $U_\alpha \cap U_\beta$ vale l'importante formula

$$\Omega_\beta = g_{\alpha\beta}^{-1} \Omega_\alpha g_{\alpha\beta}\,. \tag{18}$$

In alternativa, possiamo verificare (18) con un calcolo esplicito: ricordiamo che $\Omega_\alpha = d\omega_\alpha + \omega_\alpha \wedge \omega_\alpha$; se allora si pone, per semplificare le notazioni, $\Omega := \Omega_\alpha$, $\Omega' := \Omega_\beta$, $\omega := \omega_\alpha$, $\omega' := \omega_\beta$ e $G := g_{\alpha\beta}$, ne segue:

$$\begin{aligned}\Omega' &= d\omega' + \omega' \wedge \omega'\\ &= d(G^{-1}dG + G^{-1}\omega G) + (G^{-1}dG + G^{-1}\omega G) \wedge (G^{-1}dG + G^{-1}\omega G)\\ &= dG^{-1} \wedge dG + dG^{-1} \wedge \omega G + G^{-1}d\omega G - G^{-1}\omega \wedge dG + G^{-1}dG \wedge G^{-1}dG\\ &\quad + G^{-1}dG \wedge G^{-1}\omega G + G^{-1}\omega G \wedge G^{-1}dG + G^{-1}\omega G \wedge G^{-1}\omega G\\ &= dG^{-1} \wedge dG + dG^{-1} \wedge \omega G + G^{-1}d\omega G - G^{-1}\omega \wedge dG - dG^{-1}G \wedge G^{-1}dG\\ &\quad - dG^{-1}G \wedge G^{-1}\omega G + G^{-1}\omega \wedge dG + G^{-1}\omega \wedge \omega G\\ &= G^{-1}d\omega G + G^{-1}\omega \wedge \omega G = G^{-1}\Omega G,\end{aligned}$$

avendo usato $G^{-1}dG = -dG^{-1}G$. In definitiva, abbiamo ritrovato la (18).

Proposizione 2 (Identità di Bianchi)**.** *Con le notazioni di sopra:*

$$d\Omega = [\Omega, \omega] = \Omega \wedge \omega - \omega \wedge \Omega. \tag{19}$$

Proof. È un semplice calcolo:

$$\begin{aligned} d\Omega &= d(d\omega + \omega \wedge \omega) \\ &= d\omega \wedge \omega - \omega \wedge d\omega \\ &= (d\omega + \omega \wedge \omega) \wedge \omega - \omega \wedge (d\omega + \omega \wedge \omega) = [\Omega, \omega] \,. \quad \square \end{aligned}$$

Osservazione 4. Siano X, Y campi di vettori su M e $s \in C^\infty(M, E)$ una sezione di E. Consideriamo

$$R(X,Y)(s) := \left(\nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X,Y]}\right)(s). \tag{20}$$

Utilizzando la formula di Leibnitz e le proprietà di linearità della derivata covariante si verifica senza difficoltà che $R(X,Y)(fs) = fR(X,Y)(s)$ e che

$$R \in C^\infty(M, \Lambda^2 M \otimes \mathrm{End}(E)) \tag{21}$$

Passando a coordinate locali si verifica anche che

$$R = \nabla^2 \quad \text{in} \quad C^\infty(M, \Lambda^2 M \otimes \mathrm{End}(E)) \tag{22}$$

7.5. **Connessione di Levi-Civita.**

Specializziamoci ora al caso $E = TM$. Si verifica facilmente che, per ogni connessione ∇ su TM,

$$T(X,Y) := \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y] \,, \qquad X, Y \in C^\infty(M, TM),$$

è un campo tensoriale, $T \in C^\infty(M, T^*M \otimes T^*M \otimes TM)$, detto *torsione* di ∇.

Definizione 9. Una connessione ∇ su TM è detta *simmetrica* se ha torsione nulla:

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X,Y] \,, \qquad X, Y \in C^\infty(M, TM).$$

Il risultato seguente è giustamente noto come il *teorema fondamentale della geometria riemanniana.*

Teorema 2. *Sia (M,g) una varietà riemanniana. Esiste un'unica connessione ∇ su TM simmetrica e compatibile con la metrica.*

La connessione di cui il teorema afferma l'esistenza è detta *connessione di Levi-Civita.*

Proof. Siano $X, Y, Z \in C^\infty(M, TM)$. Se ∇ esiste, dalla compatibilità con g segue:

$$X(g(Y,Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z).$$

Permutando ciclicamente X,Y e Z nella relazione precedente si ottengono altre due relazioni; sommando allora le prime due e sottraendo la terza si trova, tenendo conto della simmetria della connessione:

$$\begin{aligned} X(g(Y,Z)) &+ Y(g(Z,X)) - Z(g(X,Y)) \\ &+ g([X,Y],Z) - g([X,Z],Y) - g([Y,Z],X) = 2g(\nabla_X Y, Z). \end{aligned} \tag{23}$$

Da questa equazione e dalla non degeneratezza della metrica segue subito l'unicità di ∇. Ma si ottiene subito anche l'esistenza: per X ed Y fissati il primo membro è un funzionale $C^\infty(M)$-lineare di Z, e dunque, per l'isomorfismo naturale tra T^*Me TM indotto dalla metrica, definisce un campo vettoriale $W_{X,Y}$ su M, che dipende $\mathbb{R}$-bilinearmente da X ed Y, e si verifica poi facilmente che $X \to W_{X,Y}$ è $C^\infty(M)$-lineare, e che $Y \to W_{X,Y}$ soddisfa la regola di Leibniz; pertanto $(X,Y) \to W_{X,Y}$ definisce una connessione su TM. Si verifica poi che questa connessione è simmetrica e compatibile con la metrica. L'esistenza è anche dimostrata dalla forma locale che deriveremo qui sotto a partire dalla (23). $\square$

Esempio Sia $M \subset \mathbb{R}^n$ una sottovarietà di codimensione 1 e sia g_M la metrica indotta su M dalla metrica euclidea di $\mathbb{R}^n$. Ad esempio, $S^2 \subset \mathbb{R}^3$. Consideriamo la connessione ottenuta su M per proiezione dalla connessione banale di $M \times \mathbb{R}^n$ (abbiamo visto l'esempio di $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ ma il caso generale è identico). Non è difficile verificare che questa connessione è proprio la connessione di Levi-Civita di (M, g_M) (infatti, è senza torsione ed è compatibe con la metrica g_M).

7.6. **Descrizione locale della connessione di Levi-Civita.** Abiamo appena visto che la connessione di Levi-Civita è definita dalla formula

$$
\begin{aligned}
2g(\nabla_X Y, Z) = \;& X(g(X,Z)) + Y(g(Z,X)) + \\
& -Z(g(X,Y)) + g([X,Y],Z) + \\
& -g([X,Z],Y) - g([Y,Z],X)
\end{aligned}
\tag{24}
$$

Diamo ora una descrizione locale della connessione di Levi-Civita. Consideriamo una carta locale $(U, (x^1, ..., x^n))$ e scegliamo X, Y, Z in una base locale per TM:

$$X := \frac{\partial}{\partial x^h} \quad , \quad Y := \frac{\partial}{\partial x^l} \quad , \quad Z := \frac{\partial}{\partial x^m}.$$

Ricordiamo allora che

$$\left[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right] = 0$$

e che

$$\nabla \frac{\partial}{\partial x^\ell} = \omega^i_\ell \frac{\partial}{\partial x^i}$$

dove $\omega^i_\ell \in \Omega^1(U)$. Esplicitando i coefficienti $\omega^i_\ell = \Gamma^i_{m\ell} dx^m$, $\Gamma^i_{m\ell} \in C^\infty(U)$ otteniamo la relazione

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^\ell} = \Gamma^i_{j\ell} \frac{\partial}{\partial x^i}. \tag{25}$$

I coefficienti Γ^i_{lm} si dicono *simboli di Christoffel*. Per darne un'espressione esplicita introduciamo le seguenti notazioni per gli elementi di matrice del tensore metrico:

$$g_{ij} := g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) \quad , \quad g^{ij} = (g_{ij})^{-1};$$

effettuando i prodotti scalari membro a membro nella (24) e sostituendo otteniamo

$$2\Gamma^l_{ij} = g^{lk}\left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right)$$

Si può dimostrare che la collezione di matrici di 1-forme definite localmente da $\omega^i_j := \Gamma^i_{\ell,j} dx^\ell$ sono una connessione; questa connessione è per definizione compatibile con la metrica e senza torsione e ciò dimostra nuovamente l'esistenza della connessione di Levi-Civita.

A partire dalla connesssione di Levi-Civita possiamo considerare la curvatura ∇^2. Sappiamo che localmente ∇^2 si presenta come una matrice di 2-forme Ω. Sappiamo anche, si veda l'Osservazione 4, che $\nabla^2 = R$ con

$$R(X,Y)(Z) = \left(\nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X,Y]}\right)(Z).$$

Si pone:

$$R\left(\frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^l}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) := R^i_{jkl} \frac{\partial}{\partial x_i}. \tag{26}$$

Classicamente i termini R^i_{jkl} sono i coefficienti di un tensore R, detto *tensore di curvatura.* Viene spesso utilizzato anche il tensore $R_{ijkl} := g_{im}R^m_{jkl}$ che può essere definito in maniera invariante come

$$R_{ijkl} := g\left(R\left(\frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^l}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right), \frac{\partial}{\partial x_i}\right) .$$

Diamo l'espressione locale del tensore di curvatura della connessione di Levi-Civita in termini della metrica:

$$R^l_{kij} = \frac{\partial}{\partial x_i}\Gamma^l_{jk} - \frac{\partial}{\partial x_j}\Gamma^l_{ik} + \Gamma^l_{im}\Gamma^m_{jk} - \Gamma^l_{jm}\Gamma^m_{ik}$$

Il tensore di curvatura della connessione di Levi-Civita gode delle seguenti proprità:

$$\begin{array}{l} R(X,Y) = -R(Y,X)\,, \quad g(R(W,X)Y,Z) + g(Y,R(W,X)Z) = 0 \\ R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0 \\ g(R(W,X)Y,Z) = g(R(Y,Z)W,X) \end{array} \tag{27}$$

Le prime due relazioni esprimono rispettivamente il fatto che R è una due forma a valori endomorfismi e che $R_p(W,X)$ è un endomorfismo antisimmetrico di T_pM. La terza è ottenuta permutando ciclicamente X, Y, Z nella definizione di R, sommando e utilizzando il fatto che la connessione è priva di torsione. La quarta è una conseguenza algebrica delle prime tre. È ovvio come le (27) si traducano in proprietà di simmetria per gli indici di R^i_{jkl} e R_{ijkl}.

7.7. **Geodetiche di una varietà.**

Definizione 10. Sia M una varietà riemanniana, ∇ la connessione di Levi-Civita associata, $\gamma : I \to M$ una curva C^∞. γ si dice geodetica se è autoparallela, ovvero se $\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = 0$.

Osserviamo che poiché la connessione di Levi-Civita è compatibile con la metrica, ne segue che la norma di $\dot{\gamma}$ è costante lungo γ. A livello locale la condizione di autoparallelismo si esprime nel seguente sistema di equazioni differenziali ordinarie:

$$\frac{d^2\gamma}{dt^2} + \Gamma^i_{jk}(\gamma(t))\,\dot{\gamma}^j\dot{\gamma}^k = 0 \quad , \tag{28}$$

con $\gamma := (\gamma^1, ..., \gamma^n)$. Enunciamo ora un risultato di esistenza locale delle geodetiche; a livello preliminare osserviamo che se γ è una geodetica allora l'applicazione $k \mapsto \gamma(kt)$, $k \in \mathbb{R}$ definisce anch'essa una geodetica.

Teorema 3. *Sia m_0 appartenente ad una carta locale U in M. Allora esiste un intorno aperto U_{m_0} di m_0 ed un $\varepsilon > 0$ tali che per ogni $m \in U_{m_0}$, per ogni $v \in T_mM$ con $\|v\| < \varepsilon$ esiste ed è unica la geodetica $\gamma_v : (-2,2) \to M$ tale che $\gamma_v(0) = m$, $\dot{\gamma}_v(0) = v$.*

La dimostrazione del teorema precedente si basa sul seguente risultato generale di esistenza ed unicità della soluzione locale di sistemi di equazioni differenziali, applicato alle (28).

Teorema 4. *Sia data $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un'applicazione C^∞, ed il sistema*

$$\frac{d^2x}{dt^2} = F\left(x, \frac{dx}{dt}\right) \quad , \quad x : I \subset \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{R}^n. \tag{29}$$

Allora per ogni $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ *esiste un intorno* $U \times V$ *di* (x_0, y_0) *ed un* $\varepsilon > 0$ *tali che per ogni* $(x, y) \in U \times V$ *il sistema (29) ammette un'unica soluzione* $x : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^n$ *con* $x(0) = x_0$, $\overset{\bullet}{x}(0) = y$.

Osserviamo che nel Teorema 3 ε è uniforme rispetto alla carta locale U. Abbiamo dunque un risultato di esistenza locale delle geodetiche; si puo dimostrare che tali curve sono quelle che minimizzano localmente la distanza tra due punti in una varietà riemanniana:

$$d(p, q) = \inf_{\gamma} L(\gamma)$$

dove l'estremo inferiore è valutato sulla classe delle curve che hanno estremi p e q. È importante notare che questa proprietà è solo locale.

7.8. **Coordinate Normali.**

Definizione 11. Con la notazione del teorema 3, sia $m \in M$, V un intorno di 0 nel piano tangente T_mM. L'applicazione $exp_m(v) := \gamma_v(1) \in M$, con $v \in V$, si dice applicazione esponenziale.

Localmente exp_m è un diffeomorfismo. Per dimostrarlo facciamo l'identificazione $T_0(T_mM) \simeq T_mM$ e consideriamo il differenziale $dexp_m$ dell'applicazione esponenziale come un'applicazione da T_mM in sé; calcoliamo quindi, presa la curva $\gamma_w(t) := tw$ (ovviamente passante per l'origine e con vettore tangente w in 0),

$$\left.\frac{d}{dt}(exp_w(tw))\right|_{t=0} = w.$$

L'identità precedente ci dice che $dexp_m$, calcolata in 0, è l'identità. Dunque il teorema delle funzioni implicite implica che exp_m è localmente un diffeomorfismo, come volevasi dimostrare.

Le coordinate definite dall'applicazione esponenziale exp_m si dicono *coordinate normali centrate in* m. Fissiamo ora una base ortonormale in $T_{m_0}M$; per costruzione i vettori $\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{m_0}$ definiti dalle coordinate normali sono ortonormali, e quindi

$$g_{ij}(x) = \delta_{ij} + O(|x|)$$

in un intorno di 0. È possibile migliorare questa stima:

Proposizione 3. *In coordinate normali* $\Gamma^k_{ij}(0) = 0$.

Dimostrazione Per avere l'asserto basta mostrare che nell'origine

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = 0; \tag{30}$$

Consideriamo il campo vettoriale

$$X := \sum_i a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad , \quad a_i \in \mathbb{R};$$

nell'ipotesi che $\nabla_X X = 0$ nell'origine e scegliendo opportunamente i coefficienti a_i otteniamo la (30) dal seguente calcolo

$$\begin{aligned}
\nabla_{\left(\frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{\partial}{\partial x^j}\right)} \left(\frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{\partial}{\partial x^j}\right) &= \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \left(\frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{\partial}{\partial x^j}\right) + \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \left(\frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{\partial}{\partial x^j}\right) \\
&= \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^i} + \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^i} + \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} + \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^j} \\
&= 2\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j}.
\end{aligned}$$

Dunque rimane da dimostrare che $\nabla_X X = 0$ nell'origine. Ciò è però chiaro una volta osservato che X è il campo tangente ai raggi uscenti dall'origine, cioè alle geodetiche di M per il punto fissato; ne segue, dalla definizione stessa di geodetica, che $\nabla_X X = 0$ lungo tale raggio e la proposizione è dimostrata.

Ricordiamo ora che la connessione di Levi-Civita è compatibile con la metrica, ovvero

$$X(g(Y,Z)) = g(\nabla_X, Z) + g(Y, \nabla_X Z);$$

scrivendo l'uguaglianza precedente in termini di elementi della base otteniamo

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^p} = \Gamma^l_{pi} g_{lj} + \Gamma^l_{pj} g_{pi}$$

il che implica, scrivendo tali relazioni nell'origine e tenendo conto della proposizione precedente, che lo sviluppo di Taylor della metrica in un intorno di 0 non contiene termini lineari; in formule

$$g_{ij} = \delta_{ij} + O(|x|^2).$$

8. Classi caratteristiche. Omomorfismo di Chern-Weil.

8.1. Polinomi invarianti.

Denotiamo con $M_k(\mathbb{C})$ l'algebra delle matrici $k \times k$ a coefficienti complessi.

Definizione 12. Sia $P : M_k(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ una funzione polinomiale. Diremo che P è un polinomio invariante se

$$P(gAg^{-1}) = P(A)\,, \quad \forall g \in GL(k,\mathbb{C})\,, \forall A \in M_k(\mathbb{C}) \tag{31}$$

L'insieme dei polinomi invarianti ha una struttura naturale di algebra; la notazione standard per quest' algebra è $\mathrm{I}(GL(k,\mathbb{C}))$.
Più in generale, se G è un gruppo di Lie allora ha senso considerare l'algebra $\mathrm{I}(G)$ delle funzioni polinomiali $P : \mathrm{Lie}(G) \to \mathbb{C}$ che sono invarianti rispetto alla rappresentazione aggiunta $\mathrm{Ad} : G \to \mathrm{End}(\mathrm{Lie}(G))$:

$$P(\mathrm{Ad}_g(A)) = P(A) \;\; \forall g \in G\,, \forall A \in \mathrm{Lie}(G)\,.$$

Noi saremo esclusivamente interessati alle algebre

$$\mathrm{I}(GL(k,\mathbb{C}))\,, \quad \mathrm{I}(U(k))\,, \quad \mathrm{I}(O(k))\,, \quad \mathrm{I}(SO(k))\,.$$

Vi ricordo che in questi quattro casi si ha:

$$\mathrm{Lie}(GL(k,\mathbb{C})) = M_k(\mathbb{C})\,, \quad \mathrm{Lie}(U(k)) = \{\text{matrici antihermitiane}\}$$

$$\mathrm{Lie}(O(k)) = \mathrm{Lie}(SO(k)) = \{\text{matrici antisimmetriche}\};$$

inoltre la rappresentazione aggiunta è proprio data dalla coniugazione $\mathrm{Ad}_g(A) = gAg^{-1}$.

Esempio 1. La traccia e il determinante di una matrice sono due esempi di polinomi invarianti.

Esempio 2. Consideriamo i polinomi $P_\ell(A)$ definiti dall'identità

$$\det(I + tA) = \sum_{\ell=0}^{k} P_\ell(A) t^\ell\,.$$

I polinomi $P_\ell(A)$ sono invarianti; si noti che $P_1(A) = \mathrm{Tr}(A)$, $P_k(A) = \det(A)$. Più in generale $P_\ell(A) = \mathrm{Tr}(\Lambda^\ell A)$. Per dimostrare quest'ultima identità notiamo che essa è facilmente dimostrabile sulle matrici diagonali; ne segue, per invarianza, che essa è vera sulle matrici diagonalizzabili e quindi, per densità, su tutte le matrici.

8.2. L'omomorfismo di Chern-Weil.

Sia ora E un fibrato complesso di rango k su una varietà differenziabile M munito di una connessione ∇^E. Consideriamo la curvatura

$$(\nabla^E)^2 \in \mathcal{C}^\infty(M, \Lambda^2(T^*M) \otimes \mathrm{End}(E))\,.$$

Localmente la curvatura di ∇^E è data da una matrice Ω di 2 forme; se U_α e U_β sono due aperti banalizzanti, allora per le relative matrici di curvatura Ω_α, Ω_β si ha (Lezione 3):

$$\Omega_\alpha = g\,\Omega_\beta\, g^{-1}\,, \tag{32}$$

con $g \equiv g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to GL(k,\mathbb{C})$ le funzioni di transizione.
Sia ora $P \in \mathrm{I}(GL(k,\mathbb{C}))$; dato che la curvatura è una matrice di *due* forme e dato che il prodotto wedge è commutativo sulle 2 forme, ha senso considerare $P(\Omega_\alpha) \in \mathcal{C}^\infty(U_\alpha, \Lambda^* T^* U_\alpha)$ e analogamente $P(\Omega_\beta)$. Per l'invarianza di P e per (32) abbiamo che

$$P(\Omega_\alpha) = P(\Omega_\beta)\,, \quad \text{su } \; U_\alpha \cap U_\beta\,;$$

Otteniamo quindi una forma differenziale di grado pari *globalmente definita* che denotiamo con $P(E, \nabla^E)$. Si noti che se P è un polinomio omogeneo di grado j allora $P(E, \nabla^E) \in \mathcal{C}^\infty(M, \Lambda^{2j}(T^*M))$.

Teorema 5. *Sia $P \in \mathrm{I}(GL(k, \mathbb{C}))$ e sia ∇^E una connessione su E. Si ha*

$$dP(E, \nabla^E) = 0\,. \tag{33}$$

Inoltre, se ∇_0^E e ∇_1^E sono due connessioni su E allora esiste una forma differenziale $TP(\nabla_1^E, \nabla_0^E) \in \mathcal{C}^\infty(M, \Lambda^*(T^*M))$ tale che

$$P(E, \nabla_1^E) - P(E, \nabla_0^E) = d(TP(\nabla_1^E, \nabla_0^E)) \tag{34}$$

Corollario 3. *Per ogni fibrato complesso di rango k su M è definito un omomorfismo di algebre*

$$\mathrm{CW}^E : \mathrm{I}(GL(k, \mathbb{C})) \to H^{2*}_{\mathrm{dR}}(M, \mathbb{C}) \tag{35}$$

$$\mathrm{CW}^E(P) = [P(E, \nabla^E)]$$

che è detto omomorfismo di Chern-Weil. Scriveremo brevemente CW *invece di* CW^E.

Dimostrazione. Basta dimostrare il teorema per i polinomi omogenei. Sia P un polinomio omogeneo invariante di grado j. A partire da P possiamo definire un'applicazione multilineare $\widetilde{P}(A_1, \ldots, A_j)$ tale che

(i) $\widetilde{P}(A, \ldots, A) = P(A)$

(ii) $\widetilde{P}(A_1, \ldots, A_j) = \widetilde{P}(A_{\sigma(1)}, \ldots, A_{\sigma(j)})\,, \quad \forall \sigma \in S_j$

(iii) $\widetilde{P}(gA_1g^{-1}, \ldots, gA_jg^{-1}) = \widetilde{P}(A_1, \ldots, A_j)$.

L'applicazione multilineare $\widetilde{P}$ è definita come segue

$$\widetilde{P}(A_1, \ldots, A_j) = \frac{1}{j!}(\text{coefficiente di } t_1 \cdots t_j \text{ in } P(t_1A_1 + \cdots + t_jA_j))$$

Ad esempio, per il polinomio invariante $Q(A) = \mathrm{Tr}(A^2)$ si ha:

$$Q(t_1A_1 + t_2A_2) = \mathrm{Tr}(t_1^2A_1^2 + t_1t_2(A_1A_2 + A_2A_1) + t_2^2A_2^2)\,;$$

ne segue che $\widetilde{Q}(A_1, A_2) = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(A_1A_2 + A_2A_1) = \mathrm{Tr}(A_1A_2)$.
Sia ora $X \in M_k(\mathbb{C}) \equiv \mathrm{Lie}(GL(k, \mathbb{C}))$. Si ha

$$\sum_i \widetilde{P}(A_1, \ldots, [A_i, X], \ldots, A_j) = 0 \tag{36}$$

Per dimostrare questa identità consideriamo $\exp(tX) \equiv \sum_j (tX)^j/j\,!$. Poniamo $\exp(-tX) := g_t \in GL(k, \mathbb{C})$. È facile verificare che

$$\frac{d}{dt}(g_tAg_t^{-1})|_{t=0} = [A, X]\,. \tag{37}$$

Per ipotesi

$$\widetilde{P}(g_tA_1g_t^{-1}, \ldots, g_tA_jg_t^{-1}) = \widetilde{P}(A_1, \ldots, A_j) \quad \forall t \in \mathbb{R}\,;$$

derivando rispetto a t questa uguaglianza, utilizzando la multilinearità di $\widetilde{P}$ e (37) otteniamo subito (36).
Supponiamo ora che $\mathcal{A}_m$ sia una matrice di j_m forme e che $\mathcal{X}$ sia una matrice di 1 forme. Sotto queste ipotesi:

$$\sum_i (-1)^{j_1 + \cdots + j_i} \widetilde{P}(\mathcal{A}_1, \ldots, [\mathcal{A}_i, \mathcal{X}], \ldots, \mathcal{A}_j) = 0 \tag{38}$$

In questa formula il commutatore è, per definizione, il commutatore graduato:

$$[\mathcal{A}_i, \mathcal{X}] := \mathcal{A}_i\mathcal{X} - (-1)^{j_i \cdot 1}\mathcal{X}\mathcal{A}_i \equiv \mathcal{A}_i\mathcal{X} - (-1)^{j_i}\mathcal{X}\mathcal{A}_i\,.$$

Per dimostrare (38) possiamo assumere che $\mathcal{A}_m = A_m\omega_m$, con $A_m \in \mathrm{Lie}(GL(k,\mathbb{C}))$ e $\omega_m \in \mathcal{C}^\infty(M, \Lambda^{j_m}(T^*M))$, e che $\mathcal{X}_i = X\alpha$, con $X \in \mathrm{Lie}GL(k,\mathbb{C})$ e α una 1-forma su M. Con calcoli elementari si dimostra allora che

$$\sum_i (-1)^{j_1+\cdots+j_i}\widetilde{P}(\mathcal{A}_1,\ldots,[\mathcal{A}_i,\mathcal{X}],\ldots,\mathcal{A}_j)$$

è uguale a

$$\sum_i \widetilde{P}(A_1,\ldots,[A_i,X],\ldots,A_j)(\alpha\wedge\omega_1\wedge\cdots\wedge\omega_j)$$

che è zero per (36). Siamo ora nella posizione di dimostrare (33). Sia ω la matrice di 1-forme associata a ∇^E in un aperto banalizzante $U \subset M$; sia Ω la relativa matrice di curvatura; vi ricordo l'identità di Bianchi:

$$d\Omega = [\Omega, \omega]\,. \tag{39}$$

Certamente $dP(\Omega) = d\widetilde{P}(\Omega,\ldots,\Omega)$; utilizzando la multilinearità di $\widetilde{P}$ ed il fatto che Ω è una matrice di 2-forme [14], possiamo eguagliare questa espressione a

$$\sum \widetilde{P}(\Omega,\ldots,d\Omega,\ldots,\Omega)$$

(pensate a come si dimostra la formula per la derivata di un prodotto) e utilizzando Bianchi e (38) otteniamo

$$\sum \widetilde{P}(\Omega,\ldots,d\Omega,\ldots,\Omega) = \sum \widetilde{P}(\Omega,\ldots,[\Omega,\omega],\ldots,\Omega) = 0;$$

quindi $dP(\Omega) = 0$ che è quello che dovevamo dimostrare.

Passiamo alla seconda parte dell'enunciato. Siano ∇_0^E e ∇_1^E due connessioni. Abbiamo visto (lezione 3) che

$$\nabla_1^E - \nabla_0^E \in \mathcal{C}^\infty(M, T^*M\otimes \mathrm{End}(E)).$$

Poniamo $\theta = \nabla_1^E - \nabla_0^E$ e consideriamo $\nabla_t^E = (1-t)\nabla_0^E + t\nabla_1^E = \nabla_0^E + t\theta$. Sia U un aperto banalizzante per E e denotiamo con ω_t e Ω_t le corrispondenti matrici di connessione e di curvatura. La formula precedente ci dà

$$\omega_t = \omega_0 + t\theta\,.$$

Da quest'equazione e dall'equazione di struttura ($\Omega_t = d\omega_t + \omega_t\wedge\omega_t$ otteniamo immediatamente

$$\frac{d\Omega_t}{dt} = d\theta + [\theta, \omega_t] \tag{40}$$

[14]gli eventuali segni dovuti alla regola di derivazione per prodotti esterni sono quindi tutti positivi

(Osservazione: $\theta \wedge \theta$ può benissimo essere non nullo, dato che θ non è omogeneo.) Facendo uso di (40), della multilinearità e simmetria di $\widetilde{P}$ e del fatto che Ω_t è una matrice di due forme otteniamo

$$\begin{aligned} P(\Omega_1) - P(\Omega_0) &= \int_0^1 \frac{d}{dt} P(\Omega_t) dt \\ &= \int_0^1 \frac{d}{dt} \widetilde{P}(\Omega_t, \ldots, \Omega_t) dt \\ &= j \int_0^1 \widetilde{P}(\frac{d\Omega_t}{dt}, \Omega_t, \ldots, \Omega_t) dt \\ &= j \int_0^1 \widetilde{P}(d\theta + [\theta, \omega], \Omega_t, \ldots, \Omega_t) dt \\ &= j \int_0^1 \widetilde{P}(d\theta, \Omega_t, \ldots, \Omega_t) dt + j \int_0^1 \widetilde{P}([\theta, \omega_t], \Omega_t, \ldots, \Omega_t) dt \end{aligned}$$

Per (38) sappiamo che:

$$-\widetilde{P}([\theta, \omega_t], \Omega_t, \ldots, \Omega_t) = \widetilde{P}(\theta, [\Omega_t, \omega_t], \ldots, \Omega_t) + \cdots + \widetilde{P}(\theta, \Omega_t, \ldots, \Omega_t, [\Omega_t, \omega_t])$$

Sostituendo e utilizzando Bianchi ancora una volta otteniamo

$$\begin{aligned} P(\Omega_1) - P(\Omega_0) &= j \int_0^1 \widetilde{P}(d\theta, \Omega_t, \ldots, \Omega_t) dt \\ &- j \int_0^1 \sum_{j \geq 2} \widetilde{P}(\theta, \Omega_t, \ldots, d\Omega_t, \ldots, \Omega_t) dt \\ &= d\left(j \int_0^1 \widetilde{P}(\theta, \Omega_t, \ldots, \Omega_t) dt \right) \end{aligned}$$

Ponendo

$$TP(\nabla_1^E, \nabla_0^E) = j \int_0^1 \widetilde{P}(\theta, \Omega_t, \ldots, \Omega_t) dt$$

otteniamo la dimostrazione completa del teorema.

L'omomorfismo di Chern-Weil dà una misura della non-banalità di un fibrato: se E è banale allora possiamo scegliere la connessione banale che ha curvatura nulla; in questo caso $\mathrm{CW}(P) = 0 \; \forall P$. È anche chiaro che se E ed F sono isomorfi allora $P(E) = P(F)$ in $H^{2*}_{\mathrm{dR}}(M, \mathbb{C})$ per ogni $P \in \mathrm{I}(GL(k, \mathbb{C}))$. Per capire questo punto osserviamo che se $\phi : E \to F$ è un isomorpfismo allora possiamo scegliere intorni banalizzanti comuni, perché se $\psi_\alpha : \pi_F^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{C}^k$ è una banalizzazione per F, allora $\psi_\alpha \circ \phi|_{U_\alpha}$ è una banalizzazione per $\pi_E^{-1}(U_\alpha)$. Con queste scelte i due fibrati hanno le stesse funzioni di transizione. Ora, se ∇^F è una connessione su F allora esiste una connessione indotta ∇^ϕ su E: $\nabla^\phi_X(e)$ è la sezione che in $m \in M$ vale $\phi^{-1}((\nabla^F_X(\phi_* s)(m))$, con $(\phi_* s)(m) := \phi(s(m))$. Con questa scelta di connessione su E è immediato verificare che le due connessioni hanno le stesse matrici di connessione e quindi le stesse matrici di curvatura. Da ciò segue immediatamente che $P(E) = P(F)$.

8.3. **Riduzione del gruppo di struttura.**

Sia E un fibrato compesso. Sia G un sottogruppo di Lie di $GL(k, \mathbb{C})$. Supponiamo che sia possibile scegliere un ricoprimento banalizzante con funzioni di transizione di E a valori in G: si dice in tal caso che il gruppo di struttura di E è riducibile a G. Se E è un fibrato complesso di rango k allora possiamo sempre dotarlo di una metrica hermitiana. Utilizzando basi locali ortonormali, sempre esistenti per Gram-Schmidt, vediamo che un tale fibrato ha gruppo di struttura riducibile a $U(k)$. Inoltre, possiamo sempre scegliere una connessione ∇ compatibile con la metrica hermitiana, si veda [16, Capitolo III, Prop. 1.11] per una dimostrazione dettagliata. Una tale connessione ha matrice di 1-forme antihermitiana rispetto ad una base ortonormale; detto diversamente, la matrice di 1-forme è a valori in Lie$U(k)$; conseguentemente la matrice di curvatura è anche a valori in Lie$U(k)$ ed è ovviamente $U(k)$-invariante dato che le funzioni di transizione sono a valori in $U(k)$. Rimane allora definito un omomorfismo di algebre

$$\mathrm{CW}_{U(k)} : \mathrm{I}(U(k)) \to H^{2*}_{\mathrm{dR}}(M, \mathbb{C})$$

con

$$\mathrm{CW}_{U(k)}(P) = [P(E, \nabla^E)]$$

dove ∇^E è una connessione come quella appena descritta.

Se E è un fibrato reale allora lo possiamo dotare di una metrica riemanniana; il gruppo di struttura è allora riducibile a $O(k)$ ed esiste sempre una connessione ∇^E con matrice di curvatura in Lie$O(k)$ e $O(k)$-invariante. In tal caso otteniamo

$$\mathrm{CW}_{O(k)} : \mathrm{I}(O(k)) \to H^{2*}_{\mathrm{dR}}(M, \mathbb{C})$$

Infine, se E è un fibrato reale orientabile, allora possiamo sempre ridurre il gruppo di struttura a $SO(k)$ e scegliendo ∇^E con matrice di curvatura in Lie$SO(k)$ e $SO(k)$-invariante otteniamo $\mathrm{CW}_{SO(k)} : \mathrm{I}(SO(k)) \to H^{2*}_{\mathrm{dR}}(M, \mathbb{C})$

Osservazione. Sia E us fibrato complesso su M. Sia G un sottogruppo di Lie di $GL(k, \mathbb{C})$ e supponiamo che il gruppo di struttura di E sia riducibile a G (i.e., esiste un ricoprimento banalizzante $\{U_\alpha\}$ con funzioni di transizione a valori in G). Fissiamo una volta per tutte una tale ricoprimento. Se una connessione ∇^E ha matrici di connessione ω_α a valori in Lie(G) allora diremo che ∇^E è una G-connessione. Si può dimostrare che se E ha gruppo di struttura riducibile a G, allora E ammette una G-connessione. In questo caso le matrici di curvatura sono anche a valori in Lie(G) e sono invarianti per la rappresentazione aggiunta di G. Dato $P \in \mathrm{I}(G)$ ha quindi senso considerare $P(E, \nabla^E) \in \mathcal{C}^\infty(M, \Lambda^{2*}T^*M)$. La dimostrazione del seguente teorema è analoga a quella del Teorema 5

Teorema 6. *Sia E un fibrato complesso di rango k con gruppo di struttura G, sottogruppo di Lie di $GL(k, \mathbb{C})$. Sia $P \in \mathrm{I}(G)$ e sia ∇^E una G-connessione su E. Si ha*

$$dP(E, \nabla^E) = 0\,. \tag{41}$$

Se ∇^E_0 e ∇^E_1 sono due G-connessioni su E allora esiste una forma differenziale $TP(\nabla^E_1, \nabla^E_0) \in \mathcal{C}^\infty(M, \Lambda^*(T^*M))$ tale che

$$P(E, \nabla^E_1) - P(E, \nabla^E_0) = d(TP(\nabla^E_1, \nabla^E_0)) \tag{42}$$

Rimane definito un omomorfismo di algebre

$$\mathrm{CW}_G : \mathrm{I}(G) \to H^{2*}_{\mathrm{dR}}(M, \mathbb{C}) \tag{43}$$

$$\mathrm{CW}_G(P) = [P(E, \nabla^E)]$$

9. **Varietà complesse hermitiane. Forma di Kähler. Fibrati olomorfi.**

9.1. **Varietà complesse: fibrato tangente olomorfo.**

Sia M una varietà complessa di dimensione complessa n. Sia TM il suo fibrato tangente reale, un fibrato reale di rango $2n$. Sia $TM \otimes \mathbb{C}$ il complessificato di TM, un fibrato complesso di dimensione complessa $2n$.
Supponiamo dapprima che $M = \mathbb{C}^n$ e sia $p \in \mathbb{C}^n$. Sia $C^\infty_p(\mathbb{C}^n, \mathbb{R})$ l'algebra dei germi in p di funzioni C^∞ a valori reali; sia $C^\infty_p(\mathbb{C}^n, \mathbb{C})$ l'algebra dei germi in p di funzioni C^∞ a valori complessi; sia $\mathcal{O}_p(\mathbb{C}^n)$ (rispettivamente $\overline{\mathcal{O}}_p(\mathbb{C}^n)$) la sottoalgebra di $C^\infty_p(\mathbb{C}^n, \mathbb{C})$ costituita dai germi di funzioni olomorfe (rispettivamente antiolomorfe). Indichiamo le coordinate con $(z_1, \ldots, z_n) = (x_1 + iy_1, \ldots, x_n + iy_n)$. Sia $T_p\mathbb{C}^n$ lo spazio tangente a $\mathbb{C}^n$ in p e cioè, per definizione, lo spazio vettoriale reale costituito delle derivazioni $\mathbb{R}$-lineari di $C^\infty_p(\mathbb{C}^n, \mathbb{R})$. Una base per $T_p\mathbb{C}^n$ è costituita da

$$\{\frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_p\,,\ \frac{\partial}{\partial y_j}\Big|_p\,;\ j = 1, \ldots, n\}$$

Lo spazio vettoriale $T_p\mathbb{C}^n \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$, che denoteremo semplicemente $T_p\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}$, è lo spazio vettoriale complesso delle derivazioni $\mathbb{C}$-lineari dell'algebra $C^\infty(\mathbb{C}^n, \mathbb{C})$. Se definiamo i campi di vettori

$$\frac{\partial}{\partial z_j} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x_j} - i\frac{\partial}{\partial y_j})\,, \qquad \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x_j} + i\frac{\partial}{\partial y_j})\,,$$

allora vediamo che una base complessa di $T_p\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}$ è data dalle derivazioni

$$\{\frac{\partial}{\partial z_j}\Big|_p\,,\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}\Big|_p\,;\ j = 1, \ldots, n\}$$

Siano

$$T^{1,0}_p\mathbb{C}^n := \{v \in T_p\mathbb{C}^n \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \mid v[f] = 0 \quad \forall [f] \in \overline{\mathcal{O}}_p(\mathbb{C}^n)\}$$

e

$$T^{0,1}_p\mathbb{C}^n := \{v \in T_p\mathbb{C}^n \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \mid v[f] = 0 \quad \forall [f] \in \mathcal{O}_p(\mathbb{C}^n)\}$$

Allora è facile dimostrare che

$$T_p\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C} = T^{1,0}_p\mathbb{C}^n \oplus T^{0,1}_p\mathbb{C}^n \tag{44}$$

$$T^{1,0}_p\mathbb{C}^n = \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\,(\frac{\partial}{\partial z_1}\Big|_p, \ldots, \frac{\partial}{\partial z_n}\Big|_p\,) \tag{45}$$

$$T^{0,1}_p\mathbb{C}^n = \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\,(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_1}\Big|_p, \ldots, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_n}\Big|_p) \tag{46}$$

Esiste inoltre una naturale operazione di coniugio in $T_p\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}$ e

$$T^{0,1}_p\mathbb{C}^n = \overline{T^{1,0}_p\mathbb{C}^n} \tag{47}$$

Se ora M è una varietà complessa allora $\forall p \in M$ possiamo definire T_pM, $T_pM \otimes \mathbb{C}$, $T^{1,0}_pM$, $T^{1,0}_pM$ e considerando coordinate locali scopriamo (sarà un esercizio) che $T^{1,0}M := \cup_p T^{1,0}_pM$ è un sottofibrato di $TM \otimes \mathbb{C}$ con funzioni di transizione fra le carte $(U, (z_1, \ldots, z_n))$ e $(W, (w_1, \ldots, w_n))$ date da

$$\left(\frac{\partial w_j}{\partial z_i}\right)$$

Trattasi quindi di un fibrato *olomorfo.* Il fibrato $T^{1,0}M$ è detto il fibrato tangente olomorfo. Analogamente $T^{0,1}M := \cup_p T^{0,1}_p M$ è un sottofibrato di $TM \otimes \mathbb{C}$, detto il fibrato tangente antiolomorfo. Vale l'analoga di (47):

$$T^{0,1}M = \overline{T^{1,0}M} \tag{48}$$

Notiamo infine che $(T^{1,0}M)_{\mathbb{R}}$, il fibrato vettoriale reale soggiacente a $T^{1,0}M$, è isomorfo a TM con isomorfismo indotto dalla mappa

$$(T^{1,0}M)_{\mathbb{R}} \ni v \to 2\mathrm{Re}(v) \equiv v + \overline{v} \in TM \otimes \mathbb{C}$$

che ha ovviamente valori in TM. [15] La moltiplicazione per i in $T^{1,0}M$ induce tramite l'isomorfismo $2\mathrm{Re}(\ )$ un operatore $J \in C^\infty(M, \mathrm{End}(TM))$ tale che $J_p^2 = -1\ \forall p \in M$. Possiamo utilizzare questo operatore per definire una struttura di fibrato vettoriale complesso in TM:

$$(\alpha + i\beta)v_p := \alpha v_p + J_p(\beta v_p)\,.$$

Con questa struttura complessa si ha un isomorfismo di fibrati complessi : $T^{1,0}M \simeq TM$. Osserviamo, per chiudere questa sezione, che la varietà reale soggiacente ad una varietà complessa è sempre orientabile. La dimostrazione si basa sulla seguente semplice osservazione:
se $f : U \subset \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ è olomorfa, allora possiamo considerare lo Jacobiano reale di f, $J_{\mathbb{R}}(f)$, interpretando f come una mappa da $U \subset \mathbb{R}^{2n}$ a $\mathbb{R}^{2n}$ e possiamo ovviamente considerare lo Jacobiano complesso $J_{\mathbb{C}}(f)$. Si ha

$$J_{\mathbb{R}}(f) = B^{-1} \begin{pmatrix} J_{\mathbb{C}}(f) & 0 \\ 0 & \overline{J_{\mathbb{C}}(f)} \end{pmatrix} B\,,$$

con $B \in GL(2n, \mathbb{C})$[16]. In particolare $\det J_{\mathbb{R}}(f) = \det J_{\mathbb{C}}(f)\overline{\det J_{\mathbb{C}}(f)} = |\det J_{\mathbb{C}}(f)| \geq 0$. Applicando questa osservazione ai cambiamenti di coordinate olomorfi concludiamo la dimostrazione che le varietà complesse sono sempre orientabili, se viste come varietà reali.

9.2. **Varietà quasi-complesse.**

In generale, una struttura quasi-complessa su una varietà *reale* è un elemento $J \in C^\infty(M, \mathrm{End}(TM))$ tale che $J_p^2 = -1\ \forall p \in M$. Abbiamo appena dimostrato che la varietà reale associata ad una varietà complessa ha una naturale struttura quasi-complessa. Una struttura quasi-complessa su una varietà reale non è detto che esista [17]. Se esiste una struttura quasi-complessa allora possiamo definire, come sopra, una naturale struttura di fibrato complesso in TM. Esistono strutture quasi-complesse che non provongono da alcuna struttura complessa (ad esempio in S^6). Torneremo sulle varietà quasi-complesse più avanti.

9.3. **Forme di tipo (p, q). Coomologia di Dolbeault.**

Consideriamo ora il duale T^*M di TM. Si ha

$$T^*M \otimes \mathbb{C} = \Lambda^{1,0}(M) \oplus \Lambda^{0,1}(M) \tag{49}$$

con descrizione locale data in termini delle 1-forme duali ai campi tangenti olomorfi e anti-olomorfi:

$$dz_j = dx_j + i\,dy_j\,, \qquad d\bar{z}_j = dx_j - i\,dy_j$$

---

[15]infatti, una base locale reale di $(T^{1,0}M)_{\mathbb{R}}$ è data da $\frac{\partial}{\partial z_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial z_n}, i\frac{\partial}{\partial z_1}, \ldots, i\frac{\partial}{\partial z_n}$ e questa base è chiaramente inviata in $\{\frac{\partial}{\partial x_j}\,,\ \frac{\partial}{\partial y_j}\}$

[16]B è la matrice di cambiamento di coordinate (complesse), dalle $x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n$ alle $z_1, \ldots, z_n, \overline{z}_1, \ldots, \overline{z}_n$

[17]È semplice convincersi, ad esempio, che M deve avere dimensione pari: tuttavia ciò non è sufficiente, S^4 ad esempio, non ammette strutture quasi-complesse

Si ha anche, come nel caso del fibrato tangente,

$$\Lambda^{0,1}(M) = \overline{\Lambda^{1,0}(M)}. \tag{50}$$

Localmente, lo spazio delle sezioni di $\bigwedge^{1,0}(M)$ ha base locale data da $dz_1, \dots, dz_n$, mentre lo spazio delle sezioni di $\bigwedge^{0,1}(M)$ ha base locale $d\bar{z}_1, \dots, d\bar{z}_n$. Osserviamo che, in generale, per due spazi vettoriali E, F

$$\Lambda^r(E \oplus F) = \oplus_{r=p+q} \Lambda^{p,q}$$

con $\bigwedge^{p,q} := \mathrm{Span}\{e \wedge f\,, e \in \bigwedge^p E\,, f \in \bigwedge^q F\}$. Ciò implica, con ovvia notazione, la decomposizione $C^\infty(M, \Lambda^r(T^*M \otimes \mathbb{C})) = \oplus_{r=p+q} \Omega^{p,q}(M)$ dove $\Omega^{p,q}(M)$ sono le forme di grado $p+q$ localmente esprimibili come combinazioni lineari di $dz^{j_1} \wedge \cdots \wedge dz^{j_p} \wedge d\bar{z}^{i_1} \wedge \cdots \wedge d\bar{z}^{i_q}$. Si noti che si può scrivere l'operatore di derivazione d come:

$$d = \partial + \bar{\partial} \quad \text{con} \quad \partial^2 = \bar{\partial}^2 = \partial\bar{\partial} + \bar{\partial}\partial = 0$$

dove $\partial : \Omega^{p,q}(M) \to \Omega^{p+1,q}(M)$ e $\bar{\partial} : \Omega^{p,q}(M) \to \Omega^{p,q+1}(M)$ sono ottenuti per proiezione. Esplicitamente

$$\partial(a_{JI} dz^{j_1} \wedge \cdots \wedge dz^{j_p} \wedge d\bar{z}^{i_1} \wedge \cdots \wedge d\bar{z}^{i_q}) = \sum_\ell \frac{\partial}{\partial z_\ell} a_{JI} dz^\ell \wedge dz^{j_1} \wedge \cdots \wedge dz^{j_p} \wedge d\bar{z}^{i_1} \wedge \cdots \wedge d\bar{z}^{i_q}$$

e analogamente per $\overline{\partial}$.

Dato che $\overline{\partial}^2 = 0$ possiamo definire i gruppi di coomologia di Dolbeault:

$$H^{0,q}_{\overline{\partial}}(M) := \mathrm{Ker}(\overline{\partial}|_{\Omega^{0,q}(M)})/\mathrm{Im}(\overline{\partial}|_{\Omega^{0,q-1}(M)})$$

e più in generale

$$H^{p,q}_{\overline{\partial}}(M) := \mathrm{Ker}(\overline{\partial}|_{\Omega^{p,q}(M)})/\mathrm{Im}(\overline{\partial}|_{\Omega^{p,q-1}(M)}).$$

9.4. **Metriche hermitiane. Forma di Kähler.**

Una metrica hermitiana h su una varietà complessa M è, per definizione, una metrica hermitiana sul fibrato tangente olomorfo $T^{1,0}M$; in particolare

$$h \in C^\infty(M, \Lambda^{1,0}M \otimes \Lambda^{0,1}M)\,.$$

La coppia (M, h) è detta una varietà hermitiana. Localmente possiamo scrivere la metrica hermitiana come:

$$h = h_{ij}(z) dz_i \otimes d\bar{z}^j\,.$$

Se $\{\phi_j\,; j = 1, \dots, n\}$ è la base duale ad una base ortonormale locale per $T^{1,0}M$ allora, localmente,

$$h = \sum_j \phi_j \otimes \overline{\phi_j}$$

È elementare verificare che la parte reale e la parte immaginaria di h definiscono rispettivamente una forma bilineare simmetrica e una forma bilineare antisimmetrica sul fibrato reale $(T^{1,0}M)_\mathbb{R}$. [18] Tramite l'isomorfismo $(T^{1,0}M)_\mathbb{R} \simeq TM$ otteniamo una metrica riemanniana $g := \mathrm{Re}h$ su TM, metrica che risulta J-invariante: $g(\cdot,\cdot) = g(J\cdot, J\cdot)$, con J la struttura quasi-complessa indotta su TM dalla moltiplicazione per $\sqrt{-1}$ su $T^{1,0}M$. Otteniamo anche una due-forma reale $\omega := -\frac{1}{2}\mathrm{Im}h$ su M. La 2 forma ω è detta **la forma di Kähler** associata alla varietà hermitiana (M, h). Esplicitamente, se $\phi_j = \alpha_j + \sqrt{-1}\beta_j$, con α_j, β_j 1-forme reali, allora

$$h = \sum_j \phi_j \otimes \overline{\phi_j} = (\sum_j (\alpha_j + \sqrt{-1}\beta_j)) \otimes (\sum_j (\alpha_j - \sqrt{-1}\beta_j))$$

[18] Si veda ad esempio *E. Sernesi. Geometria 1.*

e quindi

$$h = \sum_j (\alpha_j \otimes \alpha_j + \beta_j \otimes \beta_j) + \sqrt{-1} \sum_j (-\alpha_j \otimes \beta_j + \beta_j \otimes \alpha_j)$$

da cui deduciamo che la metrica riemanniana g è data da $\sum_j (\alpha_j \otimes \alpha_j + \beta_j \otimes \beta_j)$ mentre la forma di Kähler è data da

$$\omega = \sum_j \alpha_j \wedge \beta_j = \frac{\sqrt{-1}}{2} \sum_j \phi_j \wedge \overline{\phi_j}$$

Riassumendo: la forma di Kahler è una forma reale di tipo $(1,1)$. Analogamente, se la metrica è data localmente da $h = h_{ij}(z) dz_i \otimes d\overline{z}^j$ allora

$$\omega = \frac{\sqrt{-1}}{2} h_{ij}(z) dz_i \wedge d\overline{z}^j \, .$$

Notiamo che la forma di volume associata a $g = \sum_j (\alpha_j \otimes \alpha_j + \beta_j \otimes \beta_j)$ è data da

$$d\mathrm{vol}_g := \alpha_1 \wedge \beta_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_n \wedge \beta_n$$

ed è facile verificare che nell'intorno fissato si ha l'uguaglianza

$$d\mathrm{vol}_g = \frac{\omega^m}{m!} \tag{51}$$

Possiamo quindi concludere che $\frac{\omega^m}{m!}$ è la forma di volume associata alla metrica riemanniana fissata da h.

9.5. **Fibrati olomorfi. Connessione complessa hermitiana.**

Sia M una varietà complessa e sia $E \to M$ un fibrato complesso olomorfo su M. Si osservi innanzitutto che risulta ben definito l'operatore

$$\bar{\partial} \, : \, C^\infty(M, \textstyle\bigwedge^{p,q}(M) \otimes E) \longrightarrow C^\infty(M, \textstyle\bigwedge^{p,q+1}(M) \otimes E) \, .$$

Più precisamente, se $\{e_j\}$ è una base locale olomorfa di E, allora, per definizione:

$$\bar{\partial} \, : \, (\omega \otimes e_j) \longmapsto \bar{\partial}\omega \otimes e_j$$

dove $\omega \otimes e_j \in C^\infty(M, \bigwedge^{p,q}(M) \otimes E)$, se $\omega \in \bigwedge^{p,q}(M)$ (è facile vedere che la definizione non dipende dalla base olomorfa scelta).

In particolare esiste l'operatore $\bar{\partial} : C^\infty(M, E) \to C^\infty(M, \bigwedge^{0,1}(M) \otimes E)$. Si può dare allora la seguente

Definizione 13. Sia ∇ una connessione su E. Si dirà che ∇ è una **connessione complessa** se risulta:

$$\textstyle\prod^{0,1} \nabla s \; = \; \bar{\partial} s \, , \qquad s \in C^\infty(M, E)$$

dove $\prod^{0,1} \nabla : C^\infty(M, \bigwedge^1(M) \otimes E) \to C^\infty(M, \bigwedge^{0,1}(M) \otimes E)$ è la proiezione della connessione ∇ sulla parte antiolomorfa di grado 1 delle sezioni a valori nel fibrato $\bigwedge^1(M) \otimes E$.

Osservazione. Rispetto ad una base olomorfa una connessione complessa ha forma di connessione di tipo $(1,0)$.

Vale il seguente risultato, analogo al teorema di Levi - Civita:

Proposizione 4. *Sia E un fibrato olomorfo. Data una metrica hermitiana su E esiste ed è unica la connessione complessa con essa compatibile (detta quindi connessione complessa hermitiana).*

Dimostrazione Mostriamo inizialmente l'unicità. Sia $\{e_i\}$ è una base locale olomorfa di E per l'aperto U ed $h = h_{ij} = h(e_i, e_j)$ una metrica su E. Allora vale per compatibilità:

$$d\,h_{ij} \,=\, (\omega_i^l e_l, e_j) \,+\, (e_i, \omega_j^k e_k) \,=\, \omega_i^l\, h_{lj} \,+\, \bar{\omega}_j^k h_{ik}\,. \tag{52}$$

Poichè si ha $\omega_i^l \in \bigwedge^{1,0}(U)$ dalla (52) segue:

$$d\,h_{ij} \,=\, \partial\,h_{ij} \,+\, \bar{\partial}\,h_{ij} \,=\, \omega_i^l\,h_{lj} \,+\, \bar{\omega}_j^k h_{ik} \tag{53}$$

dove il primo addendo nel termine a destra è una forma di tipo $(1,0)$ e il secondo di tipo $(0,1)$. Quindi dalla (53) si ottiene $\partial h_{ij} = \omega_i^l\,h_{lj}$, e la sua complessa coniugata, che si può riscrivere come:

$$\omega \,=\, \partial\,h\,h^{-1}\,. \tag{54}$$

Quindi la matrice di connessione è univocamente determinata. Infine, per ottenere l'esistenza, si verifica che la (54) definisce effettivamente una connessione come nell'enunciato. Basta utillizzare il fatto che le funzioni di transizione, che sono a valori unitari, sono olomorfe, i.e. $\overline{\partial} g_{\alpha\beta} = 0$ e quindi $dg_{\alpha\beta} = \partial g_{\alpha\beta}$; più precisamente, derivando rispetto a ∂ le condizioni di compatibilità per la metrica, $h_\alpha = g_{\alpha\beta} h_\beta \overline{g}_{\alpha\beta}$ e utilizzando $dg_{\alpha\beta} = \partial g_{\alpha\beta}$ si ottiene subito che

$$\partial h_\alpha h_\alpha^{-1} = dg_{\alpha\beta} g_{\alpha\beta}^{-1} + g_{\alpha\beta}(\partial h_\beta h_\beta^{-1}) g_{\alpha\beta}^{-1}$$

da cui la tesi.

Corollario 4. *Risulta in questo caso:*

$$\Omega \,=\, \bar{\partial}\omega$$

Dimostrazione Per quanto visto vale:

$$\partial\omega = \partial\,(\partial h h^{-1}) = \partial\,h\,\partial(h^{-1}) = -\partial h\,h^{-1} \wedge \partial h\,h^{-1} = -\omega \wedge \omega.$$

D'altro canto $\Omega = d\omega + \omega \wedge \omega = \partial\omega + \bar{\partial}\omega + \omega \wedge \omega$ quindi il risultato.

Osservazione. Ω è una forma di tipo $(1,1)$.

Esempio: fibrati in rette olomorfi. Si consideri in generale $L \to M$ un fibrato complesso olomorfo di rango 1. Su ogni aperto U_α la metrica è definita attraverso una singola funzione reale $h_\alpha > 0$, con $h_\alpha \in C^\infty(U_\alpha)$. Indicando con $g_{\alpha\beta}$ le funzioni di transizione su $U_\alpha \cap U_\beta$, vale $h_\alpha = |g_{\alpha\beta}|^2\,h_\beta$. Per quanto visto, si ha allora $\omega_\alpha = \partial h_\alpha\,h_\alpha^{-1} = \partial\,log\,h_\alpha$ da cui:

$$\Omega_\alpha \,=\, \bar{\partial}\,\partial\,log\,h_\alpha \,=\, -\,\partial\,\bar{\partial}\,log\,h_\alpha\,.$$

Esempio: le superfici di Riemann. Sia ora M una superficie di Riemann (ossia una varietà complessa di dimensione 1), allora $T^{1,0}M$ è un fibrato complesso olomorfo di rango 1, isomorfo sui reali a TM. Sia h una metrica hermitiana su $T^{1,0}M$ e cioè una funzione reale $h > 0$. Quindi la metrica è data da $\sqrt{h}dz \otimes \sqrt{h}d\bar{z}$. La metrica riemanniana associata si ottiene sostituendo a dz la forma $dx + idy$ e a $d\bar{z}$ la forma $dx - idy$. Si ottiene la metrica riemanniana $g = h(dx \otimes dx + dy \otimes dy)$. Sia ∇ l'unica connessione complessa compatibile con la metrica. Calcoliamo la curvatura associata Ω, una 2-forma, moltiplicata per $i/(2\pi)$: si ha

$$\begin{aligned}
\tfrac{i}{2\pi}\Omega \;&= \tfrac{i}{2\pi}\,(-\partial\,\bar{\partial}\,log\,h) = \tfrac{1}{2\pi i}\,\tfrac{\partial}{\partial\,z}\,\tfrac{\partial}{\partial\,\bar{z}}\,log\,h\,dz \wedge d\bar{z} = \\
&= \tfrac{1}{2\pi i}\,\tfrac{1}{4}\,\Delta\,log\,h\,dz \wedge d\bar{z} = \tfrac{1}{2\pi}\,(-\tfrac{1}{2h}\,\Delta\,log\,h)\,\tfrac{ih}{2}\,dz \wedge d\bar{z} = \\
&= \tfrac{1}{2\pi}\,K_g\,d\,vol_g
\end{aligned}$$

dove K_g e $d\,vol_g$ sono la curvatura gaussiana e la forma di volume associate alla metrica riemanniana g definita da h (per la formula sulla curvatura gaussiana si consulti ad esempio *Modern Geometry* di Doubrovine, Novikov, Fomenko; per la forma di volume si veda la (51)). Quindi vale:

$$\frac{i}{2\pi}\Omega \;=\; \frac{1}{2\pi} K\, d\,vol_M \tag{55}$$

e, in particolare,

$$\int_M \frac{i}{2\pi}\Omega \;=\; \frac{1}{2\pi}\int_M K\, d\,vol_M$$

e quindi, per il teorema di Gauss-Bonnet,

$$\int_M \frac{i}{2\pi}\Omega \;=\; \chi(M) \;= 2-2g \tag{56}$$

dove g è il genere di M. In particolare $\frac{i}{2\pi}\Omega$ non è esatta se $g \neq 1$.

10. **Classi di Chern.**

10.1. **Le classi di Chern di un fibrato complesso.**

Tramite l'identità
$$\det(\mathrm{Id} + tA) = \sum P_\ell(A) t^\ell$$
abbiamo definito i polinomi invarianti $P_\ell(\ )$; questi polinomi sono detti *polinomi simmetrici elementari* (per matrici diagonali sono infatti uguali alle funzioni simmetriche elementari). Notare che $P_j(\ )$ è un polinomio omogeneo di grado j. Definiamo
$$c_j(A) := P_j(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi} A)$$

Definizione 14. Sia E un fibrato complesso su M. La j-ma classe di Chern di E è per definizione la classe
$$c_j(E) := [c_j(E, \nabla^E)] \in H^{2j}_{dR}(M, \mathbb{C})$$

Teorema 7. *Si hanno isomorfismi di anelli:* $I(U(k)) = \mathbb{C}[c_1, \ldots, c_k] = I(GL(k, \mathbb{C}))$

Questo importante teorema ci dice che data una classe di de Rham $P(E, \nabla^E)$ definita da un polinomio invariante $P \in I(GL(k, \mathbb{C}))$ tramite l'omomorfismo di Chern-Weil, essa è esprimibile come un polinomio nelle classi di Chern.

Dimostrazione. Sia $P \in I(U(k))$ allora
$$P : \mathrm{Lie}(U(k)) \to \mathbb{C}$$
con
$$P(gAg^{-1}) = P(A), \quad \forall A \in \mathrm{Lie}(U(k)),\ g \in U(k)$$
Poiché $A \in \mathrm{Lie}(U(k))$, A è anti-hermitiana. Ne segue che $\sqrt{-1}A$ è hermitiana e dunque esiste $g \in U(k)$ tale che
$$g \cdot \sqrt{-1}\ A \cdot g^{-1} = diag\{\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_k\}$$
con gli η_i reali. Ma allora
$$gAg^{-1} = \sqrt{-1}\ diag\{\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_k\} =: diag\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k\}$$
con i λ_i immaginari puri. Se poniamo
$$\check{P}(\lambda_1, \ldots, \lambda_k) := P(diag\{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\})$$
abbiamo, per l'invarianza di P,
$$P(A) = P(gAg^{-1}) = \check{P}(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$$
Sia adesso $h_{ij} \in U(k)$ l'applicazione che scambia i vettori e_i ed e_j della base diagonalizzante. Poiché
$$h_{ij} \cdot diag\{\lambda_1, \ldots, \lambda_i, \ldots, \lambda_j, \ldots, \lambda_k\} \cdot h_{ij}^{-1} = diag\{\lambda_1, \ldots, \lambda_j, \ldots, \lambda_i, \ldots, \lambda_k\}$$
la $U(k)$ invarianza di P implica
$$\check{P}(\lambda_1, \ldots, \lambda_i, \ldots, \lambda_j, \ldots, \lambda_k) = \check{P}(\lambda_1, \ldots, \lambda_j, \ldots, \lambda_i, \ldots, \lambda_k)$$
ovvero il polinomio $\check{P}$ è S_k-invariante. A questo punto un ben noto teorema di algebra commutativa ci dice che $\check{P}$ è un polinomio nelle funzioni simmetriche elementari. Più precisamente esiste ed è unico un polinomio F tale che
$$\check{P}(\lambda_1, \ldots, \lambda_k) = F(\sigma_1(\lambda_1, \ldots, \lambda_k), \sigma_2(\lambda_1, \ldots, \lambda_k), \ldots, \sigma_k(\lambda_1, \ldots, \lambda_k))$$

dove i polinomi $\sigma_i(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ sono definiti dall'equazione

$$\prod_i (1 + \lambda_i\ t) = \sum_i \sigma_i(\lambda_1, \ldots, \lambda_k) t^i$$

Osserviamo che si ha

$$\prod_i (1 + \lambda_i\ t) = \det(I + t \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_k \end{pmatrix}) = \det(I + tA)$$

da cui

$$\sigma_i(\lambda_1, \ldots, \lambda_k) = P_i(A)$$

In conclusione, abbiamo dimostrato

$$P(A) = \tilde{F}\left(c_1(A), \ldots, c_k(A)\right)$$

dove, al solito,

$$c_i(A) := P_i\left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi} A\right)$$

sono i polinomi di Chern. Il polinomio $\tilde{F}$ è ottenuto da F tendendo conto dei fattori $\sqrt{-1}/2\pi$. Abbiamo quindi dimostrato il primo isomorfismo.
Passiamo al secondo: la dimostrazione appena data può essere facilmente modificata per dimostrare che se A è diagonalizzabile allora per ogni polinomio invariante P esiste ed è unico il polinomio $\tilde{F}$ tale che

$$P(A) = \tilde{F}\left(c_1(A), \ldots, c_k(A)\right)$$

Questa identità vale su tutte le matrici diagonalizzabili; essendo queste dense in $M_k(\mathbb{C})$ si ha per continuità la tesi.

10.2. **Alcuni esempi.**

Esempio 1: le superfici di Riemann. Sia M una superficie di Riemann (ossia una varietà complessa di dimensione 1) con metrica hermitiana h su $T^{1,0}(M)$. Per quanto già visto nella sezione 9 otteniamo che

$$c_1(T_{1,0}M) \;=\; \frac{1}{2\pi} K\, d\, vol_M$$

con K la curvatura gaussiana associata alla metrica riemanniana definita da h. In particolare,

$$\int_M c_1(T_{1,0}M) \;=\; \chi(M) \;= 2 - 2g$$

dove g è il genere di M. Ne deduciamo che $c_1(T_{1,0}M)$ non è esatta se $g \neq 1$.

Esempio 2: la classe di Chern del fibrato universale Se $L \to \mathbb{C}P^1$ è il fibrato universale dello spazio proiettivo unidimensionale, vale:

$$\int_{\mathbb{C}P^1} c_1(L) \;=\; -1\,.$$

Per la verifica del risultato, si scriva $\mathbb{C}P^1 = \{[z_0, z_1] \in \mathbb{C}^2 \setminus 0\}$ e $U \cup V = \mathbb{C}P^1$ un suo ricoprimento tramite i due aperti $U = \{z_0 \neq 0\}$ e $V = \{z_1 \neq 0\}$. Su U e V si individuano due carte locali:

$$\begin{array}{ll} U & \longrightarrow \mathbb{C} \\ [z_0, z_1] & \longmapsto z = \frac{z_1}{z_0} \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ll} V & \longrightarrow \mathbb{C} \\ [v_0, v_1] & \longmapsto v = \frac{v_0}{v_1} \end{array} \;.$$

Si ricordi che il fibrato $L \to \mathbb{C}P^1$ è definito come $L = \{([x], v) \in \mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}^2 : v = \lambda[x]\}$; una base locale è data per le due carte da:

$$\begin{array}{rccc} s_U : & U & \longrightarrow L|_U \\ & [z_0, z_1] & \longmapsto ([z_0, z_1], (1, z)), \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} s_V : & V & \longrightarrow L|_V \\ & [v_0, v_1] & \longmapsto ([v_0, v_1], (v, 1)) \end{array}$$

ossia in breve, $s_U : z \mapsto (z, (1, z))$ e $s_V : v \mapsto (v, (v, 1))$ rispettivamente. È facile verificare che queste due basi locali sono compatibili sull'intersezione. La metrica indotta su L da $\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}^2$ è nei due casi:

$$\|s_U(z)\|^2 = 1 + z^2 = h(z), \qquad \|s_V(v)\|^2 = 1 + v^2 = h(v).$$

Sia ora ∇ l'unica connessione complessa compatibile con la metrica; allora

$$\omega_U = \partial h \cdot h^{-1} = \frac{\bar{z}}{(1 + |z|^2)}\, dz\, ,$$

da cui

$$\Omega_U = \bar{\partial}\omega = \frac{d\bar{z} \wedge dz}{(1 + |z|^2)^2} = \frac{2i dx \wedge dy}{(1 + |x|^2 + |y|^2)^2}.$$

Analogamente $\Omega_V = \frac{d\bar{v} \wedge dv}{(1+|v|^2)^2}$. Da queste si ha:

$$\begin{aligned} \textstyle\int_{\mathbb{C}P^1} c_1(L) &= \textstyle\int_{\mathbb{C}P^1} c_1(L, \nabla) = \int_U \frac{i}{2\pi}\Omega_U = \int_U \frac{-1}{\pi} \frac{dx \wedge dy}{(1+|x|^2+|y|^2)^2} = \\ &= -\tfrac{1}{\pi} \textstyle\int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{\rho\, d\rho d\,\theta}{(1+\rho^2)^2} = \frac{-1}{\pi} \cdot \pi = -1 \end{aligned}$$

quindi il risultato, che indica come $c_1(L)$ è chiusa ma non esatta, ossia come il fibrato L sia non banale.

10.3. Classe totale di Chern.

Vediamo ora un primo esempio di classe caratteristica ottenibile come polinomio nelle classi di Chern di un fibrato hermitiano $E \to M$, *la classe di Chern totale.* Si tratta, per definizione, della classe

$$c(E) := 1 + c_1(E) + \cdots + c_k(E) = \left[\det\left(1 + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\Omega\right)\right]$$

Dalla definizione seguono immediatamente le proprietà seguenti:

$$\begin{gathered} c(E \oplus F) = c(E) \wedge c(F) \\ c(f^*E) = f^*c(E) \\ c(E^*) = 1 - c_1(E) + c_2(E) + \cdots + (-1)^k c_k(E) \\ \overline{c(E)} = c(E) \quad \text{(e quindi} \quad c_j(E) \in H^{2j}(M, \mathbb{R})) \end{gathered}$$

dato che $\Omega^i_j = -\overline{\Omega}^j_i$. In particolare da $c(E \oplus F) = c(E) \wedge c(F)$ si ha

$$c(E \oplus 1) = c(E)$$

ovvero la classe di Chern totale è *stabile.* Dalla formula $c(E \oplus F) = c(E) \wedge c(F)$, prendendo la componente in grado i in ambo i membri dell'uguaglianza, si ottiene

$$c_i(E \oplus F) = \sum_{l=0}^{i} c_l(E) \wedge c_{i-l}(F)$$

Notiamo anche che $c_i(E^*) = (-1)^i c_i(E)$ e che $c_i(f^*E) = f^*c_i(E)$.

11. **Classi di Pontrjagin.**

11.1. **Le classi di Pontrjagin di un fibrato reale.**

Sia $E \to M$ un fibrato reale con metrica (diremo brevemente riemanniano) di rango k. Il suo gruppo di struttura è quindi riducibile al gruppo $O(k)$ delle matrici ortogonali $k \times k$. Siamo interessati ai polinomi su $\mathrm{Lie}(O(k))$ invarianti per l'azione di $O(k)$ per coniugio, che al solito indicheremo con $I(O(k))$.

Sia $A \in \mathrm{Lie}(O(k))$ e consideriamola come applicazione da $\mathbb{C}^k \to \mathbb{C}^k$, denotandola allora $A_{\mathbb{C}}$. Poniamo

$$p_i(A) := \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{2i} P_{2i}(A_{\mathbb{C}})$$

Il polinomio $p_i(A)$ prende il nome di i-esimo polinomio di Pontrjagin di A. Per definizione la i-esima classe di Pontrjagin di un fibrato riemanniano $E \to M$ è

$$p_i(E) := [p_i(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\Omega)] \in H^{4i}_{dR}(M, \mathbb{C})$$

Dalla definizione risulta immediatamente che, se indichiamo con $E_{\mathbb{C}} := E \otimes \mathbb{C}$ il complessificato del fibrato reale E , si ha

$$p_i(E) = (-1)^i c_{2i}(E_{\mathbb{C}})$$

dove abbiamo esteso la connessione ∇ su E ad una connessione su $E_{\mathbb{C}}$ semplicemente estendendola per $\mathbb{C}$-linearità.
In particolare

$$p_i(E) := [p(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\Omega)] \in H^{4i}_{dR}(M, \mathbb{R})\,.$$

Teorema 8. *Si ha un isomorfismo di anelli $I(O(k)) = \mathbb{C}[p_1, \ldots, p_{[k/2]}]$, dove $[x]$ indica la parte intera di x.*

Quindi una classe caratteristica $[P(E, \nabla^E)]$, con P polinomio $O(k)$-invariante, è esprimibile come un polinomio nella classi di Pontrjagin di E.
Dimostrazione. Sia $P \in I(O(k))$ allora

$$P : \mathrm{Lie}(O(k)) \to \mathbb{C}$$

con

$$P(gAg^{-1}) = P(A), \quad \forall A \in \mathrm{Lie}(O(k)),\ g \in O(k)$$

Poiché $A \in \mathrm{Lie}(O(k))$, A è anti-simmetrica. Dunque A, vista come matrice complessa, è anti-hermitiana. Ne segue che $A_{\mathbb{C}}$ è diagonalizzabile sui complessi e che i suoi autovalori sono tutti immaginari puri. Poichè A è reale, il suo polinomio caratteristico lo è, e dunque i suoi autovalori complessi sono a due a due coniugati. Sia $\sqrt{-1}\lambda$ uno di questi autovalori, e sia $e \in \mathbb{C}^k$ un autovettore. Il vettore $\overline{e}$ è un autovettore di autovalore $-\sqrt{-1}\lambda$. Poniamo $e_1 = e, e_2 = \overline{e}$, e siano

$$\begin{cases} v_1 = \frac{(1-\sqrt{-1})}{2}(e_1 + \sqrt{-1}e_2) \\ v_2 = \frac{(1-\sqrt{-1})}{2}(e_2 + \sqrt{-1}e_1) \end{cases}$$

Si ha

$$\begin{gathered} Av_1 = \lambda v_2 \\ Av_2 = -\lambda v_1 \end{gathered}$$

Inoltre

$$\begin{array}{l}\overline{v_1} = \frac{(1+\sqrt{-1})}{2}(e_2 - \sqrt{-1}e_1) = \frac{(1-\sqrt{-1})}{2}(e_1 + \sqrt{-1}e_2) = v_1\\ \overline{v_2} = \frac{(1+\sqrt{-1})}{2}(e_1 - \sqrt{-1}e_2) = \frac{(1-\sqrt{-1})}{2}(e_2 + \sqrt{-1}e_1) = v_2\end{array}$$

dunque i vettori $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^k$. Un rapido calcolo mostra che v_1 e v_2 sono ortonormali rispetto all'usuale prodotto scalare su $\mathbb{R}^k$. Effettuando questo procedimento per tutti gli autovalori di $A_{\mathbb{C}}$ troviamo una base ortonormale $\{v_i\}$ di $\mathbb{R}^k$ nella quale A ha la forma

$$\begin{pmatrix} 0 & \lambda_1 & & & & \\ -\lambda_1 & 0 & & & & \\ & & 0 & \lambda_2 & & \\ & & -\lambda_2 & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & * \end{pmatrix} \tag{57}$$

dove il blocco $(*)$ è (0) se k è dispari ed è assente se k è pari. Indicheremo la matrice a blocchi (57) con il simbolo $Bl(\lambda_1, \ldots, \lambda_{[k/2]})$. Tutto quanto abbiamo fin qui dimostrato si riassume dicendo che, se $A \in Lie(O(k))$, esiste $g \in O(k)$ tale che

$$gAg^{-1} = Bl(\lambda_1, \ldots, \lambda_{[k/2]})$$

con i λ_i reali. Se poniamo

$$\check{P}(\lambda_1, \ldots, \lambda_{[k/2]}) := P(Bl(\lambda_1, \ldots, \lambda_{[k/2]}))$$

abbiamo, per l'invarianza di P,

$$P(A) = P(gAg^{-1}) = \check{P}(\lambda_1, \ldots, \lambda_{[k/2]})$$

Sia adesso $h_{12|34} \in O(k)$ l'applicazione definita da

$$\begin{array}{c} v_1 \leftrightarrow v_3 \\ v_2 \leftrightarrow v_4 \end{array}$$

Il coniugio con $h_{12|34}$ permuta il primo e il secondo blocco della matrice $Bl(\lambda_1, \ldots, \lambda_{[k/2]})$; ne segue la S_k-invarianza del polinomio $\check{P}$, ovvero $\check{P}$ è un polinomio simmetrico nelle λ_i. Sia ora $h_{1|2} \in O(k)$ l'applicazione definita da

$$v_1 \leftrightarrow v_2$$

Si ha

$$h_{1|2} \cdot Bl(\lambda_1, \ldots, \lambda_{[k/2]}) \cdot h_{1|2}^{-1} = Bl(-\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$$

dunque la $O(k)$ invarianza di P implica che il polinomio $\check{P}$ è un polinomio pari nella variabile λ_1. Ripetendo questo ragionamento per le altre variabili, troviamo che $\check{P}$ è un *polinomio simmetrico pari* nelle variabili λ_i, ovvero che è un polinomio simmetrico nelle variabili λ_i^2. Ne segue che esiste ed è unico un polinomio F tale che

$$\check{P}(\lambda_1, \ldots, \lambda_{[k/2]}) = F(\gamma_1(\lambda_1, \ldots, \lambda_{[k/2]}), \gamma_2(\lambda_1, \ldots, \lambda_{[k/2]}), \ldots, \gamma_{[k/2]}(\lambda_1, \ldots, \lambda_{[k/2]}))$$

dove i polinomi $\gamma_i(\lambda_1, \ldots, \lambda_{[k/2]})$ sono definiti dall'equazione

$$\prod_i (1 + \lambda_i^2\ t^2) = \sum_i \gamma_i(\lambda_1, \ldots, \lambda_{[k/2]}) t^{2i}$$

Osserviamo che si ha

$$\prod_i (1 + \lambda_i^2\ t^2) = \det(I + t \cdot Bl(\lambda_1, \ldots, \lambda_{[k/2]}))$$

D'altra parte, possiamo anche scrivere

$$\prod_i (1+\lambda_i^2\ t^2) = \det(I + t\cdot Bl(\lambda_1,\dots,\lambda_{[k/2]})) = \prod_i ((1+\sqrt{-1}\lambda_i t)(1\sqrt{-1}\lambda_i t))$$

da cui

$$\gamma_i(\lambda_1,\dots,\lambda_{[k/2]}) = \sigma_{2i}(\sqrt{-1}\lambda_1, -\sqrt{-1}\lambda_1,\dots,\sqrt{-1}\lambda_{[k/2]}, -\sqrt{-1}\lambda_{[k/2]}) = P_{2i}(A_{\mathbb{C}})$$

Poniamo allora

$$p_i(A) := \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{2i} P_{2i}(A_{\mathbb{C}})$$

Il polinomio $p_i(A)$è l' i-esimo polinomio di Pontrjagin di A, definito prima dell'enunciato del Teorema. In conclusione, abbiamo dimostrato che esiste ed è unico il polinomio $\tilde{F}$ tale che

$$P(A) = \tilde{F}\left(p_1(A),\dots,p_{[k/2]}(A)\right)$$

il che conclude la dimostrazione.

Osservazione.
Sia E è un fibrato *complesso* di rango k; E è definito da funzioni di transizione $\{g_{\alpha\,\beta}\}$ a valori in $GL(k,\mathbb{C})$. Il fibrato con funzioni di transizione $\overline{g_{\alpha\,\beta}}$ è il fibrato coniugato di E ed è denotato con $\overline{E}$. Sia $E_{\mathbb{R}}$ il fibrato reale di rango $2k$ definito dalle funzioni di transizione $(g_{\alpha\,\beta})_{\mathbb{R}}$ a valori in $GL(2k,\mathbb{R})$. Facciamo una pausa per chiarire come associamo ad un elemento A in $GL(k,\mathbb{C})$ un elemento $A_{\mathbb{R}}$ in $GL(2k,\mathbb{R})$. $A_{\mathbb{R}}$ è definito dalla composizione

$$\mathbb{R}^{2k} \to \mathbb{C}^k \xrightarrow{A} \mathbb{C}^k \to \mathbb{R}^{2k}$$

con la prima e l'ultima mappa date dall'identificazione $z_\ell = x_{2\ell-1} + ix_{2\ell}$, quindi

$$\mathbb{R}^{2k} \ni (x_1, x_2,\dots,x_{2k-1},x_{2k}) \to (z_1,\dots,z_k) \in \mathbb{C}^k.$$

(Un ragionamento analogo può essere fatto per un qualsiasi spazio vettoriale complesso e per un operatore $T : E \to E$.) Non è difficile dimostrare che se consideriamo $A_{\mathbb{R}} \in GL(2k,\mathbb{R}) \subset GL(2k,\mathbb{C})$ allora esiste una matrice $B \in GL(2k,\mathbb{C})$ tale che

$$B^{-1}\,(A_{\mathbb{R}})\,B = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & \overline{A} \end{pmatrix} \tag{58}$$

B può essere espicitamente descritta: se B_j è la j-ma colonna allora

$$B_j = (0,\dots,0,b_j^j,b_j^{j+1},0,\dots,0)^T \ \text{ con } \ b_j^j = 1\,, b_j^{j+1} = -i \ \text{ se } \ j \le k$$

e analogamente $B_{j+k} = (0,\dots,0,b_{j+k}^j,b_{j+k}^{j+1},0,\dots,0)^T$ con $b_{j+k}^j = 1\,, b_{j+k}^{j+1} = i$.
Torniamo al nostro fibrato complesso E; abbiamo definito $E_{\mathbb{R}}$. Il complessificato di $E_{\mathbb{R}}$ è un fibrato complesso di rango $2k$ e risulta

$$E_{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C} \ \simeq\ E \oplus \overline{E} \ \simeq\ E \oplus E^*$$

dove $\overline{E}$ indica il fibrato coniugato di E, mentre E^* indica il fibrato duale. Il primo isomorfismo risulta dalla (58), il secondo dal fatto che le funzioni di transizione del duale sono $(g_{\alpha\,\beta}^{-1})^t$ (possiamo ovviamente sempre supporre che in E ci sia una metrica hermitiana e ridurre le funzioni di transizione a $U(k)$). Si ha pertanto

$$p_i(E_{\mathbb{R}}) = (-1)^i c_{2i}(E\oplus E^*) = \sum_{l=0}^{2i} (-1)^{l-i} c_l(E)\ c_{2i-l}(E)$$

11.2. **Classe di Pontrjagin totale.**

In analogia a quanto fatto per i fibrati hermitiani, vediamo ora un primo esempio di classe caratteristica ottenibile come polinomio nelle classi di Pontrjagin di un fibrato riemanniano $E \to M$. La *classe di Pontrjagin totale* è, per definizione, la classe

$$p(E) := 1 + p_1(E) + \cdots + p_{[k/2]}(E) = \left[\det\left(1 + \frac{1}{2\pi}\Omega\right)\right]$$

Dalla definizione seguono immediatamente le proprietà seguenti:

$$p(E \oplus F) = p(E) \wedge p(F)$$
$$p(f^*E) = f^*p(E)$$

In particolare si ha

$$p(E \oplus 1) = p(E)$$

ovvero la classe di Pontrjagin totale è stabile.

12. **Carattere di Chern. Classi di Todd, Hirzebruch e $\hat{A}$.**

Abbiamo definito le classi caratteristiche di un fibrato complesso o di un fibrato reale in termini di polinomi invarianti. Dato che le forme differenziali di grado $\ell > \dim M$ sono nulle, possiamo anche considerare serie di potenze formali (e invarianti), e calcolarle sulla matrice di curvatura; dalla nilpotenza della matrice di curvatura seguirà che lo sviluppo è di fatto finito. Alcune classi caratteristiche notevoli si definiscono appunto considerando funzioni analitiche G-invarianti in un intorno della matrice nulla di $\mathrm{Lie}(G)$, con G uguale ad uno dei gruppi di Lie matriciali considerati in precedenza.

12.1. **Carattere di Chern di un fibrato complesso con metrica hermitiana.**

Si tratta della classe caratteristica definita dalla serie $\mathrm{Tr}(e^A)$. Quindi,

$$\mathrm{Ch}(E) := \left[\mathrm{Tr}\exp\left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\Omega\right)\right] = \left[\sum_j \frac{\mathrm{Tr}\left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\Omega\right)^j}{j!}\right]$$

Dalla definizione di $\mathrm{Ch}(E)$ segue immediatamente che

$$\mathrm{Ch}(E \oplus F) = \mathrm{Ch}(E) + \mathrm{Ch}(F)$$

$$\mathrm{Ch}(E \otimes F) = \mathrm{Ch}(E) \wedge \mathrm{Ch}(F)$$

$$\overline{\mathrm{Ch}(E)} = \mathrm{Ch}(E) \quad (\text{e quindi} \quad \mathrm{Ch}(E) \in H^*(M, \mathbb{R}))$$

La prima di queste formule dimostra che la classe di Chern *non* è stabile:

$$\mathrm{Ch}(E \otimes 1^k) = \mathrm{Ch}(E) + k \neq \mathrm{Ch}(E)$$

dove abbiamo denotato con 1^k il fibrato banale di rango k.

I primi termini della serie $\mathrm{Ch}(E)$ sono

$$\mathrm{Ch}(E) = k + c_1(E) + \frac{1}{2}\left(c_1(E)^2 - 2c_2(E)\right) + \ldots$$

12.2. **La classe di Todd di un fibrato complesso con metrica hermitiana.**

Definiamo la serie di Todd come

$$\mathrm{Td}(A) := \det\left(\frac{A}{1 - e^{-A}}\right)$$

dove A è una matrice antihermitiana. In altri termini, $\mathrm{Td}(A) = \det(f(A))$ con $f(A)$ la matrice definita per calcolo funzionale dalla funzione analitica $f(z) = z/(1 - e^{-z})$. Con queste notazioni, la classe di Todd di E è, per definizione,

$$\mathrm{Td}(E) := \left[\mathrm{Td}\left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\Omega\right)\right]$$

I primi termini della serie $\mathrm{Td}(E)$ sono

$$\mathrm{Td}(E) = 1 + \frac{1}{2}c_1(E) + \frac{1}{12}\left(c_1(E)^2 + c_2(E)\right) + \ldots$$

Vale inoltre la seguente importante equazione

$$\mathrm{Td}(E \oplus F) = \mathrm{Td}(E) \wedge \mathrm{Td}(F)$$

In particolare, la classe di Todd è stabile: $\mathrm{Td}(E\oplus 1)=\mathrm{Td}(E)$. Per concludere, se M è una varietà complessa compatta e senza bordo, si pone

$$\mathrm{Td}(M) := \int_M \mathrm{Td}(T^{1,0}M)$$

dove $T^{1,0}M$ indica il fibrato tangente olomorfo di M. Il numero $\mathrm{Td}(M)$ prende il nome di *genere di Todd* della varietà. Vedremo come conseguenza del teorema dell'indice che $\mathrm{Td}(M)$ è un intero.

12.3. **La classe $\hat{A}$ di un fibrato reale riemanniano.**

Definiamo la serie $\hat{A}$

$$\hat{A}(B) := \left(\det\left(\frac{B}{\sinh\ B}\right)\right)^{1/2}$$

dove B è una matrice antisimmetrica. Si può dimostrare, ma noi non lo faremo, che $\hat{A}(B)$ definisce una serie di potenze $O(k)$-invariante in un intorno della matrice nulla di $\mathrm{Lie}\,O(k)$ [19]. Con queste notazioni, la classe $\hat{A}$ di E è, per definizione,

$$\hat{A}(E) := \left[\hat{A}\left(\frac{\sqrt{-1}}{4\pi}\Omega\right)\right]$$

I primi termini della serie $\hat{A}(E)$ sono

$$\hat{A}(E) = 1 - \frac{1}{24}p_1(E) + \frac{1}{5760}\left(7p_1(E)^2 - 4p_2(E)\right) + \dots$$

Vale inoltre

$$\hat{A}(E\oplus F) = \hat{A}(E)\wedge\hat{A}(F)$$

e dunque, in particolare, la classe $\hat{A}$ è stabile. Al solito, la classe $\hat{A}(TM)$ prende il nome di classe $\hat{A}$ della varietà M. Il numero

$$\hat{A}(M) := \int_M \hat{A}(TM)$$

prende il nome di *genere* $\hat{A}$ della varietà.

12.4. **La classe di Hirzebruch $L(E)$ di un fibrato reale riemanniano.**

Definiamo la serie di Hirzebruch come

$$L(A) := \left(\det\left(\frac{A}{\tanh\ A}\right)\right)^{1/2}$$

dove A è una matrice antisimmetrica. Si può dimostrare che $L(A)$ definisce una serie di potenze $O(k)$-invariante in un intorno della matrice nulla di $\mathrm{Lie}\,O(k)$. Con queste notazioni, la classe di Hirzebruch di E è, per definizione,

$$L(E) := \left[L\left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\Omega\right)\right]$$

I primi termini della serie $L(E)$ sono

$$L(E) = 1 + \frac{1}{3}p_1(E) + \frac{1}{45}\left(-p_1(E)^2 + 7p_2(E)\right) + \dots$$

Vale inoltre

$$L(E\oplus F) = L(E)\wedge L(F)$$

[19] Per una dimostrazione si consulti Berline-Getzler-Vergne, Corollary 3.15

e dunque, in particolare, la classe di Hirzebruch è stabile. Infine, la classe $L(TM)$ prende il nome di classe di Hirzebruch della varietà M mentre il numero

$$L(M) = \int_M L(TM)$$

è il genere-L della varietà.

13. **Polinomi $SO(k)$-invarianti. Classe di Eulero.**

Si indichi con $I(SO(k))$ l'algebra dei polinomi invarianti per $SO(k)$. Lo studio di questi polinomi porta a due casi, a seconda della parità di k.

13.1. **Polinomi $SO(k)$-invarianti con $k = 2m+1$.**

Sia k dispari: $k = 2m+1$.
Analogamente al caso visto per $I(O(k))$, data una matrice antisimmetrica A, ossia $A \in \mathrm{Lie}\,(SO(2m+1)) = \mathrm{Lie}\,(O(2m+1))$, esiste sempre una matrice $g \in SO(2m+1)$ la cui azione aggiunta trasforma A in una matrice diagonale a blocchi, con $m+1$ blocchi:

$$gAg^{-1} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \lambda_1 \\ -\lambda_1 & 0 \end{pmatrix} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \begin{pmatrix} 0 & \lambda_2 \\ -\lambda_2 & 0 \end{pmatrix} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \begin{pmatrix} 0 & \lambda_m \\ -\lambda_m & 0 \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & (0) \end{pmatrix}$$

La dimostrazione data per il caso $I(O(k))$ non produce a priori una base equiorientata a quella canonica; ma scambiando ad esempio e_1 ed e_2 in quella dimostrazione e considerando $\mu_1 = -\lambda_1$ e $\mu_j = \lambda_j$ per $j > 2$ possiamo fare in modo che la base diagonalizzante a blocchi abbia matrice del cambiamento di base con determinante uguale a 1. Come per il caso di $I(O(k))$, si trovano polinomi $\check{P}$ che dipendono solo dagli autovalori λ_i:

$$P(A) = P(gAg^{-1}) = \check{P}(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$$

L'azione della matrice $h \in SO(2m+1)$ definita sulla base canonica come

$$h : \begin{cases} e_1 \longrightarrow e_3 \\ e_2 \longrightarrow e_4 \\ e_3 \longrightarrow e_1 \\ e_4 \longrightarrow e_2 \end{cases}$$

scambia il primo con il secondo blocco della matrice, lasciando invariati i polinomi $\check{P}$. Analogamente tramite $h \in SO(2m+1)$ opportuna si possono scambiare due blocchi qualsiasi, ottenendo

$$\check{P}(\lambda_1, \dots, \lambda_m) = \check{P}(\lambda_{\sigma(1)}, \dots, \lambda_{\sigma(m)}), \quad \sigma \in S_m.$$

Nel caso $I(O(2m+1))$, per verificare che $\check{P}(\lambda_1, \dots, \lambda_m) = \check{P}(-\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ si è utilizzata la trasformazione $h \in O(k)$, $h : \begin{cases} e_1 \to e_2 \\ e_2 \to e_1 \end{cases}$. Ma h ha matrice

$$h = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \notin SO(2m+1).$$

Si considera allora la trasformazione $\widetilde{h}$ con matrice

$$\widetilde{h} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & (-1) \end{pmatrix} \in SO(2m+1)$$

che scambia λ_1 con $-\lambda_1$, ottenendo $\check{P}(\lambda_1,\ldots,\lambda_m) = \check{P}(-\lambda_1,\ldots,\lambda_m)$. Quindi vale:

$$\check{P}(\lambda_1,\ldots,\lambda_i,\ldots,\lambda_m) = \check{P}(\lambda_1,\ldots,-\lambda_i,\ldots,\lambda_m)\,,$$

ossia $\check{P}$ è un polinomio simmetrico nelle λ_i^2. Si ottiene quindi, come nel caso di $O(2m+1)$, che esiste un unico polinomio simmetrico F, tale che

$$\check{P}(\lambda_1,\ldots,\lambda_m) = F(\sigma_1(\lambda_1^2,\ldots,\lambda_m^2),\ldots,\sigma_m(\lambda_1^2,\ldots,\lambda_m^2))$$

e $P(A) = F(p_1(A),\ldots p_m(A))$ dove p_i sono i polinomi di Pontryagin, ottenendo

Teorema 9. *Si ha un isomorfismo di anelli*

$$I(SO(2m+1)) = \mathbb{C}[p_1,\ldots,p_m]$$

e non ci sono quindi nuove classi caratteristiche in questo primo caso.

13.2. **Polinomi $SO(k)$-invarianti con $k = 2m$.**
Sia ora $k = 2m$. Non c'è più la possibilità di utilizzare (-1) nel blocco finale della matrice per definire $\widetilde{h}$ e quindi non è più possibile scambiare λ_i con $-\lambda_i$.

Si procede allora come segue: fissato $g_0 \in O(k)\backslash SO(k)$ si può scivere

$$P(A) = \frac{1}{2}(P(g_0Ag_0^{-1}) + P(A)) + \frac{1}{2}(P(A) - P(g_0Ag_0^{-1})) \stackrel{def}{=} P_0(A) + P_1(A)$$

Si verifica facilmente che

- $P_1(A)$ è $SO(k)-$invariante,
- $P_0(A)$ è $O(k)-$invariante
- $P_1(hAh^{-1}) = -P_1(A)$, per $h \in O(k)\backslash SO(k)$.

Scelto h come sopra che realizza lo scambio $e_1 \leftrightarrow e_2,\ \ldots,\ e_{2m-1} \leftrightarrow e_{2m}$, si ottiene analogamente ai casi visti:

$$P_1(A) = \check{P}_1(\lambda_1,\ldots,\lambda_i,\ldots,\lambda_m) = -\check{P}_1(\lambda_1,\ldots,-\lambda_i,\ldots,\lambda_m)\,,\ \forall\, i = 1,\ldots,m$$

ossia λ_i divide $\check{P}_1(\lambda_1,\ldots,\lambda_m)$ per ogni $i = 1,\ldots,m$, e allora vale

$$\check{P}_1(\lambda_1,\ldots,\lambda_m) = \lambda_1\cdot\cdots\cdot\lambda_m\cdot\check{p}_2(\lambda_1,\ldots,\lambda_m)$$

dove $\check{p}_2$ è una funzione simmetrica delle λ_i^2. Quindi in questo caso $P(A)$ si scrive come

$$P(A) = \check{P}(\lambda_1,\ldots,\lambda_m) = \check{P}_0(\lambda_1,\ldots,\lambda_m) + H\check{p}_2(\lambda_1,\ldots,\lambda_m)$$

dove si è posto $H = \lambda_1\cdot\cdots\cdot\lambda_m$. Notiamo che $\det A = H^2$.

Vogliamo definire un polinomio invariante $e(A)$ tale che $e(A) = e(Bl(\lambda_1,\ldots,\lambda_m)) = H$ (a meno di costanti normalizzanti). Sia V uno spazio vettoriale euclideo orientato, con base ortonormale $\{v_1,\ldots,v_k\}$ e con orientazione $v_1\wedge\cdots\wedge v_k$.
L'integrale di Berezin è il funzionale lineare $T : \bigwedge^* V \to \mathbb{R}$ che vale 1 su $v_1\wedge\cdots\wedge v_k$ e zero su $v_{i_1}\wedge\cdots\wedge v_{i_\ell}$ con $\ell < k$. Se $\{v_1,\ldots,v_k\}$ e $\{w_1,\ldots,w_k\}$ sono due basi ortonormali equiorientate allora è chiaro che

$$T(v_1\wedge\cdots\wedge v_k) = T(w_1\wedge\cdots\wedge w_k) \tag{59}$$

Consideriamo la seguente forma esterna:

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{i<j} A_{ij}\, v_i\wedge v_j$$

dove $\mathcal{B} = \{v_i\}_{i=1,\dots,2m}$ è una base ortonormale di $\mathbb{R}^{2m}$ equiorientata alla base standard. È facile verificare che se B è coniugata a A tramite $g \in SO(k)$ e se $\mathcal{C} = \{w_i\}_{i=1,\dots,2m}$ è la base ortonormale di $\mathbb{R}^{2m}$ ottenuta da $\mathcal{B}$ tramite g allora vale la seguente identità in $\bigwedge^2 \mathbb{R}^{2m}$:

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{i<j} A_{ij}\, v_i \wedge v_j = \frac{1}{2\pi}\sum_{i<j} B_{ij}\, w_i \wedge w_j$$

Ne segue che in $\bigwedge^{2m} \mathbb{R}^{2m}$

$$(\frac{1}{2\pi}\sum_{i<j} A_{ij}\, v_i \wedge v_j)^m = (\frac{1}{2\pi}\sum_{i<j} B_{ij}\, w_i \wedge w_j)^m$$

da cui deduciamo, utilizzando la (59), che

$$T((\frac{1}{2\pi}\sum_{i<j} A_{ij}\, v_i \wedge v_j)^m) = T((\frac{1}{2\pi}\sum_{i<j} B_{ij}\, w_i \wedge w_j)^m) \in \mathbb{R}$$

Definiamo $e(A)$, **il polinomio di Eulero**, come segue:

$$e(A) \;:=\; \frac{1}{(m)!} T(\frac{1}{2\pi}\sum_{i<j} A_{ij}\, v_i \wedge v_j)^m$$

Possiamo concludere da quanto spiegato sopra che $e(A)$ è $SO(k)$-invariante. Scelta una base diagonalizzante a blocchi per A, ossia tale che:

$$\begin{array}{rcl} Av_1 & = & \lambda_1 v_2 \\ Av_2 & = & -\lambda_1 v_1 \\ Av_3 & = & \lambda_2 v_4 \\ Av_4 & = & -\lambda_2 v_3 \\ \vdots & & \end{array}$$

possiamo scrivere la due forma associata ad A e alla base diagonalizzante come

$$-\frac{\lambda_1}{2\pi} v_1 \wedge v_2 - \frac{\lambda_2}{2\pi} v_3 \wedge v_4 - \dots$$

da cui deduciamo che

$$e(A) \;=\; -\frac{\lambda_1}{2\pi} \cdot \dots \cdot -\frac{\lambda_m}{2\pi} \;=\; \frac{1}{(2\pi)^m}\,(-1)^m\,\lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_m.$$

Si noti che, in particolare,

$$e(A)^2 \;=\; \frac{1}{(2\pi)^k}\lambda_1^2 \cdot \dots \cdot \lambda_m^2 \;=\; \frac{1}{(2\pi)^k}\,\det(A) \;=\; p_m(A)$$

ossia il quadrato del polinomio di Eulero è uguale all'ultimo polinomio di Pontryagin $p_m(A)$.
Concludendo, abbiamo dimostrato il seguente importante risultato:

Teorema 10. *Si ha un isomorfismo di anelli:*

$$I(SO(2m)) \;=\; \mathbb{C}[p_1, \dots, p_{m-1}, p_m, e]/ < e^2 - p_m >$$

13.3. **Fibrati reali orientabili di rango $k = 2m$. Classe di Eulero.**

Definizione 15. Un fibrato reale E di rango k sulla varietà M è detto *orientabile* se il fibrato in rette $\bigwedge^k E = \bigwedge^{max} E$ è banale.

Se E è orientabile allora, per quanto già visto precedentemente $(\bigwedge^{max} E, \pi, M)$ possiede una sezione globale non nulla. Notiamo anche che se E è orientabile allora $\bigwedge^{max} E \backslash 0 = \cup_{m \in M} (\bigwedge^{max} E_m \backslash 0)$ ha due componenti connesse; la scelta di una di esse è detta scelta di una *orientazione* per E.

Non è difficile dimostrare che E è orientabile se e solo se ammette un ricoprimento di intorni banalizzanti tali che le funzioni di transizione abbiano tutte determinante positivo [20]. Fissata una orientazione di E diremo che una base locale $\{s_1, \ldots, s_k\}$ ha orientazione positiva se $s_1 \wedge \cdots \wedge s_k$ appartiene alla componente connessa che definisce l'orientazione.

La definizione appena data è in accordo con la definizione di orientabilità di una varietà differenziabile: infatti la condizione che TM sia orientabile in quanto fibrato reale è equivalente alla condizione che esista un atlante con la proprietà che lo jacobiano delle mappe di transizione, da una carta ad un'altra, abbia determinante sempre positivo e quest'ultima è la definizione classica di orientabilità per una varietà reale.

Notiamo infine che se $E \to M$ è un fibrato reale orientabile di rango k, allora esso ammette una riduzione del gruppo di struttura a $SO(k)$; infatti dall'esistenza di una metrica abbiamo la possibilità di ridurre a $O(k)$ e dall'orientabilità possiamo ulteriormente ridurre a $SO(k)$. Se ∇ è una connessione compatibile con la metrica allora le matrici locali di curvatura $\{\Omega_\alpha\}$, con Ω_α calcolata rispetto ad una base locale ortonormale con orientazione positiva nell'aperto diagonalizzante U_α, è una collezione di matrici antisimetricche di 2-forme che verifica $\Omega_\beta = g_{\alpha\beta}^{-1} \Omega_\alpha g_{\alpha\beta}$, con $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap \Omega_\beta \to SO(k)$.

Possiamo allora dare la seguente

Definizione 16. Dato un fibrato reale orientabile E di rango $k = 2m$ sulla varietà M si indica con $e(E, \nabla^E) \in \Omega^{2m}(M)$ la **forma di Eulero**; $e(E, \nabla^E)$ è ottenuta sostituendo ad A in $e(A)$, la matrice di curvatura Ω. Si definisce la **classe di Eulero di** E come $[e(E, \nabla^E)] = e(E) \in H^{2m}_{\mathrm{dR}}(M, \mathbb{R})$.

L' espressione in un intorno banalizzante e rispetto ad una base locale ortonormale positivamente orientata si deduce da quella di $e(A)$ che è data, come si verifica facilmente, dall'espressione:

$$e(A) = (-4\pi)^{-m} \frac{1}{m!} \sum_{\sigma \in S_{2m}} \mathrm{segno}(\sigma) A_{\sigma(1)\sigma(2)} \cdots A_{\sigma(2m-1)\sigma(2m)}.$$

Il polinomio $e(A)$ è anche detto polinomio di **Pfaff** o **Pfaffiano**.
Quindi

$$e(\Omega) = \frac{(-1)^m}{2^m (2\pi)^m} \frac{1}{m!} \sum_{\sigma \in S_{2m}} \mathrm{segno}(\sigma) \Omega_{\sigma(1)\sigma(2)} \cdots \Omega_{\sigma(2m-1)\sigma(2m)}.$$

Esempio. Sia $M = S^2$ e sia ∇ la connessione su TS^2 ottenuta dalla connessione banale su $S^2 \times \mathbb{R}^3$ per proiezione ortogonale dalla decomposizione $TS^2 \oplus N = S^2 \times \mathbb{R}^3 = T(\mathbb{R}^3)|_{S^2}$, con N il fibrato normale (che è banale):

$$\nabla Y = (\mathrm{Id}_{T^*S^2} \otimes p)(dY)\,.$$

Sia U l'aperto di S^2 per il quale le coordinate sferiche (u, v) sono una carta locale:

$$(0, 2\pi) \times (0, \pi) \ni (u, v) \to (\cos u \sin v, \sin u \sin v, \cos v) \in U \subset S^2.$$

[20] Trovate una dimostrazione di questo fatto, ad esempio, in Warner

In uno degli esercizi per casa, risolto poi a lezione, abbiamo calcolato la 1-forma di connessione di ∇ su U rispetto alla base locale ortonormale di TS^2 data da $e_1 = (-\sin u, \cos u, 0)$ ed $e_2 = (\cos u \cos v, \sin u \cos v, -\sin v)$ ed abbiamo trovato che

$$\omega_{12} = -\cos(v)du\,, \quad \omega_{21} = -\omega_{12}$$

e quindi $\Omega_{12} = \sin(v)dv \wedge du = -\sin(v)du \wedge dv = -\Omega_{12}$. Quindi, dato che $m = 1$,

$$e(\Omega) = \frac{(-1)}{4\pi}(\Omega_{12} - \Omega_{21}) = \frac{(-1)}{2\pi}\Omega_{12} = \frac{1}{2\pi}\sin(v)du \wedge dv \equiv \frac{1}{2\pi}dvol_{(S^2,g)}\,.$$

Vediamo quindi, direttamente, che

$$\int_{S^2} e(TS^2) = \frac{1}{2\pi}\int_{S^2} dvol_{(S^2,g)} = \frac{1}{2\pi}4\pi = 2$$

Osserviamo che $2 == \chi(S^2)$, con $\chi(S^2)$ la caratteristica di Eulero-Poincaré di S^2. Quindi:

$$\chi(S^2) = \int_{S^2} e(TS^2)$$

e questo è un caso particolare del Teorema di Chern-Gauss-Bonnet che enunceremo fra poco.

Osservazione 1. Sia E un fibrato complesso e $E_{\mathbb{R}}$ la sua realizzazione; abbiamo visto che se E ha rango$_{\mathbb{C}} = m$ allora $E_{\mathbb{R}}$ ha rango$_{\mathbb{R}} = 2m$. Si osservi che poichè E è complesso segue che $E_{\mathbb{R}}$ è orientabile: infatti se $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to U(m)$ sono le funzioni di transizione di E, allora $(g_{\alpha\beta})_{\mathbb{R}} : U_\alpha \cap U_\beta \to SO(2m)$ sono per definizione le funzioni di transizione di $E_{\mathbb{R}}$ e sappiamo dalla formula (58) che

$$\det(g_{\alpha\beta})_{\mathbb{R}} \;=\; \det(g_{\alpha\beta}) \cdot \overline{\det(g_{\alpha\beta})} \;=\; |\det(g_{\alpha\beta})|^2 > 0$$

Vale allora la seguente

Proposizione 5. *Risulta*

$$e(E_{\mathbb{R}}) \;=\; c_m(E) \qquad \textit{in} \quad H^{2m}_{dR}(M, \mathbb{R}).$$

Dimostrazione: Basta ragionare su uno spazio vettoriale complesso E. Se $\langle\ ,\ \rangle_E$ indica la metrica hermitiana su E, la sua parte reale $\langle\ ,\ \rangle_{E_{\mathbb{R}}}$ è una metrica su $E_{\mathbb{R}}$; inoltre se $v_1, \ldots, v_m$ è una base ortonormale di E allora $w_1 = v_1, w_2 = iv_1, w_3 = v_2, \ldots, w_{2m} = iv_m$ è una base ortonormale di $E_{\mathbb{R}}$. Notiamo anche che una matrice antihermitiana A definisce un operatore antihermitiano su E una volta fissata una base ortonormale, e questo induce un operatore antisimmetrico su $E_{\mathbb{R}}$ con metrica $\langle\ ,\ \rangle_{E_{\mathbb{R}}}$; questo operatore ha matrice $A_{\mathbb{R}}$ rispetto alla base $\{w_1, \ldots, w_{2m}\}$ e questa matrice è antisimmetrica. L'enunciato $e(A_{\mathbb{R}}) = c_m(A)$ ha quindi senso. Allora se $v_1, \ldots, v_m$ è una base che diagonalizza A, ossia

$$\begin{array}{rcl} Av_1 & = & i\lambda_1 v_1 \\ \vdots & & \qquad\qquad , \qquad \lambda_i \in \mathbb{R} \\ Av_m & = & i\lambda_m v_m \end{array}$$

si ottiene per la m-esima classe di Chern:

$$c_m(A) \;=\; \left(\frac{i}{2\pi}\right)^m (i\lambda_1) \cdot \cdots \cdot (i\lambda_m) \;=\; \left(\frac{-1}{2\pi}\right)^m \lambda_1 \cdot \cdots \cdot \lambda_m.$$

D'altro canto

$$A_{\mathbb{R}} w_1 \;=\; Av_1 \;=\; i\lambda_1 v_1 = \lambda_1(iv_1) \;=\; \lambda_1 w_2\,, \qquad A_{\mathbb{R}} w_2 \;=\; -\lambda_1 w_1$$

quindi in questa base $A_{\mathbb{R}}$ si scrive in maniera diagonale a blocchi, ottenendo come visto

$$e(A_{\mathbb{R}}) = \left(\frac{-1}{2\pi}\right)^m \lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_m$$

e quindi il risultato.

14. **Alcuni bellissimi teoremi**

14.1. **Teorema di Chern-Gauss-Bonnet.**

Teorema 11. *(Chern - Gauss - Bonnet) Sia M una varietà compatta senza bordo e orientabile di dimensione $2m$. Indicata con*

$$\chi(M) = \sum_{i=0}^{2m} (-1)^i \dim H^i_{dR}(M, \mathbb{R})$$

la caratteristica di Eulero - Poincaré di M, si ha:

$$\chi(M) = \int_M e(M, \nabla^{TM})$$

Osservazione. Per il teorema di de Rham, la caratteristica di Eulero - Poincaré si può definire anche come somma alternata delle dimensioni dei gruppi di coomologia singolare a coefficienti in $\mathbb{R}$.

14.2. **Teorema della segnatura di Hirzebruch.**

Teorema 12. *(della segnatura di Hirzebruch) Sia M come nel teorema (11) di dimensione $4m$. Si consideri la forma bilineare simmetrica*

$$H^{2m}_{dR}(M,\mathbb{R}) \times H^{2m}_{dR}(M,\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

che agisce sulle coppie di $2m$-forme come:

$$([\alpha],[\beta]) \longmapsto \int_M [\alpha \wedge \beta]$$

e sia $\sigma(M)$ la sua segnatura. Si ha

$$\sigma(M) = \int_M L(TM)$$

dove $L(TM) = [L(TM,\, \nabla^{TM})]$ è la classe di Hirzebruch.

14.3. **Teorema di Riemann-Roch-Hirzebruch.**

Sia M una varietà complessa ed E un fibrato olomorfo. Abbiamo visto come sia possibile definire l'operatore

$$\bar\partial \,:\, C^\infty(M, \textstyle\bigwedge^{p,q}(M) \otimes E) \longrightarrow C^\infty(M, \textstyle\bigwedge^{p,q+1}(M) \otimes E)\,.$$

Dato che $(\bar\partial)^2 = 0$ otteniamo un *complesso*

$$\cdots \to C^\infty(M, \textstyle\bigwedge^{0,q}(M) \otimes E) \xrightarrow{\bar\partial} C^\infty(M, \textstyle\bigwedge^{p,q+1}(M) \otimes E) \to \dots$$

I gruppi di coomologia di Dolbeault $H^{0,i}_{\bar\partial}(M,E)$ sono per definizione i gruppi di coomologia di questo complesso. Vedremo che questi sono spazi vettoriali di dimensione finita [21] . Indicando con

$$\chi(M,\, \mathcal{O}(E)) = \sum_i (-1)^i H^{0,i}_{\bar\partial}(M,E)$$

[21] Il teorema di Dolbeault, analogo complesso del teorema di de Rham, afferma che

$$H^{0,i}_{\bar\partial}(M,E) \simeq H^i(M,\mathcal{O}(E))\,,$$

dove a destra compaiono i gruppi di coomologia a valori nel fascio delle sezioni olomorfe di E. Per la definizione si consulti, as esempio, [4] o anche [15] [16]

la caratteristica di Eulero del complesso di Dolbeault [22].
Si ha il seguente importante teorema

Teorema 13. *(Riemann - Roch - Hirzebruch) Sia M una varietà complessa* [23] *ed E un fibrato olomorfo. Risulta*

$$\chi(M, \mathcal{O}(E)) = \int_M \mathrm{Td}(T^{1,0}M) \wedge \mathrm{Ch}(E)$$

dove $\mathrm{Td}(T^{1,0}M)$ *è la classe di Todd di M e* $\mathrm{Ch}(E)$ *la classe di Chern di E. In particolare se E è il fibrato di rango 1 banale risulta*

$$\chi(M, \mathcal{O}) = \int_M \mathrm{Td}(T^{1,0}M)$$

Otterremo questi tre teoremi come corollari del teorema dell'indice di Atiyah-Singer.

[22] la notazione viene dalla precedente nota: $\chi(M, \mathcal{O}(E))$ è la caratteristica di Eulero della coomologia a valori nel fascio $\mathcal{O}(E)$

[23] il teorema originale era solo per varietà algebriche proiettive lisce

15. **Moduli di Clifford e Operatori di Dirac**

15.1. **Algebre di Clifford.**

Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione finita dotato di una forma bilineare simmetrica q non necessariamente definita positiva.

Definizione 17. L'*algebra di Clifford* $Cl(V, q)$ associata a V e q è l'algebra con unità generata dai vettori di V, da $1 \in \mathbb{R}$ con le relazioni:

$$v \cdot w + w \cdot v = -2q(v, w) \cdot 1$$

È possibile realizzare $Cl(V, q)$ come il quoziente $T(V)/I(V)$ dell'algebra tensoriale $T(V) = \sum_r V^{\otimes r}$ per l'ideale $I(V) \subset T(V)$ generato dagli elementi del tipo $v \otimes w + w \otimes v + 2q(v, w)$ con $v, w \in V$.

La proiezione naturale $T(V) \to Cl(V, q)$ fornisce un'applicazione $V \to Cl(V, q)$. Non è difficile dimostrare che $V \cap I(V) = 0$, per cui $V \to Cl(V, q)$ è iniettiva.
Per $Cl(V, q)$ vale la proprietà universale enunciata nella seguente:

Proposizione 6. *Sia A un'algebra con unità e $f : V \to A$ un'applicazione lineare tale che*

$$f(v) \cdot f(w) + f(w) \cdot f(v) = -2q(v, w) \cdot 1_A\,, \quad \textit{per ogni} \quad v, w \in V;$$

allora esiste un unico omomorfismo di algebre $\tilde{f} : Cl(V, q) \to A$ che estende f. A meno di isomorfismi, $Cl(V, q)$ è caratterizzata da questa proprietà.

Dimostrazione. Per la proprietà universale di $T(V)$ esiste $f^{\otimes} : T(V) \to A$ che estende f. Per l'ipotesi su f, $f^{\otimes}$ passa al quoziente e fornisce la $\tilde{f}$ voluta. Inoltre, sia C un'altra algebra contenente V che soddisfi la medesima proprietà; entrambe le inclusioni $V \to C$, $V \to Cl(V, q)$ si estendono rispettivamente a $\phi : Cl(V, q) \to C$, $\psi : C \to Cl(V, q)$. Componendo, otteniamo $\psi \circ \phi : Cl(V, q) \to Cl(V, q)$ che estende l'inclusione $V \to Cl(V, q)$; dato che l'estensione è unica, $\psi \circ \phi$ è l'identità e ϕ e ψ sono una l'inversa dell'altra. $\square$

15.2. **Moduli di Clifford.**

Saremo interessati principalmente al caso in cui $V = T_xM$, con (M, g) è una varietà riemanniana, e con forma bilineare $q = g_x(,)$ definita positiva. Ci poniamo direttamente nell'ipotesi che $q(,)$ sia definita positiva anche se molto di quello che vedremo può essere generalizzato a forme bilineari simmetriche qualsiasi.
Sia quindi V uno spazio vettoriale reale con prodotto scalare q.

Definizione 18. Un *modulo di Clifford* è uno spazio vettoriale E dotato di un'azione dell'algebra $Cl(V, q)$, cioè un omomorfismo di algebre con unità $c : Cl(V, q) \to End(E)$. Se E è dotato di metrica $(\cdot, \cdot)_E$ l'azione può essere *unitaria* il che avviene qualora $c(v) \in O(E, (\cdot, \cdot)_E)$ per ogni $v \in V$ di norma unitaria.

Osserviamo che se E è un modulo unitario e se v ha norma unitaria allora si ha:

$$(c(v)e_1, c(v)e_2)_E = (e_1, e_2)_E$$

e dato che $(c(v))^2 = -1_E$ si ha:

$$(c(v)e_1, e_2)_E + (e_1, c(v)e_2)_E = 0$$

vale a dire: $c(v)$ è anti-autoaggiunto per ogni $v \in V$.

Proposizione 7. *Sia q un prodotto scalare. Allora $\Lambda^*(V)$ è un modulo di Clifford (unitario) su $Cl(V,q)$.*

Dimostrazione. In primo luogo si estenda nel modo usuale a $\Lambda^*(V)$ il prodotto scalare q di V. Ricordiamo che per far ciò si impone $\Lambda^k(V) \perp \Lambda^h(V)$ se $k \neq h$, e poi si dichiara ortonormale la base $(v_{i_1} \wedge \ldots \wedge v_{i_k})_{i_1<\ldots<i_k}$ di $\Lambda^k(V)$ se $\{v_1, \ldots, v_n\}$ è una base ortonormale di V. A questo punto definiamo $\epsilon(v)(\alpha) := v \wedge \alpha$ ($v \in V, \alpha \in \Lambda^*(V)$) e la sua aggiunta tramite q: $i(v) := \epsilon^*(v)$. Si ha:

$$i(v)(w_1 \wedge \ldots \wedge w_l) = \sum_{i=1}^{l} (-1)^{i+1} w_1 \wedge \ldots \wedge (v, w_i) \wedge \ldots \wedge w_l$$

e quindi $i(v)$ non è altro che l'usuale moltiplicazione interna per il covettore $v^* := q(v, \cdot)$. Ponendo:

$$c(v) := \epsilon(v) - i(v)$$

si ha:

$$c(v)^2 = -q(v,v) \cdot 1$$

in quanto si verifica che:

$$\epsilon(v)i(v) + i(v)\epsilon(v) = q(v,v) \cdot 1$$

Dunque $v \mapsto c(v)$ si estende ad un omomorfismo di algebre $Cl(V,q) \to End(\Lambda^*(V))$. L'azione è unitaria grazie al fatto che $c(v)^* = -c(v)$. La dimostrazione è completa.

Sempre nell'ipotesi che $q(\ ,\ )$ sia un prodotto scalare, consideriamo l'applicazione

$$\sigma : Cl(V,q) \to \Lambda^* V$$

che associa a $x \in Cl(V,q)$ l'elemento $c(x)(1)$ di $\Lambda^* V$. Quest'applicazione è un isomorfismo di spazi vettoriali: infatti se $\{v_1, \ldots, v_n\}$ è una base ortonormale di V allora l'inversa di σ è data dall'applicazione $c : \Lambda^* V \to Cl(V,q)$ che manda $v_{i_1} \wedge \cdots \wedge v_{i_k} \in \Lambda^* V$ in $v_{i_1} \cdot \cdots \cdot v_{i_k} \in Cl(V,q)$. È facile verificare che queste due applicazioni sono una l'inversa dell'altra.

Concludiamo che se q è un prodotto scalare, allora esiste un isomorfismo di spazi vettoriali $Cl(V,q) \simeq \Lambda^* V$: in particolare se $\{v_j\}$ è una base ortonormale di V allora

$$v_{i_1} \cdots v_{i_k} \quad i_1 < \cdots < i_k\,, \quad j = 0, \ldots, \dim V$$

è una base dell'algebra di Clifford.

15.3. **Gradazione e filtrazione di $Cl(V,q)$.**

Sia ora q una qualsiasi forma bilineare simmetrica. È molto importante per la teoria delle algebre di Clifford la gradazione $\mathbb{Z}_2$ di cui gode $Cl(V,q)$:

$$Cl(V,q) = Cl(V,q)^0 \oplus Cl(V,q)^1$$

dove $Cl(V,q)^0$ è il sottospazio generato da prodotti di un numero pari di elementi di V mentre $Cl(V,q)^1$ è quello generato da prodotti di un numero dispari di elementi di V. Dato che l'ideale $I(V)$ è generato da elementi di grado pari in $T(V)$ vediamo che la gradazione $Cl(V,q) = Cl(V,q)^0 \oplus Cl(V,q)^1$ è effettivamente ben definita.
Alternativamente, si può considerare l'automorfismo involutivo $\alpha : Cl(V,q) \to Cl(V,q)$ che estende la mappa $v \mapsto -v$ definita su V; $Cl(V,q)^0$ e $Cl(V,q)^1$ sono gli autospazi di α relativi agli autovalori -1 e 1. Osserviamo anche che il prodotto rispetta la regola dei segni.

La filtrazione di $T(V)$:

$$T(V) = \sum_k \left(\sum_{r=0}^{k} V^{\otimes r} \right)$$

viene ereditata da $Cl(V,q)$ tramite la proiezione naturale, ovvero:

$$Cl(V,q) = \sum_k Cl^k(V,q)$$

dove

$$Cl^k(V,q) = \left\{ v \in Cl(V,q) | \exists u \in \sum_{r=0}^{k} V^{\otimes r} \text{tale che} [u] = v \right\}$$

Possiamo altresì definire:

$$V^{\otimes k} \to Cl^k(V,q)/Cl^{k-1}(V,q)$$

usando le proiezioni naturali: quest'applicazione è suriettiva e non è difficile dimostrare che il nucleo è lo stesso ideale che definisce $\Lambda^k V$ (sarà un esercizio per casa).
Quindi:

$$Cl^k(V,q)/Cl^{k-1}(V,q) \cong \Lambda^k V$$

perciò l'algebra graduata associata alla filtazione di $Cl(V,q)$, e cioè $\bigoplus_k Cl^k(V,q)/Cl^{k-1}(V,q)$, è isomorfa all'algebra esterna $\Lambda^* V$.
Come corollario otteniamo

Proposizione 8. *Esiste un isomorfismo di spazi vettoriali*

$$Cl(V,q) \cong \Lambda^* V$$

In particolare $\dim Cl(V,q) = 2^{\dim V}$

e l'isomorfismo con $\Lambda^* V$, in quanto spazi vettoriali, è ora valido per qualsiasi forma bilineare simmetrica $q(\, , \,)$ (non necessariamente un prodotto scalare come nella sottosezione precedente).

15.4. **Operatori di Dirac.**

Sia M varietà riemanniana con metrica g. g induce una metrica, che denotiamo ancora g, su T^*M. Consideriamo:

$$\bigcup_{m \in M} Cl(T^*_m M, g_m) =: Cl(T^*M, g)$$

che può essere dotato in modo ovvio di struttura di fibrato vettoriale: il *fibrato di Clifford* associato al fibrato cotangente di (M,g). Il fibrato $Cl(T^*M,g)$ è spesso denotato semplicemente con $Cl(M)$.

Supponiamo che esista un secondo fibrato E su M, con ciascuna fibra E_m modulo di Clifford su $Cl(T^*_m M, g_m)$ e supponiamo che l'azione dipenda in modo C^∞ da m (la definizione precisa si dà facilmente sulle carte locali). Diremo che E è un fibrato di moduli di Clifford o anche, più brevemente, un modulo di Clifford. Il fibrato E sarà in pratica dotato di una metrica, anche se questa struttura addizionale non è strettamente necessaria . Infine sia data su E una connessione ∇^E (che sceglieremo compatibile con la metrica di E se in E c'è una metrica). Allora rimane definita l'applicazione:

$$C^\infty(M, T^*M \otimes E) \overset{c}{\to} C^\infty(M,E)$$
$$c(\phi \otimes s)(m) := c_m(\phi_m)(s_m) \in E_m$$

Definizione 19. Ai dati M, g, E, c, ∇^E rimane associato un *operatore di Dirac* $\not{D}$, definito come la composizione delle mappe:

$$C^\infty(M,E) \overset{\nabla^E}{\to} C^\infty(M, T^*M \otimes E) \overset{c}{\to} C^\infty(M,E)$$
$$\not{D} := c \circ \nabla^E$$

Vediamo l'espressione locale di $D\!\!\!/$ in funzione di una base locale ortonormale $\{e_i\}$ di TM e della sua base duale $\{e^i\}$. C'è da osservare che la scrittura di $D\!\!\!/$ che seguirà non dipende dalla scelta della base locale ortonormale. Se $\{s_j\}$ è una base locale di E allora abbiamo:

$$D\!\!\!/(s_j) = (c \circ \nabla^E)s_j = c(\nabla^E s_j) = c(\sum_l \omega_j^l s_l) = \\ c(\sum_l \sum_k \omega_{j,k}^l e^k s_l) = \sum_k c(e^k) \sum_l \omega_{j,k}^l s_l = \\ \sum_k c(e^k) \nabla_{e_k}^E s_j$$

e dunque:

$$D\!\!\!/ = \sum_i c(e^i) \nabla_{e_i}^E .$$

Lo stesso calcolo dimostra anche che

$$D\!\!\!/ = \sum_i c(dx^i) \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}}^E ;$$

quest'espressione dipende però dalle coordinate scelte.

15.5. **Operatori associati a fibrati di Dirac.**

In alcune circostanze richiederemo alcune proprietà addizionali che elenchiamo qui di seguito:

- E è dotato di metrica;
- l'azione di Clifford è unitaria
- la connessione ∇^E è compatibile con tale metrica e verifica la relazione

(60) $$\nabla_X^E (c(\phi)s) = c(\nabla_X^{LC} \phi)(s) + c(\phi)\nabla_X^E s$$

dove ∇^{LC} è la connessione di Levi-Civita sul fibrato cotangente.
Una tale connessione è detta una **connessione di Clifford**.

Un fibrato di moduli di Clifford con queste proprietà addizionali è detto un **fibrato di Dirac.** [24]
Vale la seguente

Proposizione 9. *Se E è un fibrato di moduli di Clifford e supponiamo che E sia dotato di metrica e che l'azione di Clifford sia unitaria. Allora esiste sempre una connessione di Clifford su E.*

Dimostreremo questa proposizione più avanti.

15.6. **Esempio 0: il caso piatto.** Sia (V, q) uno spazio vettoriale euclideo di $dim\ V = n$; sia E un modulo di Clifford per V; sia $\{v_1, \ldots, v_n\}$ una base per V. Ricordiamo che $\mathcal{C}^\infty(V, E)$ sono le funzioni a valori in E, mentre $x_1, \ldots, x_n$ sono le coordinate indotte da $\{v_1, \ldots, v_n\}$. Rimane definito l'operatore di Dirac associato a questo modulo di Clifford :

(61) $$D\!\!\!/ = \sum c(v^i) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

Un semplice calcolo dimostra che :

(62) $$D\!\!\!/^2 = (-\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \ldots - \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}) \,\mathrm{Id}_E$$

A destra c'è il **Laplaciano** Δ; vediamo quindi che nel caso piatto $D\!\!\!/$ è una sorta di radice quadrata del Laplaciano.

[24]Alcuni autori lo chiamano un **fibrato di Clifford**.

15.7. **Esempio 1: l'operatore di Gauss-Bonnet.**

Abbiamo visto come Λ^*M sia in maniera naturale un fibrato di moduli di Clifford unitari. Sia ∇^{Λ^*M} la connessione su Λ^*M indotta dalla connessione di Levi-Civita. Non è difficile dimostrare che questa connessione è di Clifford.

Definizione 20. L' operatore di Gauss-Bonnet (o di Eulero) è l'operatore

$$D_{\mathrm{GB}} := c \circ \nabla^{\Lambda^*M} : C^\infty(M, \Lambda^*M) \to C^\infty(M, \Lambda^*M)\,.$$

Vediamo ora come sia possibile dare un'espressione esplicita di questo operatore di Dirac. Per prima cosa sia in generale V uno spazio vettoriale di dimensione n, con prodotto scalare q. Si scelga $\{e_i\}$ una base ortonormale di V, e si fissi un'orientazione tramite $\mathrm{vol} := e_1 \wedge \cdots \wedge e_n$. Sia $< \cdot, \cdot >$ il prodotto scalare indotto su ΛV. Possiamo definire per ogni k l'applicazione $*$ di Hodge:

$$\begin{array}{cccc} * : & \Lambda^k V & \to & \Lambda^{n-k} V \\ & e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k} & \mapsto & sign(\sigma) e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_{n-k}} \end{array}$$

dove $\sigma(1) = i_1, \ldots, \sigma(k) = i_k, \sigma(k+1) = j_1, \ldots, \sigma(n) = j_{n-k}$. Si verifica senza difficoltà che

$$*^2 = (-1)^{k(n-k)} \tag{63}$$

e che :

$$u \wedge *v =< u, v > \mathrm{vol}\,, \forall u, v \in \Lambda^k V\,, \quad w \wedge v =< *w, v > \mathrm{vol}\,, \forall w \in \Lambda^{n-k} V, v \in \Lambda^k V$$

Torniamo alla nostra varietà riemanniana di dimensione n e supponiamo in aggiunta che M sia orientabile. Sia $\mathrm{dvol} \in C^\infty(M, \Lambda^n M)$ una forma di volume per la varietà riemanniana (M, g). Per ogni $x \in M$ rimane definita un'applicazione lineare

$$*_x : \Lambda^k_x M \to \Lambda^{n-k}_x M$$

che induce un'applicazione di fibrati:

$$* : \Lambda^k M \to \Lambda^{n-k} M$$

Già sappiamo che date due k-forme ω e α è ben definito il prodotto scalare L^2:

$$(\omega, \alpha)_{L^2} := \int_M < \omega, \alpha > \mathrm{dvol}\,.$$

Allora rimane ben definito l'operatore d^* aggiunto formale di $d : \Lambda^k M \to \Lambda^{k+1} M$ rispetto a $(\cdot, \cdot)_{L^2}$, vale a dire che d^* è definito da $(d\omega, \alpha)_{L^2} = (\omega, d^*\alpha)_{L^2}$ per ω k-forma e α $(k+1)$-forma. Per verificare l'esistenza di d^* ne diamo una espressione in termini di d e $*$. Prese $\omega \in \Lambda^k M$, $\alpha \in \Lambda^{n-k-1}$ si ha per il teorema di Stokes:

$$\begin{array}{l} \int_M < *d\omega, \alpha > \mathrm{dvol} = \int_M d\omega \wedge \alpha \\ = (-1)^{k+1} \int_M \omega \wedge d\alpha = \int_M (-1)^{k+1} < *\omega, d\alpha > \mathrm{dvol} \end{array}$$

Dato che $*^2 = (-1)^{k(n-k)}$ si ottiene dopo qualche conto la formula cercata:

$$d^* = (-1)^{nk+n+1} * d *$$

In particolare, se α è una 1-forma, allora $d^*\alpha \in C^\infty(M)$ ed otteniamo, dall'uguaglianza di $(1, d^*\alpha)$ e $(d(1), \alpha) = 0$, il *Teorema della divergenza* :

$$\int_M (d^*\alpha) \mathrm{dvol} = 0 \tag{64}$$

Proposizione 10. *Consideriamo Λ^*M come modulo di Clifford unitario, e sia ∇^{Λ^*M} la connessione su di esso indotta dalla connessione di Levi-Civita ∇^{LC}. Sia $c \circ \nabla^{\Lambda^*M}$ l'operatore di Gauss-Bonnet. Si ha $c \circ \nabla^{\Lambda^*M} = d + d^*$.*

Dimostrazione. Denotiamo la connessione su Λ^*M semplicemente con ∇. La proposizione segue immediatamente dal lemma seguente.

Lemma 4. $d = \sum_i \epsilon(e^i)\nabla_{e_i}$; $\quad d^* = \sum_j -i(e^j)\nabla_{e_j}$.

Dimostrazione. Sia $\tilde{d} = \sum \varepsilon(e^i)\nabla_{e_i}$. Si ha $\tilde{d}f = df$ e $\tilde{d}(\phi \wedge \psi) = \tilde{d}\phi \wedge \psi + (-1)^{|\phi|}\phi \wedge \tilde{d}\psi$ poiché per ∇ vale la regola di Leibnitz. Basta quindi verificare che per ogni $1-$forma θ valga $\tilde{d}\theta = d\theta$. Si ricordi che la connessione di Levi-Civita sul duale è definita richiedendo che valga

$$X(e^i, e_j) = (\nabla_X e^i, e_j) + (e^i, \nabla_X e_j)$$

dove $(\, , \,)$ denota qui la dualità fra TM e T^*M. Quindi $\forall X,Y$ si ha:

$$X(\theta, Y) = (\nabla_X \theta, Y) + (\theta, \nabla_X Y)$$

ossia

$$X(\theta(Y)) - \theta(\nabla_X Y) = (\nabla_X \theta)(Y)$$

Mostreremo ora che $\tilde{d}\theta(X,Y) = d\theta(X,Y)$ $\forall X,Y \in C^\infty(M,TM)$:

$$\begin{aligned} \tilde{d}\theta(X,Y) &= (\textstyle\sum e^i \wedge \nabla_{e_i}\theta)(X,Y) = \\ &= \textstyle\sum (e^i(X)(\nabla_{e_i})(Y) - (\nabla_{e_i})(X)e^i(Y)) \end{aligned}$$

ma $X = e^i(X)e_i$ e $Y = e^i(Y)e_i$ dunque

$$\begin{aligned} (\nabla_X\theta)(Y) - (\nabla_Y\theta)(X) &= X(\theta(Y)) - \theta(\nabla_X Y) - Y(\theta(X)) + \theta(\nabla_Y X) = \\ &= X(\theta(Y)) - Y(\theta(X)) - \theta(\nabla_X Y - \nabla_Y X) = \\ &= X(\theta(Y)) - Y(\theta(X)) - \theta([X,Y] + T(X,Y)) \end{aligned}$$

ove T è la torsione. Dato che ∇ è priva di torsione si ha $T \equiv 0$ e

$$\tilde{d}\theta(X,Y) = X(\theta(Y)) - Y(\theta(X)) - \theta([X,Y]) = d\theta(X,Y)$$

ove nell'ultima uguaglianza si è utilizzata la formula di Cartan ([15], pag. 70). Per d^*, si consideri un punto arbitrario $x \in M$ e sia $\theta = ae^1 \wedge \cdots \wedge e^p$ in un intorno di x. È sufficiente verificare che, in x,

$$(-1)^{np+n} * d * \theta = i(e^i)\nabla_{e_i}\theta$$

dove sommiamo si indici ripetuti.
Possiamo sempre scegliere la base locale in modo che sia $\nabla_{e_j}e_i = 0$ in x [25]. Si ha allora, in x,

$$\begin{aligned} *d*\theta &= *(d*(ae^1 \wedge \cdots \wedge e^p)) = *(d(ae^{p+1} \wedge \cdots \wedge e^n)) = \\ &= *(\textstyle\sum_{i=1}^p e_i(a)e^i \wedge e^{p+1} \wedge \cdots \wedge e^n) = \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^p e_i(a)(*(e^i \wedge e^{p+1} \wedge \cdots \wedge e^n)) = \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^p e_i(a)(-1)^{n(p+1)+i-1} e_1 \wedge \cdots \wedge \hat{e}_i \wedge \cdots \wedge e_p = \\ &= (-1)^{n(p+1)} \textstyle\sum_{i=1}^p (e_i(a)i(e^i)(e_1 \wedge \cdots \wedge e_p)) = \\ &= (-1)^{n(p+1)} \textstyle\sum_{i=1}^p i(e^i)\nabla_{e_i}(ae^i \wedge \cdots \wedge e^p) = \\ &= (-1)^{n(p+1)}(i(e^i)\nabla_{e_i}\theta) \end{aligned}$$

e dato che x è arbitrario ne segue che la dimostrazione è completa.

---

[25] Si veda la Proposizione 3

15.8. **Moduli di Clifford $\mathbb{Z}_2$-graduati.**

Sia E un fibrato di moduli di Clifford per la varietà riemanniana (M, g). Diremo che E è $\mathbb{Z}_2$-graduato se esiste $\gamma \in C^\infty(M, \mathrm{End}(E))$ tale che, per ogni $m \in M$, per ogni $\xi_m \in T^*_m M$

$$\gamma^2(m) = \mathrm{Id}_{E_m}\,, \quad c_m(\xi_m) \circ \gamma(m) + \gamma(m) \circ c_m(\xi_m) = 0$$

Se E è $\mathbb{Z}_2$-graduato allora otteniamo una gradazione di E, $E = E^+ \oplus E^-$, con $E^\pm := \{e \in E \,|\, \gamma(e) = \pm e\}$. Supporremo sempre la connessione ∇^E diagonale: $\nabla^E = \nabla^{E^+} \oplus \nabla^{E^-}$; è chiaro allora che l'operatore di Dirac $\not{D} = c \circ \nabla^E$ manda sezioni di $E^\pm$ in sezioni di $E^\mp$, i.e. risulta *dispari* rispetto a tale graduazione. In formule e con ovvia notazione

$$\not{D} = \begin{pmatrix} 0 & \not{D}^- \\ \not{D}^+ & 0 \end{pmatrix}$$

Ad esempio $\Lambda^* M = E$ è graduato da $\gamma\alpha = \alpha$ se α ha grado pari, $\gamma\alpha = -\alpha$ se α ha grado dispari. Quindi $\Lambda^* M = \Lambda^{pari} \oplus \Lambda^{dispari} M$ e l'operatore di Gauss-Bonnet si decompone come

$$d + d^* = \begin{pmatrix} 0 & d + d^*|_{dispari} \\ d + d^*|_{pari} & 0 \end{pmatrix}$$

15.9. **Esempio 2. L'operatore di segnatura D^{sign}.**

Sia M una varietà tale che $\dim M = 2k$. Sia $\tau = (\sqrt{-1})^{p(p-1)+k} *$ con

$$\tau : \Lambda^p_{\mathbb{C}} M \to \Lambda^{n-p}_{\mathbb{C}} M$$

ove $\Lambda^p_{\mathbb{C}} M \equiv \Lambda^p M \otimes \mathbb{C}$. Utilizzando le formula per $*^2$ è immediato verificare che τ definisce una gradazione di $\Lambda^*_{\mathbb{C}} M$, diversa da quella in pari/dispari. Si ha, quindi, $(d + d^*)\tau = -\tau(d + d^*)$. Sia

$$\Lambda^\pm_p M = \{\omega \in \Lambda^*_p M \otimes \mathbb{C} \ : \ \tau\omega = \pm\omega\}$$

Da quanto detto $C^\infty(M, \Lambda^*_{\mathbb{C}} M) = C^\infty(M, \Lambda^+_{\mathbb{C}} M) \oplus C^\infty(M, \Lambda^-_{\mathbb{C}} M)$ e $d + d^*$ è dispari rispetto a questa decomposizione. L'operatore di segnatura D^{sign} è per definizione l'operatore $d + d^*$ *insieme alla gradazione* τ:

$$D^{\mathrm{sign}} := \begin{pmatrix} 0 & d + d^*|_{\Lambda^-} \\ d + d^*|_{\Lambda^+} & 0 \end{pmatrix}$$

Spesso si definisce l'operatore di segnatura come

$$D^{\mathrm{sign},+} = d + d^*|_{\Lambda^+}$$

15.10. **Esempio 3. Operatori di Dirac su una varietà quasi-complessa.**

Cominciamo con una lunga premessa di algebra lineare. Sia V uno spazio vettoriale reale con prodotto scalare $q(,)$. Si supponga che esista $J \in \mathrm{End}(V)$ tale che $J^2 = -\mathrm{Id}$. Possiamo senz'altro assumere che $q(Jv, Jv') = q(v, v')$ (q è J-invariante) perché se $p(\ ,\ )$ è un qualsiasi prodotto scalare, allora $q(\cdot,\cdot) := p(\cdot,\cdot) + p(J\cdot, J\cdot)$ risulta J-invariante. Notiamo che se esiste un tale J allora necessariamente $\dim V \in 2\mathbb{N}$ perché se $\{f_1, \dots, f_m\}$ è una quasiasi base ortonormale di V allora per la matrice A associata a J in questa base si ha $A \in O(m)$ e quindi

$$1 = \det(AA^T) = \det A \,\det A^T = \det A^2 = \det(-\mathrm{Id}) = (-1)^m$$

da cui la tesi. Sia $\{e_1, \dots, e_n, e_{n+1}, \dots, e_{n+n}\}$ una base ortonormale tale che $Je_j = e_{j+n}$ e quindi $Je_{j+n} = -e_j \quad 1 \leq j \leq n$. Non è difficile dimostrare che una tale base esiste sempre [26]. Sia

[26] Basta procedere per induzione. Fissiamo e_1 di norma unitaria: dato che $q(\ ,\ )$ è J-invariante si ha che Je_1 è ortogonale a e_1. Consideriamo lo spazio ortogonale a $\mathrm{Span}(e_1, Je_1)$. Dato che $q(\ ,\ )$ è J-invariante si ha che tale spazio è invariante per J; ora possiamo procedere induttivamente.

$\{e^1, \dots, e^n, e^{n+1}, \dots, e^{n+n}\}$ la base duale. Consideriamo ora $V \otimes \mathbb{C}$ e si estenda J per $\mathbb{C}$-linearità. Si definiscano $V^{1,0}$, $V^{0,1}$ come gli autospazi di J relativi agli autovalori $\pm i$:

$$V^{1,0} = \{v \mid Jv = iv\}, \quad V^{0,1} = \{v \mid Jv = -iv\}$$

e quindi $V \otimes \mathbb{C} = V^{1,0} \oplus V^{0,1}$ con

$$V^{1,0} = \operatorname{Span}_{\mathbb{C}}(e_1 - ie_{1+n}, \dots, e_n - ie_{2n}) \quad V^{0,1} = \operatorname{Span}_{\mathbb{C}}(e_1 + ie_{1+n}, \dots, e_n + ie_{2n})$$

Osserviamo che

$$V^{0,1} = \overline{V^{1,0}}.$$

Estendiamo ora $q(\,,\,)$ a tutto $V \otimes \mathbb{C}$ per $\mathbb{C}$-linearità. Dal fatto che $q(\,,\,)$ è J-invariante segue facilmente che $V^{1,0}$ e $V^{0,1}$. sono sottospazi isotropi [27] massimali mentre $q_{\mathbb{C}} : V^{1,0} \times V^{0,1} \longrightarrow \mathbb{C}$ è non-degenere. In particolare $q_{\mathbb{C}}$ pone $V^{1,0}$ e $V^{0,1}$ in dualità. Notiamo anche che $q_{\mathbb{C}}$ definisce un prodotto hermitiano h_q su $V^{1,0}$ ottenuto componendo la coniugazione nel secondo argomento

$$V^{1,0} \times V^{1,0} \to V^{1,0} \times V^{0,1}$$

con $q_{\mathbb{C}} : V^{1,0} \times V^{0,1} \longrightarrow \mathbb{C}$. Consideriamo ora lo spazio duale $(V \otimes \mathbb{C})^* = (V^{1,0})^* \oplus (V^{0,1})^*$. Da quanto abbiamo appena detto segue che applicazione $V^{1,0} \to (V^{0,1})^*$ che associa a w la forma $q_{\mathbb{C}}(w, \cdot)$ è un isomorfismo. In particolare, se abbiamo un elemento $w \in V^{1,0}$ allora è ben definito il prodotto interno $i(w) : \Lambda^j V^{0,1} \to \Lambda^{j-1} V^{0,1}$.

Lo spazio vettoriale $\Lambda^* V^{0,1}$ è un modulo di Clifford: posto $v = v^{1,0} + v^{0,1}$ poniamo, per definizione,

$$c(v) = \sqrt{2}(\varepsilon(v^{0,1}) - i(v^{1,0})) \tag{65}$$

Notiamo che $e_j = \{(e_j - ie_{j+n}) + (e_j + ie_{j+n})\}/2$ e si verifica da questa decomposizione che $c(e_j)^2 = -1$. In conclusione $\Lambda^* V^{0,1} \equiv \Lambda^{0,*} V$ ha una struttura naturale di modulo di Clifford che è per costruzione unitario.

Sia ora M una varietà reale quasi-complessa, il che vuol dire che esiste $J \in C^\infty(M, \operatorname{End}(TM))$ tale che $J^2 = -\operatorname{Id}_E$; sia g una metrica $J-$invariante. Sia $\nabla^{0,*}$ una connesione su $\Lambda^{0,*} M$; possiamo scegliere questa connessione compatibile con la metrica indotta da g e di Clifford. L'operatore

$$\not{D} := c \circ \nabla^{0,*} : C^\infty(M, \Lambda^{0,*} M) \to C^\infty(M, \Lambda^{0,*} M)$$

è un operatore di Dirac associato ad un fibrato di Clifford. Dunque su ogni varietà quasi-complessa esiste un operatore di Dirac associato ad un fibrato di Clifford.

[27] ciò vuol dire che $q_{\mathbb{C}}|_{V^{1,0}} \equiv 0$ e $q_{\mathbb{C}}|_{V^{0,1}} \equiv 0$

16. **Prime proprietà degli operatori di Dirac. Esempi.**

16.1. **Operatori differenziali.**

Siano E,F due fibrati vettoriali su M. L'applicazione lineare

$$P \ : \ C^\infty(M,E) \to C^\infty(M,E)$$

è un operatore differenziale se per ogni carta banalizzante U comune ad E ed F

$$\chi \ : \ U \to A \subseteq \mathbb{R}^n$$

$$\phi \ : \ E|_U \to A \times \mathbb{C}^n$$

$$\psi \ : \ F|_U \to A \times \mathbb{C}^m$$

ed indicando con $i_U : C_0^\infty(U, E|_U) \hookrightarrow C^\infty(M,E)$ l'immersione delle funzioni a supporto compatto e con $r_U : C^\infty(M,F) \to C^\infty(U, F|_U)$ la restrizione, risulti commutativo il seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccc} C_0^\infty(U,E|_U) & \overset{r_U \circ P \circ i_U}{\longrightarrow} & C^\infty(U,F|_U) \\ \downarrow & & \uparrow \\ C_0^\infty(A, A\times\mathbb{C}^n) & \overset{P_U}{\longrightarrow} & C^\infty(A, A\times\mathbb{C}^m) \end{array}$$

con P_U matrice di operatori differenziali. Si utilizzerà la notazione $P \in \mathrm{Diff}^*(M;E,F)$; $P \in \mathrm{Diff}^k(M;E,F)$ se per ogni banalizzazione non compaiono operatori di ordine superiore a k.

16.2. **Simbolo principale. Ellitticità.**

Se $P \in \mathrm{Diff}^k(M;E,F)$ allora è ben definito

$$\sigma_k(P) \in C^\infty(T^*M, \mathrm{Hom}(\pi^*E, \pi^*F))$$

detto simbolo principale dell'operatore P. Per definirlo procediamo come segue.

Sia $(x,\xi) \in T^*M$ ed $e_x \in E_x$; introduciamo $f \in C^\infty(M)$ ed $e \in C^\infty(M,E)$ tali che $df|_x = \xi$ e $e(x) = e_x$. Definiamo $\sigma_k(P)(x,\xi) \in \mathrm{Hom}(E_x,F_x)$ come segue :

$$\sigma_k(P)(x,\xi)(e_x) = i^k \frac{1}{k!} P((f - f(x))^k e)(x)$$

Si verifica che $\sigma_k(P)(x,\xi)$ non dipende dalle scelte fatte e che è un'applicazione lineare da $E_x \to F_x$. In una banalizzazione locale si ha:

$$\sigma_k\left(\sum_{|\alpha|\le k} a_\alpha(ij)\left(\frac{1}{\sqrt{-1}}\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1}\cdots\left(\frac{1}{\sqrt{-1}}\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n}\right)(x,\xi) =$$

$$\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(ij)(\xi^1)^{\alpha_1}\dots(\xi^n)^{\alpha_n}$$

Nelle formule precedenti abbiamo denotato con

$$\sum_{|\alpha|\le k} a_\alpha(ij)\left(\frac{1}{\sqrt{-1}}\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1}\cdots\left(\frac{1}{\sqrt{-1}}\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n}$$

la componente al posto (ij) nella matrice P_U.

Valgono le seguente proprietà [28]:
(1) il simbolo principale definisce un'applicazione

$$\sigma_k : \mathrm{Diff}^k(M;E,F) \to C^\infty(T^*M, \mathrm{Hom}(\pi^*E, \pi^*F))$$

con nucleo uguale a $\mathrm{Diff}^{k-1}(M;E,F)$. Esiste quindi una successione esatta

$$0 \to \mathrm{Diff}^{k-1}(M;E,F) \to \mathrm{Diff}^k(M;E,F) \xrightarrow{\sigma_k} C^\infty(T^*M, \mathrm{Hom}(\pi^*E, \pi^*F)) \tag{66}$$

(2) se $P \in \mathrm{Diff}^k(M;E,F)$ e $Q \in \mathrm{Diff}^m(M;F,G)$ allora $PQ \in \mathrm{Diff}^{m+k}(M;E,G)$ e

$$\sigma_{k+m}(PQ) = \sigma_k(P)\sigma_m(Q)\,. \tag{67}$$

Definizione 21. P è ellittico se $\forall\ (x,\xi) \neq 0 \in T^*M$

$$\sigma_k(P)(x,\xi) \ \in \ \mathrm{Iso}(E_x, F_x)$$

Sia per semplicità M compatta. Siano $<,>_E$, $<,>_F$ metriche hermitiane su E ed F rispettivamente. Si costruisca il prodotto scalare

$$(u,u')_E = \int_M < u, u' >_E \mathrm{dvol} \quad \forall u, u' \in C^\infty(M,E)$$

e analogamente per F. L'operatore $P\ :\ C^\infty(M,E) \to C^\infty(M,F)$ ammette un aggiunto formale $P^*\ :\ C^\infty(M,F) \to C^\infty(M,E)$ se vale

$$(Pu,v)_F = (u,P^*v)_E\ \forall u \in C^\infty(M,E)\ \forall u \in C^\infty(M,F)$$

Se $P \in \mathrm{Diff}^k(M;E,F)$ allora non è difficile dimostrare riducendosi a carte locali ed integrando per parti [29] che esiste ed è unico $P^* \in \mathrm{Diff}^k(M;F,E)$ ed inoltre:

$$\sigma_k(P^*) = \sigma_k(P)^*$$

Si ha anche

$$(P \circ Q)^* = Q^* \circ P^*\,.$$

16.3. **Gli operatori di Dirac sono ellittici.**

Dopo queste generalità sugli operatori differenziali vogliamo ora calcolare il simbolo principale per l'operatore di Dirac che è ovviamente un operatore differenziale di ordine 1. Sappiamo che in una carta locale

$$\not{D} = \sum c(dx^j)\nabla_j.$$

Ora, $\nabla_j = \partial/\partial x_j + A$, dove A è di grado 0. Quindi $\sigma_1(\nabla_j)(x,\xi) = \sqrt{-1}\xi^j$. Dunque si ha:

$$\sigma_1(\not{D})(x,\xi) = \sum c(dx^k)(\sqrt{-1})\xi^k =$$
$$= (\sqrt{-1})c(\xi^k dx^k) = (\sqrt{-1})c(\xi)$$

In definitiva:

$$\sigma_1(\not{D})(x,\xi) = (\sqrt{-1})c(\xi)$$

da cui segue che $\not{D}$ è ellittico. Inoltre

$$\sigma_2(\not{D}^2)(x,\xi) = (\sigma_1(\not{D})(x,\xi))^2 = -c(\xi)^2 = g_x(\xi,\xi)\mathrm{Id}_{E_x} \equiv ||\xi||_x^2 \mathrm{Id}_{E_x}$$

e dunque anche $\not{D}^2$ è un operatore ellittico.

---

[28] Tutte piuttosto semplici e lasciate per esercizio; consultate il Wells, Capitolo 4, Sezione 2 se avete problemi

[29] di nuovo, consultate il Wells, Capitolo 4, Sezione 2 se avete problemi a produrre queste dimostrazioni

16.4. **Laplaciani generalizzati.**

Sia $P \in \mathrm{Diff}^2(M; E, E)$ con E fibrato hermitiano . Si dirà che P è un *laplaciano generalizzato* se

$$\sigma_2(P)(x,\xi) = ||\xi||_x^2 \mathrm{Id}_{E_x}$$

Scriveremo brevemente $\sigma_2(P)(x,\xi) = ||\xi||_x^2$. Da quanto sopra segue che se DR è un operatore di Dirac allora $\not{D}^2$ è un laplaciano generalizzato. Localmente P ammetterà la seguente espressione:

$$P = -g^{ij} \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} + (\text{ordine } 1) \; + \; (\text{ordine } 0)$$

Ad esempio in $\mathbb{R}^n$, con la metrica piatta:

$$P = -\sum \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)^2 \equiv \sum \left(\frac{1}{\sqrt{-1}} \frac{\partial}{\partial x^i} \right)^2$$

è un laplaciano generalizzato. Si noti il segno $-$.

16.5. **Gli operatori di Dirac sono formalmente autoaggiunti.** .

Proposizione 11. *Sia E un modulo di Clifford hermitiano e sia $\not{D}$ un opertore di Dirac:*

(68) $$\not{D} \equiv c \circ \nabla^E : C^\infty(M, E) \longrightarrow C^\infty(M, E)$$

Se l'azione di Clifford è unitaria e ∇^E è una connessione di Clifford, allora l'operatore di Dirac è formalmente autoaggiunto:

(69) $$(\not{D}s, s') = (s, \not{D}s') \quad \forall \; s, s' \in \mathcal{C}^\infty(M, E)$$

Dimostrazione. Per definizione

$$(s, s') = \int_M < s, s' > dvol \, .$$

Sappiamo che, per il teorema della divergenza (64),

(70) $$\int_M (d^*\omega) dvol = 0 \quad \forall \omega \in \Omega^1(M)$$

Basta quindi verificare che

(71) $$< \not{D}s, s' > - < s, \not{D}s' >= d^*\omega \quad \text{ per qualche } \omega \in \Omega^1(M)$$

Si scelga una base locale ortonormale e_i tale che $\nabla_{e_i} e_j = 0$ in $m \in M$: si ha, in m,

$$\begin{aligned} &< \not{D}s, s' > - < s, \not{D}s' >= \\ &=< \sum c(e^\alpha) \nabla^E_{e_\alpha} s, s' > - < s, \sum c(e^\alpha) \nabla^E_{e_\alpha} s' >= \\ &= \sum e_\alpha < c(e^\alpha)s, s' > \end{aligned}$$

dove si è usato il fatto che la connessione è di Clifford e l'azione unitaria. Sia ora $\omega \in \Omega^1(M)$ definita come segue:

(72) $$\omega(X) = - < c(X^*)s, s' >$$

allora, in $m \in M$ vale la seguente uguaglianza:

$$\begin{aligned} d^*\omega &= -\sum i(e^\alpha) \nabla_{e_\alpha} \omega = \\ &= -\sum (\nabla_{e_\alpha} \omega)(e_\alpha) = \sum e_\alpha(\omega(e_\alpha)) \end{aligned}$$

Nell'ultimo passaggio abbiamo utilizzato la scelta particolare di base locale ortonormale e la definizione di connessione sul fibrato cotangente:

$$(\nabla_X \theta)(Y) = X(\theta(Y)) - \theta(\nabla_X Y) \tag{73}$$

Abbiamo in definitiva dimostrato che $< D\!\!\!/ s, s' > - < s, D\!\!\!/ s' >= d^* \omega$ che è quanto basta per concludere.

16.6. **Ancora un (lungo) commento sulle varietà complesse. Varietà di Kähler.**

Abbiamo visto come sia possibile definire un operatore di Dirac su una varietà reale quasi-complessa. Supponiamo ora che M sia complessa. Sia J la naturale struttura quasi-complessa indotta su TM. Se h è una metrica hermitiana su M abbiamo visto come la parte reale di h definisca una metrica reale su TM e che tale metrica risulta essere J-invariante. Viceversa, se g è una metrica riemanniana J-invariante, allora possiamo definire una metrica hermitiana h su M ponendo $h(\ ,\ ) = g(\ ,\ ) + ig(\ , J\ )$ [30]. Sia quindi g una metrica J-invariante su TM e sia h la metrica hermitiana associata su M. Sia ω la forma di Kähler associata. La metrica hermitiana h induce un prodotto scalare $<,>$ su ogni $\Lambda^{p,q}(M)$: se $h = \sum_j \phi_j \otimes \overline{\phi_j}$, dove $\{\phi_j\}$ sono ortonormali, allora dichiariamo i vettori

$$\phi_{i_1} \wedge \cdots \wedge \phi_{i_p} \wedge \overline{\phi_{j_1}} \wedge \cdots \wedge \overline{\phi_{j_q}}$$

ortonormali e di lunghezza 2^{p+q}. Possiamo estendere questo prodotto scalare a tutto $\Lambda^*(T^*M \otimes \mathbb{C})$ dichiarando $\Lambda^{p,q}(M) \perp \Lambda^{s,t}(M)$ se $(p,q) \neq (s,t)$. Abbiamo allora in $C^\infty(M, \Lambda^{p,q}(M))$, e quindi in $C^\infty(M, \Lambda^*(T^*M \otimes \mathbb{C}))$, un prodotto scalare L^2:

$$(\alpha, \beta) := \int_M < \alpha(p), \beta(p) > d\mathrm{vol}_g = \int_M < \alpha(p), \beta(p) > \frac{\omega^n}{n!}$$

Possiamo anche definire l'operatore $* : \Lambda^{p,q}(M) \to \Lambda^{n-p,n-q}(M)$: utilizzando un'ovvia notazione con i multi-indice:

$$*(\sum_{I\overline{J}} \eta_{I\overline{J}} \phi_I \wedge \overline{\phi_J}) := 2^{p+q-n} \sum_{I\overline{J}} \epsilon_{I\overline{J}} \overline{\eta_{I\overline{J}}} \phi_{I^0} \wedge \overline{\phi_{J^0}}$$

dove I^0 J^0 sono gli indici complementari e $\epsilon_{I\overline{J}}$ è il segno della permutazione

$$\{1, \ldots, n, 1', \ldots, n'\} \to \{i_1, \ldots, i_p, j_1, \ldots, j_q, i_1^0, \ldots, i_{n-p}^0, j_1^0, \ldots, j_{n-q}^0\}$$

Si può verificare che $** = (-1)^{p+q}$. Utilizzando il teorema di Stokes si verifica senza particolari difficoltà che l'operatore $- * \overline{\partial} *$ è l'aggiunto formale $\overline{\partial}^*$ di $\overline{\partial}$. Consideriamo l'operatore

$$\sqrt{2}(\overline{\partial} + \overline{\partial}^*) : C^\infty(M, \Lambda^{0,*}M) \to C^\infty(M, \Lambda^{0,*}M)$$

e notiamo che esso è in maniera ovvia un operatore formalmente autoaggiunto. Non è difficile dimostrare (sarà un esercizio per casa) che il simbolo principale di $\sqrt{2}(\overline{\partial} + \overline{\partial}^*)$ è dato da

$$\sigma_1 \left(\overline{\partial} + \overline{\partial}^* \right) (\xi_x) \;=\; \epsilon(\xi_x^{0,1}) - i(\xi_x^{1,0})\,.$$

Ne segue che se fissiamo una connessione ∇ su $(T^{0,1})^*$ (e quindi la connessione indotta $\nabla^{0,*}$ su $\Lambda^{0,*}M$) e se consideriamo l'operatore di Dirac associato all'azione di Clifford introdotta nell'Esempio 3, allora

$$D\!\!\!/ = \sqrt{2}(\bar{\partial} + \bar{\partial}^*) + A \quad \text{con} \quad A \in C^\infty(M, \mathrm{End}(\Lambda^{0,*}M))\,,\ A = A^*. \tag{74}$$

[30]questa metrica hermitiana coincide con la metrica hermitiana h_g introdotta nella sottosezione 15.10 a meno di un fattore 2.

Si noti che, in generale, la connessione di Levi-Civita complessificata:

$$\nabla^{LC,\mathbb{C}} : C^\infty(M, TM \otimes \mathbb{C}) \to C^\infty(M, T^*M \otimes (TM \otimes \mathbb{C}))$$

non rispetta la decomposizione $TM \otimes \mathbb{C} = T^{1,0}M \oplus T^{0,1}M$. Sia ω la forma di Kähler associata alla metrica hermitiana h. ω è una $(1,1)$-forma reale ed è definita positiva nel senso seguente:

$$\frac{1}{\sqrt{-1}}\omega(v, \overline{v}) > 0 \quad v \neq 0.$$

Infatti, abbiamo visto che localmente

$$\omega = \frac{\sqrt{-1}}{2} \sum_{ij} h_{ij} dz^i \wedge d\overline{z}^j$$

e quindi il risultato segue direttamente dal fatto che h è un prodotto scalare hermitiano. Osserviamo che, viceversa, una $(1,1)$-forma di questo tipo definisce una metrica hermitiana (basta porre $h(v,w) := 2[\omega(w, iv) + i\omega(w, v)]$).

Definizione 22. Una varietà complessa M è detta di tipo Kähler se ammette una metrica hermitiana la cui forma di Kähler è *chiusa.*
Una varietà complessa hermitiana (M, h) è di Kähler se la forma di Kähler associata a h è chiusa.

Supponiamo che (M, h) sia di Kähler: dato che il prodotto esterno di ω con se stessa n-volte è una forma di volume, si ha

$$\int_M \omega \wedge \cdots \wedge \omega \neq 0\,. \tag{75}$$

Ne segue che ω non è mai esatta e quindi $[\omega] \neq 0$ in $H^2_{\mathrm{dR}}(M)$. In effetti, se fosse $\omega = d\eta$ allora, per il Teorema di Stokes,

$$m!\mathrm{Vol}(M) = \int_M \omega^m = \int d\eta \wedge \omega^{m-1} = \int_M d(\eta \wedge \omega^{m-1}) = 0$$

il che è assurdo.

Proposizione 12. *Sia M complessa, e sia $g(\, , \,)$ una metrica J-invariante. Sia c l'azione di Clifford su $\Lambda^{0,*}M$ introdotta nell'Esempio 3, si veda* (65). *Sia ∇^{LC} la connessione di Levi-Civita e sia $\nabla^{LC,\mathbb{C}}$ la sua estensione per $\mathbb{C}$-linearità a $TM \otimes \mathbb{C}$. Sia h la metrica hermitiana definita da g. Allora*

- *(M, h) è di Kähler se e solo se $\nabla^{LC,\mathbb{C}}$ rispetta la decomposizione $TM \otimes \mathbb{C} = T^{1,0}M \oplus T^{0,1}M$.*
- *Se (M, h) è di Kälher allora la connessione $\nabla^{0,*}$ indotta su $\Lambda^{0,*}M$ da $\nabla^{LC,\mathbb{C}}|_{T^{0,1}M}$ è una connessione di Clifford.*
- *Se (M, h) è di Kälher allora $\sqrt{2}(\bar{\partial} + \bar{\partial}^*) = \not{D}$, con $\not{D}$ definito dall'azione di Clifford* (65) *e dalla connessione $\nabla^{0,*}$.*

La dimostrazione della Proposizione è omessa; non è particolarmente difficile (il terzo punto ha dimostrazione della stessa difficoltà di quella che stabilisce il fatto che $d + d^*$ è uguale all'operatore di Gauss-Bonnet).
Concludendo: su una varietà di Kähler l'operatore $\sqrt{2}(\bar{\partial} + \bar{\partial}^*)$ è un operatore di Dirac associato ad un modulo di Clifford unitario con connessione di Clifford.

Se M è complessa ma non di Kähler allora $\sqrt{2}(\bar{\partial} + \bar{\partial}^*)$ è un operatore che differisce da un operatore di Dirac $\not{D}$ associato ad un'azione di Clifford unitaria e ad una connessione di Clifford per un operatore di ordine 0:

$$\not{D} - \sqrt{2}(\bar{\partial} + \bar{\partial}^*) = A \quad \text{con} \quad A \in C^\infty(M, \mathrm{End}(\Lambda^{0,*}M))\,,\ A = A^*.$$

Analogamente, sia E un fibrato olomorfo hermitiano su una varietà di Kähler M e sia ∇^E la connessione complessa compatibile con la metrica. Abbiamo definito $\bar{\partial}_E$. Consideriamo $\Lambda^{0,*}M \otimes E$; è un modulo di Clifford unitario rispetto all'azione $c \otimes \mathrm{Id_E}$. Consideriamo la connessione prodotto tensoriale di $\nabla^{0,*}$ e ∇^E. Questa connessione è di Clifford; otteniamo quindi un operatore di Dirac che risulta essere proprio $\sqrt{2}(\bar{\partial}_E + \bar{\partial}_E^*)$.

Se M è solo complessa, allora esiste un operatore di Dirac $\not{D}_E$ su $\Lambda^{0,*}M \otimes E$ per il quale quest'ultimo è un fibrato di Dirac e

$$\not{D}_E - \sqrt{2}(\bar{\partial}_E + \bar{\partial}_E^*) = B \quad \text{con} \quad B \in C^\infty(M, \mathrm{End}(\Lambda^{0,*}M \otimes E))\,,\ B = B^*.$$

Riassumendo: se M è complessa ed $E \to M$ è un fibrato olomorfo allora esiste un operatore di Dirac $\not{D}_E$ associato ad un fibrato di Dirac su $\Lambda^{0,*}M \otimes E$ con la proprietà che

$$\sqrt{2}(\bar{\partial}_E + \bar{\partial}_E^*) = \not{D}_E + C \quad \text{con} \quad C \in C^\infty(M, \mathrm{End}(\Lambda^{0,*}M \otimes E))\,,\ C = C^*. \tag{76}$$

Esempio . Sia $M = \mathbb{C}P^n$ e sia $\pi : \mathbb{C}^{n+1} - \underline{0} \to \mathbb{C}P^n$ la proiezione canonica. Sia U un intorno aperto e sia $Z : U \to \mathbb{C}^{n+1} - \underline{0}$ un'applicazione olomorfa tale che $\pi \circ Z = \mathrm{Id}$. Ad esempio, se $U \equiv U_j = \{[z_0, \ldots, z_n] \,|\, z_j \neq 0\}$ allora possiamo scegliere $Z = s^j$

$$s^j([z_0, \ldots, z_n]) = (\frac{z_0}{z_j}, \ldots, \frac{z_{j-1}}{z_j}, 1, \frac{z_{j+1}}{z_j} \ldots, \frac{z_n}{z_j}) \tag{77}$$

Definiamo una (1,1)-forma su U come segue:

$$\omega_U = \frac{i}{2\pi}\partial\overline{\partial}\log||Z||^2\,.$$

Si verifica senza difficoltà che ω non dipende dalla particolare scelta di sezione locale olomorfa $Z : U \to \mathbb{C}^{n+1} - \underline{0}$. Infatti, se Z' è un'altra sezione, allora $Z' = fZ$ con f olomorfa mai nulla. Si ha allora:

$$\frac{i}{2\pi}\partial\overline{\partial}\log||Z'||^2 = \omega + \frac{i}{2\pi}\partial\overline{\partial}\log f - \frac{i}{2\pi}\overline{\partial}\partial\log\overline{f} = \omega + 0 + 0 = \omega$$

Rimane quindi definita una forma ω su tutta la varietà. Se, ad esempio, $U = U_0$ con coordinate $(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$, la forma ω può essere scritta come segue prendendo $Z = s^0$:

$$\omega = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\left[\frac{\sum d\zeta_j \wedge d\overline{\zeta}_j}{1 + \sum \zeta_j\overline{\zeta}_j} - \frac{(\sum \overline{\zeta}_j d\zeta_j) \wedge (\sum \zeta_j d\overline{\zeta}_j)}{(1 + \sum \zeta_j\overline{\zeta}_j)^2}\right]$$

Si noti che ω è reale. Inoltre, la forma hermitiana associata a questa forma è definita positiva. Infatti, dall'espressione appena data possiamo scrivere la matrice associata a tale forma hermitiana (i.e., la forma hermitiana definita dall'espressione nelle parentesi quadre), calcolata nel punto di coordinate ζ, come una funzione strettamente positiva moltiplicata per la matrice

$$\alpha_{ij}(\zeta) = (1 + \|\zeta\|^2)\delta_{ij} - \overline{\zeta}_i\zeta_j\,.$$

Dimostriamo che per ogni ζ questa matrice è definita positiva. Per ogni n-pla $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^n$ si ha:

$$\overline{\mathbf{u}}^t\,(\alpha_{ij}(\zeta))\mathbf{u} = (1 + \|\zeta\|^2)\mathbf{u}\overline{\mathbf{u}}^t - (\overline{\zeta}\mathbf{u}^t)(\zeta\overline{\mathbf{u}}^t)$$

e l'ultima espressione può essere scritta come

$$\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{u}\|^2\|\zeta\|^2 - (\overline{\zeta}, \overline{\mathbf{u}})(\zeta, \mathbf{u})$$

dove la norma ed il prodotto hermitiano sono quelli canonici in $\mathbb{C}^n$. Da Cauchy-Schwarz deduciamo che questa quantità è > 0 per ogni $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$. Riassumendo: ω è definita positiva e definisce quindi una metrica, *la metrica di Fubini-Study.* Scriveremo anche ω_{FS}. Si noti che ω è chiusa perché localmente risulta $\omega = i/4\pi(d(\partial - \overline{\partial}) \log ||Z||^2)$. Ne segue che $\mathbb{C}P^n$ **è una varietà di tipo Kähler** e che $(\mathbb{C}P^n, \omega_{\mathrm{FS}})$ **è una varietà di Kähler.** .

È importante osservare che sottovarietà **complesse** di varietà di Kähler sono di Kähler rispetto alla metrica indotta: infatti se (M, h) è di Kähler e Z è una sottovarietà complessa, allora detta $j : Z \to M$ l'inclusione, si ha che j^*h è una metrica hermitiana su Z con forma di Kähler $j^*\omega_M$; ma allora

$$d_Z(j^*\omega_M) = j^*(d_M\omega_M) = 0$$

da cui l'asserto. Scopriamo allora che **le varietà algebriche proiettive lisce sono di Kähler.**

Esempio. Sia L il fibrato tautologico. L eredita una metrica hermitiana h dalla metrica banale in $\mathbb{C}P^n \times \mathbb{C}^{n+1}$. Lo abbiamo visto nel caso $n = 1$ nell'esempio 2 della sottosezione 10.2. Sia ∇ la connessione complessa compatibile con tale metrica. Scrivendo l'espressione locale di h e quella di $c_1(L, \nabla)$ in funzione di una base locale olomorfa ci accorgiamo, come nell'esempio fatto esplicitamente nel caso $n = 1$, che

$$c_1(L, \nabla) = -\omega_{\mathrm{FS}} .$$

Da quanto detto ne segue che $c_1(L)$ non è zero in $H^2(\mathbb{C}P^1)$. Inoltre

$$\int_{\mathbb{C}P^n} (-c_1(L))^n \neq 0.$$

Di fatto si può calcolare esplicitamente questo integrale e si ottiene

$$\int_{\mathbb{C}P^n} (-c_1(L))^n = 1.$$

Utilizzando questa informazione ed un pò di variabile complessa si può dimostrare che

$$Td(\mathbb{C}P^n) := \int_{\mathbb{C}P^n} Td(T^{1,0}\mathbb{C}P^n) = 1 , \qquad L(\mathbb{C}P^{2n}) := \int_{\mathbb{C}P^{2n}} L(T\mathbb{C}P^{2n}) = 1$$

17. **Spinori e operatore spin-Dirac**

17.1. **Chiralità. Il modulo degli spinori.**

Sia V uno spazio vettoriale reale orientato con prodotto scalare $q(\,,\,)$ definito positivo. Consideriamo l'algebra complessa $\mathbb{C}l(V,q) := Cl(V,q)\otimes\mathbb{C}$. Poniamo per brevità $\mathbb{C}l(V) := \mathbb{C}l(V,q)$ e $Cl(V) := Cl(V,q)$. Se fissiamo una base ortonormale $\{e_1,\dots,e_{\dim V}\}$ di V, possiamo considerare

$$\Gamma = \sqrt{-1}^{\left[\frac{\dim V+1}{2}\right]}e_1\dots e_{\dim V}\in\mathbb{C}l(V)\,.$$

Tale elemento è detto operatore di *chiralità* e non dipende dalla scelta della base. Si ha

- $\Gamma^2 = 1$
- se $\dim V$ è pari, $\Gamma v = -v\Gamma\ \forall v\in V$;
- se $\dim V$ è dispari, $\Gamma v = v\Gamma\ \forall v\in V$.

Notiamo che se V ha dimensione pari ed E è un modulo di Clifford complesso, allora E eredita in maniera naturale una $\mathbb{Z}_2$-graduazione:

$$E^{\pm} := \{e\in E \mid \Gamma e = \pm e\}\,.$$

Teorema 14. *Sia (V,q) uno spazio vettoriale reale euclideo orientato di dimensione pari. Esiste a meno di isomorfismi un unico spazio vettoriale complesso $\mathbb{Z}_2$-graduato $S = S^+\oplus S^-$, detto il modulo degli spinori, tale che*

$$\mathbb{C}l(V)\simeq \mathrm{End}(S)\,. \tag{78}$$

In particolare, $\dim S = 2^{\dim V/2}$, $\dim S^{\pm} = 2^{\dim V/2-1}$*. Inoltre, S può essere dotato di un prodotto hermitiano per il quale l'azione di $\mathbb{C}l(V)$ è unitaria e $S^+\perp S^-$.*

Dimostrazione. Sia $2n$ la dimensione di V. Osserviamo che essendo V di dimensione pari, V ammette sempre una stuttura complessa $J\in\mathrm{End}(V)$ tale quindi che $J^2=-1$. Per dimostrare l'esistenza di J basta fissare una qualsiasi base, ad esempio una base ortonormale

$$\{e_1,\dots,e_n,e_{n+1},\dots,e_{n+n}\}$$

e definire J mandando $e_\ell\to e_{\ell+n}$ e $e_{\ell+n}\to -e_\ell$ per $1\le\ell\le n$. Notiamo che J può essere scelto compatibile con il prodotto scalare di V: $q(Jv,Jv') = q(v,v')$ (basterà prendere la base $\{e_1,\dots,e_n,e_{n+1},\dots,e_{n+n}\}$ ortonormale). Siamo ora nella situazione che si è già presentata quando abbiamo studiato l'operatore di Dirac associato ad una struttura quasi-complessa su una varietà reale.
Possiamo quindi estendere J e q a $V\otimes\mathbb{C}$; otteniamo una decomposizione $V\otimes\mathbb{C} = V^{(1,0)}\oplus V^{(0,1)}$ con $V^{(1,0)} = \{v\in V\otimes\mathbb{C} : J_{\mathbb{C}}(v) = iv\}$ e analogamente per $V^{(0,1)}$. Sappiamo già che questi due sottospazi sono una coppia di sottospazi trasversi isotropi di dimensione massima [31]. Sappiamo anche che tramite $q_{\mathbb{C}}$ possiamo identificare $V^{(0,1)}$ con $(V^{(1,0)})^*$.
Definiamo ora $S := \Lambda V^{1,0}$. Se $v\in V$ allora $v = v^{(1,0)} + v^{(0,1)}$. Definiamo un'azione di v su S come segue

$$c(v)s = \sqrt{2}\epsilon(v^{(1,0)})s - \sqrt{2}\mathrm{int}(v^{(0,1)})s \tag{79}$$

dove $\mathrm{int}(v^{(0,1)})$ è la moltipliazione interna per $v^{(0,1)}\in V^{(0,1)} = (V^{(1,0)})^*$. Sappiamo che questa azione si estende ad una rappresentazione

$$\mathbb{C}\mathrm{l}(V)\to\mathrm{End}(S).$$

[31] dove vi ricordo che un sottospazio P è isotropo se $q_{\mathbb{C}}(p_1,p_2) = 0\ \forall p_1,p_2\in P$.

Notiamo ora che i due spazi hanno la stessa dimensione e che l'applicazione è iniettiva: infatti, se α è un arbitrario elemento di $\mathbb{C}\mathrm{l}(V)$ allora non è difficile trovare un vettore $w_\alpha \in S$ tale che $c(\alpha)(w_\alpha)$ ha una componente di grado 0 uguale ad uno scalare non-nullo (esercizio). Quindi nessun elemento di $\mathbb{C}\mathrm{l}(V)$ agisce come l'applicazione nulla. Si può anche verificare che la $\mathbb{Z}_2$-graduazione naturale di S (forme pari/dispari) coincide con quella data dall'operatore di chiralità Γ [32]. L'unicità di S segue dal fatto che l'algebra degli endomorfismi di uno spazio vettoriale è *semplice*, i.e. ha un'unica rappresentazione irriducibile a meno di isomorfismi. Abbiamo anche visto che S eredita un prodotto hermitiano ed è immediato verificare che l'azione è unitaria (o, equivalentemente, anti-hermitiana); ciò segue dalla definizione (79) e dalle proprietà del prodotto esterno e del prodotto interno.

Osservazioni.
1. Abbiamo quindi scoperto che le algebre di Clifford complesse per spazi vettoriali di dimensione pari sono semplicemente algebre di matrici: se $\dim V = 2n$

$$\mathbb{C}l(V) \simeq M_{2^n \times 2^n}(\mathbb{C})\,. \tag{80}$$

2. Sia ora V di dimensione dispari uguale a $2n+1$ e sia W un sottospazio di codimensione 1. Sia $(W)^\perp = \mathbb{R}e_{2n+1}$. Consideriamo la decomposizione $V = W \oplus (W)^\perp$ e sia $\{e_1, \ldots, e_{2n},\} \cup \{e_{2n+1}\}$ una base ortonormale di $V = W \oplus (W)^\perp$. L'applicazione $f : W \to Cl(V,q)^0$ che manda e_ℓ in $e_\ell \cdot e_{2n+1}$ per $\ell \leq 2n$ è tale che $f(e_j)f(e_i) + f(e_i)f(e_j) = -2\delta_{ij}$ e si estende quindi ad un'applicazione di algebre $Cl(W, q\big|_W) \to Cl(V,q)^0$ che risulta essere un isomorfismo. Ne deduciamo che nel caso di dimensione dispari, $\dim V = 2n+1$, si ha un isomorfismo di algebre

$$\mathbb{C}l(V) \simeq M_{2^n \times 2^n}(\mathbb{C}) \oplus M_{2^n \times 2^n}(\mathbb{C}) \tag{81}$$

dove abbiamo utilizzato la decomposizione $\mathbb{C}l(V) = Cl(V,q)^0 \oplus Cl(V,q)^1$ e l'isomorfismo naturale $Cl(V,q)^0 \simeq Cl(V,q)^1$ indotto dalla moltiplicazione di Clifford per un vettore non-nullo.

17.2. Il gruppo Spin.

Sia V uno spazio vettoriale euclideo orientato, $\dim V \geq 2$, con prodotto scalare q. Consideriamo il sottoinsieme di $Cl(V,q)$

$$Pin(V) = \{a \in Cl(V,q) \mid a = \eta_1 \cdots \eta_l, \eta_j \in V, \parallel \eta_j \parallel^2 = 1\}$$

dove $\parallel \eta \parallel^2 = q(\eta,\eta)$. Tale insieme ha una struttura di gruppo perchè:

$$(\eta_1 \cdots \eta_l)^{-1} = \eta_l \cdots \eta_1 (-1)^l$$

Definiamo ora il gruppo:

$$Spin(V) = Pin(V) \cap Cl^0(V,q)$$

pertanto

$$Spin(V) = \{\eta_1 \cdots \eta_{2l}, \parallel \eta_j \parallel = 1\}$$

dove

$$(\eta_1 \cdots \eta_{2l})^{-1} = \eta_{2l} \cdots \eta_1$$

$Pin(V)$ e $Spin(V)$ ereditano una topologia dallo spazio ambiente (che è l'algebra $Cl(V,q)$) che li rende gruppi topologici.

Consideriamo l'operazione di trasposizione sull'algebra tensoriale

$$(v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_k)^T = v_k \otimes v_{k-1} \otimes \cdots \otimes v_1.$$

[32] infatti con qualche semplice conto (consultate Berline-Getzler-Vergne se avete problemi) si verifica che se $\alpha \in \Lambda^k V^{0,1}$ allora $\Gamma\alpha = (-1)^k\alpha$.

L'ideale $\mathcal{J}_q$ che, per passaggio al quoziente, definisce $Cl(V,q)$ è stabile rispetto all'operazione di trasposizione e quindi la trasposizione passa al quoziente $T(V)/\mathcal{J}_q = Cl(V,q)$. Notare che per gli elementi $a \in Spin(V)$ si ha $a^{-1} = a^T$.
Definiamo ora un'azione di $Pin(V)$ su $Cl(V,q)$: sia $w \in Pin(V)$, $x \in Cl(V,q)$:

$$\rho(w)(x) := wxw^T.$$

È chiaro che $\rho(w)$ è un'applicazione lineare di $Cl(V,q)$ in se stesso [33]. Inoltre $\rho(w_1w_2) = \rho(w_1) \circ \rho(w_2)$; infatti $\forall x \in Cl(V,q)$

$$\rho(w_1w_2)(x) = (w_1w_2)x(w_1w_2)^T = w_1w_2x(w_2^Tw_1^T) = \tag{82}$$

$$w_1(w_2xw_2^T)w_1^T = \rho(w_1)(\rho(w_2)(x)) = (\rho(w_1) \circ \rho(w_2))(x)\,. \tag{83}$$

Quest'azione trasforma $V \hookrightarrow Cl(V,q)$ in se stesso; infatti siano dati $x \in V$, $w \in V$, $\parallel w \parallel = 1$, allora

$$\rho(w)(x) = \mathcal{R}_w(x)$$

dove $\mathcal{R}_w$ è la riflessione rispetto a $(\mathbb{R}w)^\perp$. Verifichiamolo: per ogni $x \in V$, $x = \alpha w + \beta w'$, con $w' \in (\mathbb{R}w)^\perp$. Allora $q(w,w') = 0$ e quindi $ww' = -w'w$; ne segue:

$$\rho(w)(x) = w(\alpha w + \beta w')(w) = (-\alpha - \beta w'w)(w) = -\alpha w + \beta w' = \mathcal{R}_w(x)$$

Ne segue che

$$\rho(\eta_1 \cdots \eta_j) = \mathcal{R}_{\eta_1} \circ \cdots \circ \mathcal{R}_{\eta_j}$$

anche lascia fisso V. Concludiamo che per ogni $w \in Spin(V)$, $\rho(w)$ trasforma V in se stesso ed agisce su V come un elemento di $SO(V)$ (si hanno un numero pari di riflessioni). Da ciò segue che:

$$\rho : Spin(V) \longrightarrow SO(V)$$

e che $\rho(\,)$ è un omomorfismo di gruppi. Vediamo anche che ρ è suriettiva per una nota proprietà delle trasformazioni ortogonali speciali (una conseguenza del Teorema spettrale):
se $P \in SO(V)$ allora $P = R_{\eta_1} \cdots R_{\eta_{2p}}$ con la condizione $2p \leq dimV$.
Quindi per un tale $P \in SO(V)$ si ha che $P = \rho(\eta_1 \cdots \eta_{2p})$. A questo punto possiamo studiare il Kerρ. A tal fine, enunciamo senza dimostrazione una caratterizzazione del centro di $Cl(V,q)$, $Z(Cl(V,q))$ [34].

Lemma 5. Valgono i seguenti risultati:
(i) Se $dimV = 2m$ allora $Z(Cl(V,q)) = \mathbb{R} \cdot 1$;
(ii) Se $dimV = 2m+1$ allora $Z(Cl(V)) = Span(1, \xi_1 \cdots \xi_{2m+1})$.

Osservazione. Dall'ultima relazione si vede che nel caso di dimensione dispari:

$$Z(Cl(V)) \cap Cl^0(V) = \mathbb{R} \cdot 1$$

Sia ora $w \in \text{Ker}\rho$; allora $\forall x \in V$:

$$\begin{cases} w \cdot w^T & = & 1 \\ w \cdot x \cdot w^T & = & x \end{cases}$$

cioè $w \cdot x = x \cdot w \quad \forall x \in V$ e quindi $w \in Z(Cl(V)) \cap Spin(V)$. Da questa relazione e dal Lemma appena enunciato, si veda in particolare l'osservazione, segue che $w = \pm 1$ e quindi Ker$\rho = \{\pm 1\}$.

Possiamo quindi concludere che $Spin(V)$ è un rivestimento $2-1$ di $SO(V)$. Verifichiamo ora che è un rivestimento non banale: basta mostrare che, essendo $SO(V)$ connesso, tale è anche $Spin(V)$.

---

[33] di fatto $\rho(w)$ è un endomorfismo dell' algebra $Cl(V,q)$ a meno del segno; la sua restrizione a $Spin(V)$ è un omomorfismo dell'algebra $Cl(V,q)$

[34] il *centro* di un'algebra è la sottoalgebra degli elementi che commutano con tutti gli elementi dell'algebra

Proposizione 13. *Spin(V) è connesso. Inoltre se dimV ≥ 3 allora Spin(V) è semplicemente connesso*

Corollario 5. *Spin(V) non è unione disgiunta di due copie di SO(V) ed è il rivestimento universale di SO(V) se dimV ≥ 3.*

Dimostrazione della Proposizione: Dato che $SO(V)$ è connesso si ha che $Spin(V)$ ha al più 2 componenti connesse, una che contiene 1, l'altra che contiene -1 . Basta allora verificare che (-1) è connesso ad 1 da un cammino. Consideriamo

$$w(\theta) = ((\cos\theta)e_1 + (\sin\theta)e_2) \cdot (-(\cos\theta)e_1 + (\cos\theta)e_2)$$

con $\{e_1, \ldots, e_n\}$ base ortonormale per V. Si vede che

$$w(\theta) \in Spin(V) \quad w(0) = 1 \quad w(\tfrac{\pi}{2}) = -1$$

e la connessione è dimostrata. Per convincersi che $Spin(V)$, con $dimV \geq 3$, è semplicemente connesso basta utilizzare il fatto che $\mathbb{S}^n$ è semplicemente connesso: un laccetto in $Spin(V)$ è un prodotto di laccetti:

$$\gamma_1(t) \cdots \gamma_{2n}(t)$$

ciascuno dei quali si trova nella sfera dello spazio vettoriale euclideo V, cioè γ_j laccetto in $\{v \in V | \parallel v \parallel = 1\}$, che è semplicemente connesso. La Proposizione è dimostrata.

In particolare, segue da quanto visto che $Spin(V)$ ha una struttura di gruppo di Lie e che ρ è un omomorfismo di gruppi di Lie. Si ha in particolare che

$$\mathcal{L}ie(Spin(V)) \simeq \mathcal{L}ie(SO(V))$$

perché ρ è un diffeomorfismo locale. Ora, $Spin(V)$ è un gruppo di Lie immerso nell'algebra $Cl^0(V, q)$ e quindi la sua algebra di Lie, che è lo spazio tangente all'unità, deve potersi esprimere in termini dell'algebra di Clifford.
Vale la seguente

Proposizione 14. *Sia λ l'isomorfismo:*

$$\lambda : \mathcal{L}ie(SO(V)) \to \mathcal{L}ie(Spin(V)) \subset Cl^0(V)$$

inverso di $\mathcal{L}ie(\rho) : \mathcal{L}ie(Spin(V)) \longrightarrow \mathcal{L}ie(SO(V))$; allora

$$\lambda(A_{ij}) = \frac{1}{4} A_{ij} e_i e_j$$

Dimostrazione. Consideriamo $V = \mathbb{R}^k$ con il prodotto scalare canonico. Basta mostrare la tesi per le matrici A con $A_{ij} = 1$, $A_{ji} = -1$ per fissati i e j e tutte le altre componenti uguali a zero (queste matrici formano una base dell'algebra di Lie delle matrici antisimmetriche). Allora $A = g'(0)$ dove $g(t) \in SO(n)$

$$\begin{cases} g(t)e_i &= (\cos t)e_i + (\sin t)e_j \\ g(t)e_j &= (\cos t)e_j - (\sin t)e_i \\ g(t)e_k &= e_k \qquad\qquad \text{per } k \neq i, j \end{cases}$$

cioè A è il vettore tangente alla curva $g(t)$ in 0. Solleviamo $g(t)$ a $Spin(n)$; definiamo

$$h(t) = (\cos\frac{t}{2}) + (sin\frac{t}{2})e_i e_j \in Spin(n)$$

Con semplici calcoli di trigonometria si vede che $h(t) \in Spin(n)$ e $\rho(h(t)) = g(t)$. Inoltre

$$h'(0) = \frac{1}{2} e_i e_j = \frac{1}{4}(e_i e_j - e_j e_i)$$

che è quello che dovevamo dimostrare. □

17.3. **Rappresentazioni del gruppo Spin.**

Sia (V, q) uno spazio euclideo orientato di $dimV = 2k$. Per il Teorema 14 sappiamo che esiste (a meno di isomorfismi) un'unica rappresentazione irriducibile di $\mathbb{C}l(V)$ e che questa rappresentazione, S, è $\mathbb{Z}_2$-graduata con l'azione di $v \in V$ dispari. S è anche dotata di un prodotto scalare per il quale l'azione di Clifford è unitaria.
Ricordiamo che $Pin(V) \subseteq \mathbb{C}l(V)$; utilizzando l'isomorfismo tra $\mathbb{C}l(V)$ e $\mathrm{End}(S)$ e ricordando l'unitarietà dell'azione di Clifford otteniamo una rappresentazione:

$$\mathcal{R} : Pin(V) \longrightarrow U(S)$$

che, per quanto detto, è necessariamente irriducibile ($Pin(V)$ genera tutta l'algebra che non ha sottospazi invarianti); restringendoci a $Spin(V)$ si ottiene la rappresentazione spin (complessa)

$$\Delta_{\mathbb{C}} : Spin(V) \longrightarrow U(S)$$

Proposizione 15. $\Delta_{\mathbb{C}} : Spin(V) \longrightarrow U(S)$ *è una rappresentazione unitaria che è somma di due rappresentazioni unitarie irriducibili:*

$$\Delta^{\pm}_{\mathbb{C}} : Spin(V) \longrightarrow U(S^{\pm})$$

Dimostrazione. Abbiamo già osservato che la rappresentazone di $Pin(V)$ è irriducibile. Restringendo la rappresentazione da $Pin(V)$ a $Spin(V) \subset \mathbb{C}l(V)^0$ e tenendo conto che l'azione di Clifford di un vettore $v \in V$ è dispari, otteniamo dapprima

$$\Delta_{\mathbb{C}} : Spin(V) \longrightarrow U(S^+) \oplus U(S^-)$$

(con ciò intendiamo che Δ è diagonali a blocchi) e poi per proiezione sul primo e sul secondo fattore due rappresentazioni irriducibili

$$\Delta^{\pm}_{\mathbb{C}} : Spin(V) \longrightarrow U(S^{\pm})$$

$\Delta_{\mathbb{C}}$ è detta la rappresentazione spin (complessa); $\Delta^{\pm}_{\mathbb{C}}$ sono dette le mezze rappresentazioni spin (complesse).

Passiamo al caso in cui la dimensione dello spazio V è dispari. Utilizzando l'osservazione 2 dopo la dimostrazione del Teorema 14 e procedendo in maniera del tutto analoga abbiamo la proposizione

Proposizione 16. *Sia V euclideo, orientato e di $dimV = 2k + 1$. La restrizione di*

$$Cl^0(V) \simeq \mathrm{End}(S) \simeq \mathbb{M}_{\mathbb{C}}(2^k)$$

a $Spin(V)$ è una rappresentazione unitaria irriducibile

$$\Delta_{\mathbb{C}} : Spin(V) \to U(S), \quad \dim S = 2^k.$$

17.4. **Varietà Spin.**

Definizione 23. Sia E un fibrato vettoriale reale riemanniano orientabile su M con funzioni di transizione $\{g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow \mathrm{SO}(k)\}$. Diremo che E ammette una *struttura spin* se esistono sollevamenti $\left\{g'_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow \mathrm{Spin}(k)\right\}$ delle funzioni di transizione ($\rho(g'_{\alpha\beta}) = g_{\alpha\beta}$), tali che

$$\begin{cases} g'_{\alpha\beta}g'_{\beta\gamma}g'_{\gamma\alpha} = 1 \\ g'_{\alpha\alpha} = 1 \end{cases}$$

La scelta dei sollevamenti è detta *scelta di una struttura spin.* Se esiste una struttura spin allora E si dice fibrato spin. M si dice spin quando $\mathrm{T}M$ lo è.

Non tutti i fibrati sono spin, così come non tutti i fibrati sono orientabili.
L'ostruzione all'orientabilità di un fibrato è misurata da una classe caratteristica $\mathrm{w}_1(E) \in \mathrm{H}^1(M, \mathbb{Z}_2)$ detta *prima classe di Stieffel-Whitney* . Analogamente, l'ostruzione all'esistenza di una struttura spin è misurata da una classe $\mathrm{w}_2(E) \in \mathrm{H}^2(M, \mathbb{Z}_2)$, la *seconda classe di Stieffel-Whitney.* Vediamo, in particolare, che localmente una struttura spin esiste sempre. Entriamo brevemente nei dettagli delle definizioni. Per fare questo occorre introdurre i gruppi di coomologia di Čech di M a valori in $\mathbb{Z}_2$. Sia $\mathbb{Z}_2 = \{-1, 1\}$; scegliamo quindi la notazione **moltiplicativa**. Fissiamo in M un ricoprimento $\{U_{\alpha_j}\}$ con la seguente proprietà: l'intersezione di un numero finito di aperti è vuoto oppure contraibile. Usando coordinate normali si può dimostrare che un tale ricoprimento esiste sempre (ricoprimento con palle goedetiche). Una j-cocatena di Čech a valori in $\mathbb{Z}_2$ è una funzione $f(\alpha_0, \dots, \alpha_j) \in \mathbb{Z}_2$ definita su $(j+1)$-ple di indici tali che $U_{\alpha_0} \cap \dots \cap U_{\alpha_j} \neq \emptyset$ e con la ulteriore proprietà di essere totalmente simmetrica: $f(\alpha_{\sigma(0)}, \dots, \alpha_{\sigma(j)}) = f(\alpha_0, \dots, \alpha_j)$ per ogni permutazione σ. Il gruppo moltiplicativo delle j-cocatene è denotato con $C^j(M; \mathbb{Z}_2)$. Esiste un operatore di cobordo sulle j-cocatena: $\delta_j : C^j \to C^{j+1}$:

$$(\delta_j f)(\alpha_0, \dots, \alpha_{j+1}) = \Pi_{i=0}^{j+1} f(\alpha_0, \dots, \hat{\alpha_i}, \dots, \alpha_{j+1})\,.$$

Si verifica facilmente che $\delta^2 = 0$. La coomologia di M a valori in $\mathbb{Z}_2$ è per definizione $\mathrm{Ker}\delta/\mathrm{Im}\delta$. Gli elementi f in $C^j(M, \mathbb{Z}_2)$ tali che $\delta f = 0$ sono detti j-cocicli. Si verifica che questi gruppi non dipendono dalla scelta del ricoprimento. (Di fatto sono isomorfi alla usuale coomologia con coefficienti in $\mathbb{Z}_2$).

Torniamo al nostro fibrato riemanniano E e fissiamo un ricoprimento geodetico banalizzante. Siano $\{g_{\alpha\,\beta}\}$ le funzioni di transizione di questo fibrato associate a questo ricoprimento. Quindi $g_{\alpha\,\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to \mathrm{O(n)}$. Definiamo un 1-cociclo come segue: $f(\alpha, \beta) = \det(g_{\alpha\,\beta}) \in \mathbb{Z}_2$. Dalle proprietà delle funzioni di transizione segue che $\delta f = 0$ e che una diversa scelta di funzioni di transizione definisce un cociclo $\tilde{f}$ che differisce da f per un cobordo. La prima classe di Stieffel-Whitney è allora definita come la classe $w_1(E) = [f] \in H^1(M, \mathbb{Z}_2)$.
Dalla definizione data è facile verificare che

Proposizione 17. *E è orientabile se e soltanto se $w_1(E) = 0$.*

Sia ora E orientabile. Scegliamo dei sollevamenti delle funzioni di transizione al gruppo spin. Dato che $U_\alpha \cap U_\beta$ è contraibile questo sollevamento esiste sempre. Siano $g'_{\alpha\,\beta}$ questi sollevamenti. L'immagine tramite l'omomorfismo $\rho : \mathrm{Spin}(n) \to SO(n)$ di $g'_{\alpha\,\beta}g'_{\beta\,\gamma}g'_{\gamma\,\alpha}$ è uguale a l'identità. Quindi

$$g'_{\alpha\,\beta}g'_{\beta\,\gamma}g'_{\gamma\,\alpha} = \pm\,\mathrm{Id} = \phi(\alpha, \beta, \gamma)\,\mathrm{Id}\,,$$

con $\phi(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{Z}_2$ e con Id uguale all'identità del gruppo spin. Si verifica che $\phi \in C^2(M, \mathbb{Z}_2)$ e che è un cociclo. La classe $[\phi] \in H^2(M, \mathbb{Z}_2)$ è, per definizione, la seconda classe di Stieffel-Whitney $w_2(E)$. Si dimostra senza particolare difficoltà la seguente

Proposizione 18. *Il fibrato orientabile E è spin se e soltanto se $w_2(E) = 0$.*

Elenchiamo, senza dimostrazione, le pricipali proprietà della seconda classe di Stieffel-Whitney:

Proposizione 19. *Valgono le seguenti proprietà:*

(i) $\mathrm{w}_2\big((\mathrm{L} \longrightarrow \mathbb{C}P^1)_{\mathbb{R}}\big) \neq 0$;
(ii) w_2 *è stabile;*
(iii) *se E è complesso, allora*
3.1) $\mathrm{c}_1(E) \in \mathrm{H}^2(M, \mathbb{Z})$,
3.2) $\mathrm{w}_2(E_{\mathbb{R}}) = \mathrm{c}_1(E) \bmod 2\mathbb{Z}$.
(iv) *se M è spin, allora le strutture spin non equivalenti sono parametrizzate da* $\mathrm{H}^1(M, \mathbb{Z}_2)$.

Di seguito riportiamo alcuni esempi.

(i) $\mathbb{R}^n$ è spin.
(ii) Ogni 3–varietà orientabile è spin (perché in questo caso si dimostra che $\mathrm{w}_2(\mathrm{T}M) = \mathrm{w}_1(\mathrm{T}M)^2$ e a destra c'è zero dato che, per ipotesi, M è orientabile).
(iii) Ogni varietà omeomorfa a S^n è spin.
(iv) Più in generale, qualsiasi varietà con $H^2(M, \mathbb{Z}_2) = 0$ è spin; se $H^1(M, \mathbb{Z}_2) = 0$ allora la struttura spin su TM è unica.
(v) Qualsiasi varietà con fibrato tangente stabilmente banale è spin (cioè se esiste V tale che $\mathrm{T}M \oplus V \simeq M \times \mathbb{R}^N$). Ad esempio i gruppi di Lie (è ben noto che il fibrato tangente è in questo caso banale).
(vi) Le superfici di Riemann sono spin, poiché $\int_M \mathrm{c}_1(\mathrm{T}^{1,0}) = 2 - 2g = 2(1-g)$ e quindi $\mathrm{w}_2 = 0$.
(vii) $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ è spin sse $n \equiv 3 \pmod 4$.
(viii) $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ è spin sse n è dispari.
(ix) $\mathbb{H}\mathrm{P}^n$ è spin per ogni n.
(x) $V^n(d) \subset \mathbb{C}\mathrm{P}^{n+1}$ ipersuperfice algebrica di grado d è spin sse $n + d \in 2\mathbb{Z}$.
(xi) Sia $V^n(d_1, \ldots, d_k) \subset \mathbb{C}\mathrm{P}^{n+1}$, $n > k$, l'intersezione trasversa di k ipsersuperfici di grado $d_1, \ldots, d_k$. Allora $V^n(d_1, \ldots, d_k)$ è spin sse $n + k + 1 + \sum d_i \in 2\mathbb{Z}$.

17.5. **Fibrato degli spinori.**

Sia M spin di dimensione n; scegliamo una struttura spin sul fibrato tangente, cioè dei sollevamenti $g'_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow \mathrm{Spin}(n)$ delle funzioni di transizione $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow \mathrm{SO}(n)$.
Il *fibrato degli spinori* è ottenuto partendo dalla rappresentazione spin

$$\Delta_{\mathbb{C}} : \mathrm{Spin}(n) \longrightarrow U(S)$$

e definendo le

$$g^{\not{S}}_{\alpha\beta} = \Delta_{\mathbb{C}} \circ g'_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow U(S).$$

Quindi, per definizione,

$$\not{S} = \bigsqcup_\alpha U_\alpha \times S / \sim$$

dove la relazione di equivalenza $\sim$ è data dalle $g^{\not{S}}_{\alpha\beta}$ (un esercizio per casa vi chiedeva di dimostrare che questo è un fibrato). È chiaro che $\not{S}$ è in maniera naturale un modulo di Clifford unitario. Se $\dim M$ è pari, $\dim M = 2k$, allora $S = S^+ \oplus S^-$,

$$\Delta_{\mathbb{C}} : \mathrm{Spin}(2k) \longrightarrow U(S^+) \oplus U(S^-) \subset U(S)$$

(abbiamo visto che nel caso pari $\Delta_{\mathbb{C}}$ è diagonale a blocchi) e sono ben definite le due mezze rappresentazioni $\Delta_{\mathbb{C}}^{\pm}: \mathrm{Spin}(2k) \longrightarrow U(S^{\pm})$. Nel caso di dimensione pari otteniamo allora $g_{\alpha\beta}^{\not{S},\pm}: U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow U(S^{\pm})$ e quindi due fibrati $\not{S}^{\pm}$, definiti dalle funzioni di transizione $g_{\alpha\beta}^{\not{S},\pm}$. Per costruzione $\not{S} = \not{S}^{+} \oplus \not{S}^{-}$ e quindi il fibrato degli spinori è un fibrato di moduli di Clifford unitario e $\mathbb{Z}_2$-graduato.

17.6. **L'operatore spin-Dirac sulle varietà spin.**

Sia $\left\{\omega_\alpha^{LC}\right\}$ la connessione di Levi–Civita su $\mathrm{T}M$,

$$\omega_\alpha^{LC} \in \Omega^1\left(U_\alpha, \mathrm{Lie}(\mathrm{SO}(2k))\right).$$

Consideriamo $\mathrm{Lie}(\rho) : \mathrm{Lie}(\mathrm{Spin}(2k) \longrightarrow \mathrm{Lie}(\mathrm{SO}(2k))$ e denotiamo con λ il suo inverso.

Definizione 24. Le $\left\{\omega_\alpha^{\not{S}} \in \Omega^1\left(U_\alpha, \mathrm{Lie}(\mathrm{Spin}(2k))\right)\right\}$, definite da $\omega_\alpha^{\not{S}} = \lambda(\omega_\alpha^{LC})$, inducono una connessione

$$\nabla^{\not{S}} : C^\infty(M, \not{S}) \longrightarrow C^\infty(M, \mathrm{T}^*M \otimes \not{S})$$

detta connessione spin.

Se e_i è una base locale ortonormale di $\mathrm{T}M$ e

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} e_j = \omega_{ij}^k e_k,$$

allora, utilizzando la Proposizione 14 vediamo che localmente $\nabla^{\not{S}}$ si scrive come segue

$$\nabla^{\not{S}}_{\frac{\partial}{\partial x_i}} = \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{1}{4}\omega_{ij}^k \mathrm{c}(e^j)\mathrm{c}(e^k),$$

e nel caso di dimensione pari

$$\nabla^{\not{S}} = \left(\begin{array}{c|c} \nabla^{\not{S}^+} & 0 \\ \hline 0 & \nabla^{\not{S}^-} \end{array}\right).$$

Non è difficile verificare che la connessione spin è una connessione di Clifford.

Definizione 25. L'operatore spin-Dirac (detto anche *operatore di Atiyah–Singer*) su una varietà spin è l'operatore di Dirac associato al fibrato degli spinori e a questa connessione su di esso. Localmente

$$\not{D} = \sum \mathrm{c}(e_i)\nabla^{\not{S}}_{e_i}.$$

Da quanto visto segue che l'operatore spin-Dirac è associato ad un fibrato di Dirac. È bene notare che l'operatore spin-Dirac dipende dalla scelta dei sollevamenti, e cioè dalla particolare scelta di struttura spin. Sarà chiaro fra breve che, d'altra parte, l'indice dell'operatore spin-Dirac non dipende da questa particolare scelta. Ciò non risulta vero per invarianti analitici più sofisticati dell'indice.

Nel caso pari l'operatore di spin-Dirac è $\mathbb{Z}_2$–graduato:

$$\not{D} = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \not{D}^- \\ \hline \not{D}^+ & 0 \end{array}\right) : C^\infty(M, \not{S}^+) \oplus C^\infty(M, \not{S}^-) \longrightarrow C^\infty(M, \not{S}^+) \oplus C^\infty(M, \not{S}^-),$$

con $\not{D}^- = (\not{D}^+)^*$ (perché sappiamo che $\not{D} = \not{D}^*$).

17.7. **L'operatore spin-Dirac a coefficienti in un fibrato W.**

Possiamo generalizzare l'operatore spin-Dirac come segue. Se $W \longrightarrow M$ è un fibrato qualsiasi dotato di una metrica e di una connessione compatile, consideriamo $\not{S} \otimes W$ con l'azione di Clifford[35]

[35] abbiamo già fatto questo ragionamento quando abbiamo considerato $\Lambda^{0,*} \otimes E$, con E olomorfo, su una varietà complessa.

$\mathrm{c}_W(v) = \mathrm{c}_{\not{S}}(v) \otimes \mathrm{Id}_W$ e la connessione $\nabla^{\not{S}\otimes W} = \nabla^{\not{S}} \otimes \mathrm{Id} + \mathrm{Id} \otimes \nabla^W$. Notiamo che, in questo caso,

$$\Omega^E = \Omega^{\not{S}} \otimes \mathrm{Id} + \mathrm{Id} \otimes \Omega^W.$$

Possiamo definire l'*operatore spin-Dirac a coefficienti in W* come

$$\not{D}_W = \mathrm{c}_W \circ \nabla^{\not{S}\otimes W}.$$

Anche questo operatore è associato ad un fibrato di Dirac.

18. **Formula di Weitzenbock/Bochner/Lichnerowicz.**

18.1. **Laplaciano associato ad una connessione.**

Sia (M, g) una varietà riemanniana compatta senza bordo. Consideriamo un operatore di Dirac $\not{D}$ su un fibrato di Dirac $E \to M$ di rango k. Abbiamo già visto che se $(x, \xi) \in T_x^*M$ allora il simbolo principale di $\not{D}^2$ è dato da

$$\sigma_2(\not{D}^2)(x, \xi) = ||\xi||^2 \operatorname{Id}_{E_x}$$

dove $||\xi||^2 = g_x(\xi, \xi)$. In coordinate locali questo vuol dire che

$$\not{D}^2 = -(\sum g^{ij} \partial_i \partial_j) \operatorname{I}_k + \text{termini di grado 1 e grado 0}$$

dove abbiamo denotato con I_k la matrice unità $k \times k$. Dimostreremo ora una formula molta precisa per $\not{D}^2$.

Ricordiamo che $\not{D} = c \circ \nabla^E$ con $c : \mathcal{C}^\infty(M, T^*M \otimes E) \to \mathcal{C}^\infty(M, E)$ un'azione di Clifford unitaria e $\nabla^E : \mathcal{C}^\infty(M, E) \to \mathcal{C}^\infty(M, T^*M \otimes E)$ una connessione di Clifford. Il fibrato $T^*M \otimes E$ ha una metrica naturale data dalla formula:

$$< \phi \otimes s, \phi' \otimes s' >_{T^*M \otimes E} = < \phi, \phi' >_{T^*M} < s, s' >_E$$

Questa metrica induce, per integrazione su M, un prodotto scalare L^2 su $\mathcal{C}^\infty(M, T^*M \otimes E)$. Ha quindi senso considerare l'aggiunto formale di $\nabla^E \equiv \nabla$:

$$\nabla^* : \mathcal{C}^\infty(M, T^*M \otimes E) \to \mathcal{C}^\infty(M, E) \,.$$

L'operatore

$$\nabla^* \nabla : \mathcal{C}^\infty(M, E) \to \mathcal{C}^\infty(M, E)$$

è detto *Laplaciano associato alla connessione* ∇.

18.2. **Formula di Weitzenbock/Bochner/Lichnerowicz.**

Sia ora $\Omega^E \in \mathcal{C}^\infty(M, \Lambda^2 M \otimes \operatorname{End}(E))$ la curvatura di ∇. Fissiamo una base ortonormale locale $\{e_j\}$ con base duale $\{e^j\}$. A partire dalla curvatura pssiamo definire $\Omega_c^E \in \mathcal{C}^\infty(M, \operatorname{End}(E))$:

$$\Omega_c^E(s) = \frac{1}{2} \sum_{j\,k} c(e^j) c(e^k) \Omega^E(e_j, e_k) s$$

La definizione è ben posta, indipendente dalla scelta di base ortonormale.

Teorema 15. *(Weitzenbock/Bochner/Lichnerowicz) Per un operatore di Dirac $\not{D}$ su un fibrato di Dirac vale la formula:*

$$\not{D}^2 = \nabla^* \nabla + \Omega_c^E \tag{84}$$

Per dimostrare la formula abbiamo bisogno di due Lemmi. Ricordo che se X è un campo di vettori su (M, g), $X \in \mathcal{C}^\infty(M, TM)$, allora la sua *divergenza* è la funzione $\operatorname{div}(X)$ definita dall'identità

$$-\operatorname{div}(X) \operatorname{dvol} = d(i(X) \operatorname{dvol}) \,.$$

Lemma 6. Fissiamo una base ortonormale locale $\{e_j\}$ con base duale $\{e^j\}$. Vale la formula:

$$\nabla_{e_i}^* = -\nabla_{e_i} + \operatorname{div}(e_i) \tag{85}$$

Dimostrazione. $\forall s \in \mathcal{C}^\infty(M,E)$ si ha $(s, \nabla_{e_i}^* s') = (\nabla_{e_i} s, s')$; utilizzando la compatibilità di ∇ con la metrica di E abbiamo l'uguaglianza con

$$-\int_M < s, \nabla_{e_i} s' > \mathrm{dvol} + \int_M e_i < s, s' > \mathrm{dvol} \tag{86}$$

Sia L_X la derivata di Lie rispetto ad un campo di vettori X; è ben nota la formula $L_X = d \circ i(X) + i(X) \circ d$ per la quale rimandiamo, ad esempio, a libro di Warner *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups.* Utilizzando la proprietà di derivazione di L_{e_i} e la formula appena scritta possiamo eguagliare l'ultimo membro di (86) a

$$(s, -\nabla_{e_i} s') + \int d(i(e_i)(< s, s' > \mathrm{dvol})) + \int_M < s, s' > \mathrm{div}(e_i)\mathrm{dvol}$$

da cui segue il Lemma per il teorema di Stokes.

Lemma 7. Vale la seguente formula:

$$\nabla^*\nabla s = \sum \nabla_{e_j}^* \nabla_{e_j} s = -\sum(\nabla_{e_j}^2 - \mathrm{div}(e_j)\nabla_{e_j})s \tag{87}$$

Dimostrazione. La seconda formula segue dal Lemma precedente. Sia $s \in \mathcal{C}^\infty(M,E)$; localmente $\nabla s = \sum e^j \otimes \nabla_{e_j} s$. Si ha $\forall s' \in \mathcal{C}^\infty(M,E)$:

$$(\nabla^*(e^j \otimes s), s')_E = (e^j \otimes s, \nabla s')_{T^*M\otimes E} =$$

$$(e^j \otimes s, \sum e^i \otimes \nabla_{e_i} s')_{T^*M\otimes E} = (s, \nabla_{e_j} s')_E = (\nabla_{e_j}^* s, s')_E$$

e quindi $\nabla^*(e^j \otimes s) = \nabla_{e_j}^* s$. Abbiamo, infine,

$$\nabla^*\nabla s = \nabla^*(\sum e^j \otimes \nabla_{e_j} s) = \sum \nabla_{e_j}^* \nabla_{e_j} s$$

ed il Lemma è dimostrato.

Dimostrazione del Teorema. Scegliamo una base locale $\{e_j\}$ tale che in $m \in M$ si abbia $\nabla_{e_j} e_i = 0$. Si ha allora, in m, $[e_i, e_j] = 0$, $\mathrm{div}(e_j) = 0$. Allora, in m, si ha

$$\not{D}^2 s = \sum_{i,j} c(e^i)\nabla_{e_i}(c(e^j)\nabla_{e_j} s) =$$

$$= \sum_{i,j} c(e^i)c(\nabla_{e_i} e^j)\nabla_{e_j} s) + \sum_{i,j} c(e^i)c(e^j)\nabla_{e_i}\nabla_{e_j} s =$$

$$= 0 - \sum_i \nabla_{e_i}\nabla_{e_j} s + \sum_{i<j} c(e^i)c(e^j)(\nabla_{e_i}\nabla_{e_j} - \nabla_{e_i}\nabla_{e_j})s =$$

$$= \nabla^*\nabla s + \Omega_c^E s.$$

Nella seconda uguaglianza si è usata l'ipotesi che la connessione sia di Clifford.

18.3. **Curvatura scalare e formula di Lichnerowicz.**

Vediamo come sia possibile in alcuni casi dare una formula precisa per Ω_c^E. L' esempio forse più famoso è dato dal fibrato degli spinori su una varietà M spin : $E = \not{S} \to M$. In questo caso si ha

$$\Omega_c^{\not{S}} = \frac{1}{4}\ \text{(curvatura scalare)} \equiv \frac{1}{4} r_M. \tag{88}$$

Si ricorda che la curvatura scalare r_M è per definizione:

$$r_M = \sum_{l,m} R_{lmlm}.$$

Otteniamo allora la **formula di Lichnerowicz**: per l'operatore di Atiyah-Singer su una varietà spin risulta

$$\not{D}^2 = \nabla^*\nabla + \frac{1}{4}\, r_M \tag{89}$$

La (88), e quindi la formula di Lichnerowicz, si dimostra usando la formula esplicita per la connessione spin

$$\nabla_i^{\not{S}} = \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{1}{4}\omega_{ij}^k c(e^j) c(e^k)$$

con ω_{ij}^k i coefficienti della connessione di Levi-Civita, e, inoltre, le simmetrie del tensore di curvatura di ∇^{LC} e le regole di anticommutazione nell'algebra di Clifford. Omettiamo i dettagli che sono di natura algebrica elementare.

Più in generale se

$$E = \not{S} \otimes W \quad \text{allora} \quad \Omega_c^E = \frac{1}{4} r_M + \Omega_c^W \tag{90}$$

e otteniamo quindi la **formula di Lichnerowicz** per l'operatore di Atiyah-Singer su una varietà spin **a valori in un fibrato** W

$$\not{D}^2 = \nabla^*\nabla + \frac{1}{4}\, r_M + \sum_{i<j} c(e^i) c(e^j) \Omega^W(e_i, e_j)\,. \tag{91}$$

18.4. **Curvatura positiva.**

In generale, abbiamo il seguente immediato ma fondamentale corollario della formula di Bochner/Weitzenbock/Lichnerowicz:

Corollario 6. *Se* $\forall m$, Ω_c^E *ha autovalori strettamenti positivi allora non ci sono soluzioni non banali dell'equazione* $\not{D}^2 s = 0$.

Dimostrazione del Corollario. Esiste $c > 0$ tale che $(\Omega_c^E s, s) \geq c\|s\|^2$ per ogni s. D'altra parte $(\nabla^*\nabla s, s) = (\nabla s, \nabla s) \geq 0$. Quindi se

$$\not{D}^2 s = 0 \Rightarrow (\Omega_c^E s, s) = -\|\nabla s\|^2 + < D^2 s, s >= -\|\nabla s\|^2 \leq 0.$$

Ne segue che, necessariamente, $s = 0$ ed il corollario è dimostrato.

19. Il Teorema dell'indice di Atiyah-Singer per operatori di Dirac

19.1. L'indice di un operatore di Dirac.

Teorema 16. *[Esistenza e stabilità dell'indice] Sia (M, g) una varietà riemanniana compatta e $\not{D} : C^\infty(M, E) \to C^\infty(M, E)$ un operatore di Dirac (non necessariamente associato ad un fibrato di Dirac). Allora*

$$\dim \mathrm{Ker}(\not{D}) < +\infty.$$

In particolare, se M è di dimensione pari ed E è $\mathbb{Z}_2$-graduato allora è ben definito l'indice di $\not{D}^+$:

$$\mathrm{ind}\,(\not{D}^+) := \dim \mathrm{Ker}\,\not{D}^+ - \dim \mathrm{Ker}\,\not{D}^- \ \in \mathbb{Z}.$$

Inoltre, se $D_0 : C^\infty(M, E) \to C^\infty(M, E)$ e $D_1 : C^\infty(M, E) \to C^\infty(M, E)$ sono due operatori di Dirac e $D_1 - D_0 \in C^\infty(M, \mathrm{End}(E))$ allora

$$\mathrm{ind}\,(\not{D}_0^+) = \mathrm{ind}\,(\not{D}_1^+) \tag{92}$$

Dimostreremo questo Teorema nelle prossime lezioni.

19.2. Il Teorema dell'indice di Atiyah-Singer per l'operatore spin-Dirac.

Teorema 17 (Atiyah–Singer per varietà spin)**.** *Sia (M, g) una varietà spin* [36] *di dimensione $4k$ e sia $\not{D}$ l'operatore spin-Dirac associato. Allora*

$$\mathrm{ind}\,(\not{D}^+) = \int_M \hat{\mathrm{A}}(TM).$$

Più in generale, se M è di dimensione pari e W è un fibrato hermitiano su M, allora

$$\mathrm{ind}\,(\not{D}_W^+) = \int_M \hat{\mathrm{A}}(TM) \wedge \mathrm{Ch}(W).$$

Un primo Corollario (immediato) del Teorema dell'indice per varietà spin è l'integralità del genere $\widehat{A}(M)$,

$$\widehat{A}(M) := \int_M \hat{\mathrm{A}}(TM) \in \mathbb{Z}\,,$$

un risultato originariamente dimostrato da Atiyah e Borel.
Dal Corollario 6 della Sezione precedente e dalla formula di Lichnerowicz vediamo anche che se (M, g) è spin e se $g(\ ,\ )$ ha curvatura scalare positiva allora $\mathrm{Ker}\not{D}^2 = 0$; dato che $\not{D}$ è simmetrico ciò implica immediatamente che $\mathrm{Ker}\not{D} = 0$. In particolare $\mathrm{ind}(\not{D}^+) = 0$.

Un'importante applicazione della formula di Atiyah-Singer su varietà spin e della formula di Lichnerowicz (89) è quindi il seguente :

Corollario 7. *Se M è una varietà spin di dim $4k$ e se*

$$\int_M \widehat{A}(TM) \neq 0$$

allora M **non** *ammette una metrica con curvatura scalare positiva.*

---

[36] con ciò intendiamo che M ammette una struttura spin e che abbiamo fissato una tale struttura

L'interesse di questo corollario è nella condizione
$$\widehat{A}(M) := \int_M \widehat{A}(TM) \neq 0$$
che è di natura *topologica*. In parole: abbiamo trovato una *ostruzione topologica* all'esistenza di metriche con curvatura scalare positiva.

Ad esempio se $d \in 2\mathbb{Z}$ allora $V^{2k}(d) \subset \mathbb{C}P^{2k+1}$, con $d > 2k$, ipersuperficie di grado d, è una varietà spin di dimensione $4k$; si può dimostrare che $\widehat{A}(V^{2k}(d)) \neq 0$ e quindi questa varietà *non ammette* una metrica con curvatura scalare positiva.

19.3. **Spinori e moduli di Clifford.**

Vogliamo enunciare il teorema dell'indice di Atiyah-Singer per (M, g) una qualsiasi varietà riemanniana compatta (non necessariamente spin) ed E un qualsiasi fibrato di moduli di Clifford. Abbiamo bisogno di alcune osservazioni di natura algebro-lineare.

Sia (V, q) uno spazio vettoriale euclideo orientato di dimensione $2k$. Sia E un modulo di Clifford complesso $\mathbb{Z}_2$-graduato per $\mathbb{C}l(V, q) \equiv \mathbb{C}l(V)$. Se E è irriducibile allora sappiamo che $E \simeq S$, lo spazio degli spinori [37]. Supponiamo che W sia uno spazio vettoriale complesso ausiliario. Sappiamo allora che $S \otimes W$ è un modulo di Clifford per l'azione di Clifford $c_S \otimes \mathrm{Id}_W$. Osserviamo che per $E := S \otimes W$ dotato di questa azione di Clifford si ha

$$\begin{aligned}\mathrm{End}(E) &= \mathrm{End}(S) \otimes \mathrm{End}(W) \\ &= \mathbb{C}l(V) \otimes \mathrm{End}(W) \\ &= \mathbb{C}l(V) \otimes \mathrm{End}_{\mathbb{C}l(V)}(E)\,.\end{aligned}$$

Sia E un arbitrario modulo di Clifford; sia $c_E : \mathbb{C}l(V) \to \mathrm{End}(E)$ la rappresentazione associata. Sia $W = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}l(V)}(S, E)$, l'algebra degli omomorfismi da S a E che commutano con le due azioni di Clifford, c_S e c_E. Consideriamo l'applicazione lineare $\phi : S \otimes W \to E$ che associa a $s \otimes w$ il vettore $w(s) \in E$. Questa mappa risulta essere un isomorfismo di spazi vettoriali; inoltre $\phi \circ (c_S \otimes \mathrm{Id}_W) = c_E \circ \phi$. Concludiamo che esiste un isomorfismo di rappresentazioni, fra $c_E : \mathbb{C}l(V) \to \mathrm{End}(E)$ e $c_S \otimes \mathrm{Id}_W : \mathbb{C}l(V) \to S \otimes W$; conseguentemente
$$\mathrm{End}(E) \simeq \mathbb{C}l(V) \otimes \mathrm{End}_{\mathbb{C}l(V)}(E).$$

19.4. **Il teorema dell'indice di Atiyah-Singer per operatori di Dirac.**

Sia ora $E \longrightarrow M$ un fibrato di moduli di Clifford dotato di metrica hermitiana e con azione di Clifford unitaria. Sia U un intorno contraibile e quindi banalizzante per E; da quanto visto nella sottosezione precedente, esiste un fibrato (banale) W su U tale che $E_{|U} \simeq \$_U \otimes W$. Il fatto che localmente $E|_{|U} \simeq \$_U \otimes W$ ha un'importante conseguenza: utilizzando una partizione dell'unità e la connessione *di Clifford* locale dell'Esempio dato nella Sottosezione 17.7, vediamo che su un fibrato di moduli di Clifford E esiste sempre una connessione di Clifford. Avevamo anticipato questo risultato nella Proposizione 9 [38].

Notiamo anche che, sebbene l'isomorfismo $E_{|U} \simeq \$_U \otimes W$ esista solo localmente, si ha un isomorfismo globale
$$\mathrm{End}(E) \simeq \mathbb{C}l(M) \otimes \mathrm{End}_{\mathbb{C}l(M)}(E)\,.$$

---

[37] Infatti, abbiamo visto che lo spazio vettoriale degli spinori è l'*unica* rappresentazione irriducibile di $\mathbb{C}l(V)$

[38] questo fatto è importante perché è solo per gli operatori di Dirac associati a fibrati di Dirac che la dimostrazione tramite l'equazione del calore funziona.

Siamo sotto l'ipotesi che M sia di dimensione pari e che E sia un modulo di Clifford graduato, quindi $E = E^+ \oplus E^-$. Sia

$$\nabla^E = \left(\begin{array}{c|c} \nabla^{E^+} & 0 \\ \hline 0 & \nabla^{E^-} \end{array} \right)$$

una connessione diagonale per E; associati a questi dati ci sono, come in precedenza, un operatore di Dirac $\not{D}$ ed una curvatura Ω^E. Consideriamo $\mathrm{c}(\Gamma)\Gamma^E \in C^\infty(M, \mathrm{End}(E))$ dove Γ^E è l'operatore di gradazione di E [39] e Γ è l'operatore di chiralità anche definito su E. Poiché l'azione è graduata $\mathrm{c}(\Gamma)\Gamma^E$ commuta con l'azione di Clifford ed è quindi a valori in $\mathrm{End}_{\mathbb{C}l(M)}(E)$. Denotiamo questo elemento con $\Gamma^{E/\not{S}}$.

Definizione 26. Sia $A \in C^\infty(M, \mathrm{End}(E))$, la *supertraccia* di A è

$$\mathrm{Str}(A) = \mathrm{Tr}\left(\Gamma^E A\right).$$

Se

$$A = \left(\begin{array}{c|c} A_{++} & A_{+-} \\ \hline A_{+-} & A_{--} \end{array} \right)$$

allora

$$\mathrm{Str}(A) = \mathrm{Tr} A_{++} - \mathrm{Tr} A_{--}.$$

Ispirati da questa definizione poniamo per $C \in C^\infty\left(M, \mathrm{End}_{\mathbb{C}l(M)}(E)\right)$

$$\mathrm{Str}^{E/\not{S}}(C) = \mathrm{Tr}\left(\Gamma^{E/\not{S}} C\right).$$

Ricordiamo ora che Ω^E è una due forma a valori negli endomorfismi di E. Utilizzando la decomposizione $\mathrm{End}(M) = \mathbb{C}l(M) \otimes \mathrm{End}_{\mathbb{C}l(M)}(E)$ vediamo che c'è una decomposizione

$$\Omega^E = \Omega^{\mathbb{C}l(M)} \otimes \mathrm{Id} + \mathrm{Id} \otimes \Omega^{E/\not{S}}.$$

che localmente, via l'isomorfismo di fibrati $E_{|U} \simeq \not{S}_U \otimes W$, è data dalla decomposizione

$$\Omega^E = \Omega^{\not{S}} \otimes \mathrm{Id} + \mathrm{Id} \otimes \Omega^W.$$

Definizione 27. Ponendo

$$\mathrm{ch}^{E/\not{S}}\left(\Omega^{E/\not{S}}\right) = \mathrm{Str}^{E/\not{S}}\left(\exp\left(\frac{i}{2\pi}\Omega^{E/\not{S}}\right)\right),$$

definiamo

$$\mathrm{Ch}^{E/\not{S}}(E) = \left[\mathrm{ch}^{E/\not{S}}\left(\Omega^{E/\not{S}}\right)\right] \in \mathrm{H}^*_{dR}(M, \mathbb{C}).$$

Se M è spin e $E = \not{S} \otimes W \equiv (\not{S}^+ \otimes W) \oplus (\not{S}^- \otimes W)$ allora $\Gamma^E = \Gamma \otimes \mathrm{Id}_W$ e quindi $\Gamma^{E/\not{S}} = \mathrm{Id}_W$, da cui segue che

$$\mathrm{ch}^{E/\not{S}}\left(\Omega^{E/\not{S}}\right) = \mathrm{Tr}\left(\exp\left(\frac{i}{2\pi}\Omega^W\right)\right),$$

e scopriamo che $\mathrm{Ch}^{E/\not{S}}(E) = [\mathrm{Ch}(W, \nabla^W)] = \mathrm{Ch}(W)$. Questo piccolo ragionamento dimostra anche che $\mathrm{Str}^{E/\not{S}}\left(\exp\left(\frac{i}{2\pi}\Omega^{E/\not{S}}\right)\right)$ è chiusa perché localmente data dal carattere di Chern di W che è chiuso.

---

[39] quindi $E^\pm = \{s : \Gamma^E s = \pm s\}$, $\left(\Gamma^E\right)^2 = 1$

Teorema 18 (Atiyah–Singer per operatori di Dirac)**.** *Sia M di dimensione pari e sia $\not{D} : C^\infty(M,E) \to C^\infty(M,E)$ un operatore di Dirac su un fibrato di Dirac $\mathbb{Z}_2$-graduato. Allora vale la seguente formula:*

$$\operatorname{ind}(\not{D}^+) = \int_M \hat{\mathrm{A}}(M) \wedge \mathrm{Ch}^{E/\not{S}}(E).$$

Per quel che concerne il membro a destra di questa formula, si ha la seguente Proposizione, della quale per il momento omettiamo la dimostrazione:

Proposizione 20.
1] Sia (M,g) orientabile e sia $E = \Lambda^* M$ come nell'Esempio 1 della Sottosezione 15.7. Allora

$$\int_M \hat{\mathrm{A}}(M) \wedge \mathrm{Ch}^{E/\not{S}}(E) = \int_M e(TM)$$

con $e(TM)$ la classe di Eulero.
2] Sia (M,g) orientabile e sia $E = \Lambda^* M$ con gradazione come nell'Esempio 2 descritto nella Sottosezione 15.9. Allora

$$\int_M \hat{\mathrm{A}}(M) \wedge \mathrm{Ch}^{E/\not{S}}(E) = \int_M L(TM)\,.$$

3] Sia M complessa e sia $E = \Lambda^{0,*} M$ come nell'Esempio 3 descritto nella Sottosezione 15.10. Allora

$$\int_M \hat{\mathrm{A}}(M) \wedge \mathrm{Ch}^{E/\not{S}}(E) = \int_M \mathrm{Td}(T^{1,0}M)\,.$$

Più in generale, se M è complessa, $V \to M$ è un fibrato olomorfo e $E = \Lambda^{0,*} M \otimes V$ allora

$$\int_M \hat{\mathrm{A}}(M) \wedge \mathrm{Ch}^{E/\not{S}}(E) = \int_M \mathrm{Td}(T^{1,0}M) \wedge \mathrm{Ch}(V)\,.$$

Applicando il Teorema dell'indice di Atiyah-Singer e la precedente Proposizione otteniamo:

Corollario 8.
1] Per l'operatore di Gauss-Bonnet $D_{\mathrm{GB}} = d + d^*$ su una varietà riemanniana orientabile (M,g) di dimensione pari e per la sua restrizione alla forme di dimensione pari, D^+_{GB}, si ha

$$\operatorname{ind}(D^+_{\mathrm{GB}}) = \int_M e(TM)\,.$$

2] Per l'operatore di segnatura su una varietà riemanniana orientabile (M,g) di dimensione $4k$ si ha

$$\operatorname{ind}(D^{\mathrm{sign},+}) = \int_M L(TM)$$

3] Per l'operatore $\sqrt{2}(\overline{\partial}_V + \overline{\partial}^*_V)$ su una varietà complessa con $V \to M$ fibrato olomorfo si ha:

$$\operatorname{ind}(\sqrt{2}(\overline{\partial}_V + \overline{\partial}^*_V)|_{\mathrm{pari}}) = \int_M \mathrm{Td}(T^{1,0}M) \wedge \mathrm{Ch}(V)\,.$$

Dimostrazione del Corollario.
I primi due esempi discendono direttamente dal Teorema di Atiyah-Singer e dalla Proposizione, perché sono entrambi associati a fibrati di Dirac; lo stesso è vero per il terzo esempio se M è, in aggiunta, di Kähler. Se M è complessa ma non di Kähler, allora sappiamo che la formula vale per

l'indice di un operatore di Dirac $\not{D}_V$ associato ad una connessione di Clifford su $E = \Lambda^{0,*}M \otimes V$. Dato che $\not{D}_V - \sqrt{2}(\overline{\partial}_V + \overline{\partial}_V^*)$ è un elemento (dispari e autoaggiunto) $A \in C^\infty(M, \mathrm{End}(E))$,

$$A = \left(\begin{array}{c|c} 0 & A_{-+} \\ \hline A_{+-} & 0 \end{array}\right) , \qquad (A_{+-})^* = A_{-+} \ ,$$

si ha, per (92),

$$\mathrm{ind}\,(\not{D}_V^+) \equiv \mathrm{ind}\,(\sqrt{2}(\overline{\partial}_V + \overline{\partial}_V^*)|_{\mathrm{pari}} + A_{+-}) = \mathrm{ind}\,(\sqrt{2}(\overline{\partial}_V + \overline{\partial}_V^*)|_{\mathrm{pari}})$$

ed il risultato segue applicando Atiyah-Singer e la Proposizione al membro a sinistra.

20. **Spazi di Sobolev**

20.1. **Spazi di Sobolev sul toro T^n.**

Sia $T^n = \mathbb{R}^n/(2\pi\mathbb{Z})^n$. Per definizione $H_k(T^n)$ è il completamento di $C^\infty(T^n)$ rispetto alla norma

$$\|f\|_k^2 = \sum_{|s|\leq k} \int_{T^n} |D^\alpha f|^2 dx$$

dove $D^\alpha = (\frac{1}{\sqrt{-i}}\frac{\partial}{\partial x_1})^{\alpha_1} \dots (\frac{1}{\sqrt{-i}}\frac{\partial}{\partial x_n})^{\alpha_n}$.

Il modo migliore per studiare $H_k(T^n)$ è tramite le serie di Fourier. Ricordiamo che la serie di Fourier di $f \in C^\infty(T^n)$ è

$$f(x) = \sum a_\nu e^{i\nu\cdot x}$$

con

$$a_\nu = \hat{f}(\nu) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{T^n} f(x)e^{-i\nu\cdot x}dx \equiv \int_{T^n} f(x)e^{-i\nu\cdot x}\widetilde{dx}.$$

La serie di Fourier di f converge uniformemente ad f con tutte le derivate. I coefficienti $\hat{f}(\nu)$ sono rapidamente decrescenti in ν. Inoltre dal fatto che le funzioni

$$\phi_\nu : x \to \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}} e^{i\nu\cdot x}$$

costituiscono una base ortonrmale di $L^2(T^n)$ segue l'identità di Parseval:

$$\int_{T^n} |f|^2\widetilde{dx} = \sum_\nu |\hat{f}(\nu)|^2.$$

Possiamo allora scrivere:

$$\int_{T^n} |D^\alpha f|^2\widetilde{dx} = \sum_\nu |\widehat{D^\alpha f}(\nu)|^2.$$

Siccome

$$\widehat{D^\alpha f}(\nu) = \int_{T^n} D^\alpha f e^{-ix\cdot\nu}\widetilde{dx} =$$

$$\int_{T^n} \nu^\alpha f e^{-ix\cdot\nu}\widetilde{dx} = \nu^\alpha \hat{f}(\nu)$$

abbiamo in definitiva

$$\sum_{|\alpha|\leq k}\int_{T^n} |D^\alpha f|^2\widetilde{dx} = \sum_{|\alpha|\leq k}\sum_\nu |\nu^\alpha|^2|\hat{f}(\nu)|^2 =$$

$$= \sum_\nu (\sum_{|\alpha|\leq k} |\nu^\alpha|^2|)|\hat{f}(\nu)|^2.$$

Osserviamo ora che $\forall k \geq 0$ esiste C_k tale che

$$\sum_{|\alpha|\leq k} |\nu^\alpha|^2 \leq (1+|\nu|^2)^k \leq C_k(\sum_{|\alpha|\leq k} |\nu^\alpha|^2)\,.$$

Ma allora $\|\ \|_k$ è equivalente alla norma

$$\|f\|_k^2 = \sum_\nu (1+|\nu|^2)^k|\hat{f}(\nu)|^2\,;$$

che è associata a sua volta al prodotto scalare:

$$< f, g >_k = \sum_\nu (1+|\nu|^2)^k \hat{f}(\nu)\overline{\hat{g}(\nu)}$$

Vale il seguente fondamentale risultato:

Teorema 19. *Sia $M = T^n = \mathbb{R}^n/(2\pi\mathbb{Z})^n$.*
1. *Si ha un'inclusione continua $C^k(M) \hookrightarrow H_k(M)$, $\forall k \geq 0$.*
2. *[Immersione di Sobolev] Se $s > \frac{n}{2} + k$ allora siha un'inclusione continua $H_s(M) \hookrightarrow C^k(M)$.*
3. *[Lemma di Rellich] Se $s > s' \Rightarrow H_s(M) \hookrightarrow H_{s'}(M)$ e l'immersione è un operatore compatto.*

I tre risultati si dimostrano facendo uso della teoria delle serie di Fourier. Per i dettagli vi rimando, ad esempio, a Griffiths-Harris *Principles of Algebraic Geometry* oppure al libro di Roe *Elliptic operators, topology and asymptotic methods.*
Esattamente lo stesso risultato vale per funzioni a valori vettoriali $s : T^n \to \mathbb{C}^\ell$.

20.2. **Spazi di Sobolev su una varietà differenziabile compatta.**

Consideriamo un fibrato vettoriale E complesso su M. Fissiamo una metrica su E e una connessione $\nabla^E \equiv \nabla$. Consideriamo:

$$\|s\|_k^2 = \sum_{j\leq k} \int_M \|\nabla^j s\|^2 \mathrm{dvol}_M \tag{93}$$

dove

$$\begin{aligned} &\|\nabla^0 s\|^2 =< s, s >_E \\ &\|\nabla^1 s\|^2 =< \nabla^E s, \nabla^E s >_{T^*M\otimes E} \\ &\|\nabla^2 s\|^2 =< \nabla^{T^*M\otimes E}\nabla^E s, \nabla^{T^*M\otimes E}\nabla^E s >_{T^*M\otimes T^*M\otimes E} \\ &\text{etc...} \end{aligned} \tag{94}$$

Si noti che questa norma è associata ad un ovvio prodotto scalare:

$$\|s\|_k^2 =< s, s >_k \ .$$

Definiamo gli spazi di Sobolev:
$H_k(M,E)$ è il completamento di $C^\infty(M,E)$ nella norma $\|.\|_k$. $H_0(M,E) = L^2(M,E)$ per definizione. $H_k(M,E)$ è quindi uno spazio di Hilbert. Definiamo anche $C^k(M,E)$ come il completamento di $C^\infty(M,E)$ rispetto alla norma

$$\|s\|_{C^k} := \max_{0\leq j\leq k}\|\nabla^j u\|_\infty \ .$$

Se $M = T^n$ ed $E = T^n \times \mathbb{C}$ allora una sezione s di $C^\infty(M,E)$ è semplicemente una funzione $s : T^n \to \mathbb{C}$ e si ha, sommando su indici ripetuti:

$$\nabla s = du = \partial_j u dx^j \ , \quad \nabla\nabla u = \partial_i\partial_j u dx^i \otimes dx^j \ , \quad \nabla^j s = \frac{\partial^{|\alpha\|} u}{\partial x^\alpha} dx^{\alpha_1} \otimes dx^{\alpha_k}$$

con $|\alpha| = j$. Ritroviamo quindi le precedenti definizioni.

Proposizione 21. *Se M è compatta, allora le norme di Sobolev* (93) *associate a due differenti scelte di metriche riemanniane, metriche hermitiane e connessioni, risultano equivalenti.*
Inoltre ognuna di queste norme è equivalente a sua volta alla norma associata al prodotto scalare

$$< s, s' >_k := \sum_j < (\psi_j s)\circ\phi_j^{-1}, (\psi_j s')\circ\phi_j^{-1} >_k \tag{95}$$

In questa formula (U_j, ϕ_j) *è un altante per* M *che è banalizzante per* E *e con la proprietà che l'immagine di* ϕ_j *è tutta contenuta in un dominio fondamentale per* $T^n = \mathbb{R}^n/(2\pi\mathbb{Z}^n)$*;* $\{\psi_j^2\}$ *è una partizione dell'unità subordinata a* $\{U_j\}$*.*

La dimostrazione della proposizione non è difficile ma è un minimo laboriosa e per brevità la omettiamo. In alcuni testi trovate la (95) come definizione, corredata con la dimostrazione che scelte diverse producono norme equivalenti.
Riducendosi al caso del toro si dimostra senza difficoltà il seguente importante

Teorema 20. *Sia* $n = dim\ M$*.*
1. Si ha un'inclusione continua $C^k(M, E) \hookrightarrow H_k(M, E)$*,* $\forall k \geq 0$.
2. Se $s > \frac{n}{2} + k$ *allora si ha un'inclusione continua* $H_s(M, E) \hookrightarrow C^k(M, E)$*. [Immersione di Sobolev]*
3. Se $s > s' \Rightarrow H_s(M, E) \hookrightarrow H_{s'}(M, E)$ *e l'immersione è un operatore compatto. [Lemma di Rellich]*

21. **Proprietà analitiche degli operatori di Dirac**

21.1. **Disuguaglianza di Gårding.**

Sia M una varietà compatta e senza bordo, e si fissi su di essa una metrica riemanniana g. Denotiamo anche con $\langle\cdot,\cdot\rangle^{TM}$ questa metrica e con con $\langle\cdot,\cdot\rangle^{T^*M}$ la metrica da questa indotta su T^*M. Sia poi E un fibrato di $\mathrm{Cl}(M)$-moduli unitari di rango k, con metrica $\langle\cdot,\cdot\rangle^{E}$, e sia ∇^E una connessione di Clifford su E. Abbiamo visto nella sezione precedente che per ogni intero non negativo r, è possibile definire l'r-esimo spazio di Sobolev di sezioni di E, $H_r(M,E)$: $H_r(M,E)$ è il completamento di $C^\infty(M,E)$ nella norma

$$\|s\|_r^2 := \sum_{j=0}^{r}\int_M \langle\nabla^j s, \nabla^j s\rangle d\,\mathrm{vol}, \tag{96}$$

dove $\nabla^0 s := s$, $\nabla^1 s := \nabla^E s$, $\nabla^2 s := \nabla^{T^*M\otimes E}\nabla^E s$ e così via, e dove le parentesi angolari all'interno dell'integrale indicano la metrica naturale su $T^*M^{\otimes j}\otimes E$ indotta da $\langle\cdot,\cdot\rangle^{T^*M}$ e $\langle\cdot,\cdot\rangle^{E}$. Per brevità, e quando ciò non generi confusione, porremo $H_r := H_r(M,E)$ ed $H := H_0 = L^2(M,E)$. Come si verifica facilmente, ogni H_r è uno spazio di Hilbert con il prodotto scalare $(\cdot|\cdot)_r$ definito a partire dalla (96) per polarizzazione e densità. Porremo anche $(\cdot|\cdot) = (\cdot|\cdot)_0$.

Sia $D\!\!\!/$ l'operatore definito da ∇^E e dall'azione c di $\mathrm{Cl}(M)$ su E; allora, per quanto visto nelle lezioni precedenti, $D\!\!\!/$ con dominio uguale a $C^\infty(M,E)$ è un operatore densamente definito e simmetrico sullo spazio di Hilbert H. Inoltre, come già osservato, si può pensare c come una sezione del fibrato $\mathrm{Hom}(T^*M\otimes E, E)$, e se allora $\|\cdot\|_m$ indica la norma operatoriale su $\mathrm{Hom}(T^*_mM\otimes E_m, E_m)$, si vede facilmente che, per la compattezza di M, la quantità $\|c(m)\|_m$ è limitata: infatti, localmente $c(m)$ è una matrice i cui elementi dipendono in maniera C^∞ da m, e la norma $\|\cdot\|_m$ è maggiorata da una norma indipendente da m. Indicando allora con a il massimo di tale quantità si ottiene, per ogni sezione $s\in C^\infty(M,E)$,

$$\|D\!\!\!/ s\|_0^2 = \int_M \langle c(\nabla^E s), c(\nabla^E s)\rangle d\,\mathrm{vol} \le a^2\int_M \langle\nabla^E s, \nabla^E s\rangle d\,\mathrm{vol} \le a^2\|s\|_1^2. \tag{97}$$

Vale poi una disuguaglianza che è, essenzialmente, l'inversa di questa.

Teorema 21 (Gårding)**.** *Esiste una costante $C_0>0$ tale che, per ogni $s\in C^\infty(M,E)$, si ha*

$$\|s\|_1 \le C_0(\|D\!\!\!/ s\|_0 + \|s\|_0).$$

Proof. Ricordiamo la *formula di Bochner-Weitzenbrock-Lichnerowitz*:

$$D\!\!\!/^2 = \nabla^*\nabla + \Omega_c^E,$$

dove ∇^* denota l'aggiunto formale di $\nabla = \nabla^E$, e dove, se $\{e_i\}$ è una base locale di TM, ed $\{e^i\}$ è la relativa base duale,

$$\Omega_c^E(s) = \frac{1}{2}\sum_{i,j} c(e^i)c(e^j)\Omega^E(e_i,e_j)s.$$

Si ha allora, per la simmetria di $D\!\!\!/$ (e indicando con $\|\cdot\|_0$ anche la norma di $H_0(M, T^*M\otimes E)$),

$$\|D\!\!\!/ s\|_0^2 = (D\!\!\!/^2 s|s) = \|\nabla s\|_0^2 + (\Omega_c^E s|s),$$

da cui, essendo $\Omega_c^E\in C^\infty(M,\mathrm{End}(E))$ limitato, come operatore su H, per la compattezza di M (con argomento identico a quello usato sopra per c),

$$\|\nabla s\|_0^2 \le \|D\!\!\!/ s\|_0^2 + |(\Omega_c^E s|s)| \le C(\|D\!\!\!/ s\|_0^2 + \|s\|_0^2),$$

con $C > 0$ costante opportuna. Essendo allora $\|\nabla s\|_0^2 = \|s\|_1^2 - \|s\|_0^2$, si ha

$$\|s\|_1 \leq (C\|\not{D}s\|_0^2 + (C+1)\|s\|_0^2)^{1/2} \leq C_0(\|\not{D}s\|_0 + \|s\|_0),$$

avendo usato $\sqrt{a^2+b^2} \leq a+b$, $a, b > 0$, ed avendo posto $C_0 := \sqrt{C+1}$. □

Più in generale, vale il risultato seguente, di cui omettiamo la dimostrazione.

Teorema 22. *Per ogni intero non negativo r, esiste una costante $C_r > 0$ tale che, per ogni $s \in C^\infty(M, E)$, si ha*

$$\|s\|_{r+1} \leq C_r(\|\not{D}s\|_r + \|s\|_r). \tag{98}$$

Proof. Procediamo per induzione su r. Per $r = 0$ sappiamo che il risultato è vero. Supponiamolo vero per r e dimostriamolo per $r+1$. Utilizzando una partizione dell'unità e la località di $\not{D}$ possiamo supporre che s abbia supporto in una carta coordinata. Dalla definizione stessa di spazio di Sobolev sappiamo che esiste A_1 tale che

$$\|s\|_{r+1} \leq A_1(\sum \|\partial_j s\|_r)$$

Per ipotesi induttiva esiste C_{r-1} tale che

$$\|\partial_j s\|_r \leq C_{r-1}(\|\not{D}\partial_j s\|_{r-1} + \|\partial_j s\|_{r-1}).$$

Inoltre, sempre dalla definizione di Spazio di Sobolev, sappiamo che esiste A_2 tale che $\|\partial_j s\|_{r-1} \leq A_2\|s\|_r$. Ora, il commutatore $[\not{D}, \partial_j]$, che è a priori un operatore differenziale del secondo ordine, è di fatto un operatore del primo ordine perché $\sigma_2([\not{D}, \partial_j]) = 0$; infatti $\sigma_2([\not{D}, \partial_j])(\xi_m) = c(m)(\xi_m)\xi_m^j - \xi_m^j c(m)(\xi_m) = 0$. Ne segue che $[\not{D}, \partial_j]$ è limitato come operatore da H_r a H_{r-1}. Abbiamo allora

$$\begin{aligned}\|\not{D}\partial_j s\|_{r-1} &\leq \|\partial_j \not{D}s\|_{r-1} + \|[\not{D}, \partial_j]s\|_{r-1}\\ &\leq A_2\|\not{D}s\|_r + A_3\|s\|_r\end{aligned}$$

Concludiamo che vale la disuguaglianza

$$\|s\|_{r+1} \leq nA_1C_{r-1}(A_2\|\not{D}s\|_r + (A_2 + A_3)\|s\|_r)$$

e tale disuguaglianza implica immediatamente la tesi.

□

21.2. **Operatori di Dirac generalizzati.**

Supponiamo che $D : C^\infty(M, E) \to C^\infty(M, E)$ sia un operatore differenziale del primo ordine formalmente autoaggiunto con la proprietà che

$$D^2 = \nabla^*\nabla + B\,, \quad B \in C^\infty(M, \mathrm{End}(E))$$

dove, come sopra, ∇^* denota l'aggiunto formale di $\nabla = \nabla^E$. È ovvio che la dimostrazione della disuguaglianza di Gårding funziona con minime modifiche per un qualsiasi tale operatore. Di fatto, non è difficile verificare che la disuguaglianza di Gårding vale per un qualsiasi operatore differenziale del primo ordine D formalmente autoaggiunto con la proprietà che

$$D^2 = \nabla^*\nabla + B\,, \quad \text{con} \quad B \in \mathrm{Diff}^1(M, E), \;\; B = B^*.$$

Vediamolo.

Possiamo scrivere, per la simmetria di D,

$$\|\not{D}s\|_0^2 = (\not{D}^2 s|s) = \|\nabla s\|_0^2 + (Bs|s).$$

Per Cauchy-Schwarz e per il fatto che B è differenziale del primo ordine vediamo che esiste C_1 tale che

$$\|\nabla s\|_0^2 \leq C_1(\|\not{D}s\|_0^2 + \|s\|_0\|s\|_1) \tag{99}$$

Abbiamo già osservato che $\|\nabla s\|_0^2 = \|s\|_1^2 - \|s\|_0^2 = \|s\|_1^2 - \|s\|_0\|s\|_0$, e quindi $\|\nabla s\|_0^2 \geq \|s\|_1^2 - \|s\|_0\|s\|_1$; utilizzando (99) abbiamo allora che

$$\|Ds\|_0^2 \geq C\|s\|_1^2 - C'\|s\|_0\|s\|_1$$

per opportune costanti C, C'. Ora, dato $\epsilon > 0$ esiste $K(\epsilon) \equiv K > 0$ tale che $ab < \epsilon a^2 + Kb^2$ per ogni $a, b > 0$. Abbiamo allora che

$$C'\|s\|_0\|s\|_1 \leq \frac{1}{2}C\|s\|_1^2 + K(\frac{1}{2})\|s\|_0^2$$

e quindi

$$\|Ds\|_0^2 \geq \frac{1}{2}C\|s\|_1^2 - K(\frac{1}{2})\|s\|_0^2$$

che ci dà immediatamente la disuguaglianza di Gårding per un operatore D come sopra. È anche facile vedere che le disuguaglianze (98) continuano a valere per un tale operatore.

Definizione 28. Un operatore differenziale del primo ordine D, $D : C^\infty(M, E) \to C^\infty(M, E)$, formalmente autoaggiunto e con la proprietà che

$$D^2 = \nabla^*\nabla + B\,, \quad \text{con} \quad B \in \mathrm{Diff}^1(M, E), \;\; B = B^* \tag{100}$$

è detto un **operatore di Dirac generalizzato**.

Continueremo a denotare un tale operatore con il simbolo $\not{D}$, a meno che ciò generi confusione.

Esempio.
Sia M una varietà complessa. L'operatore $\sqrt{2}(\partial + \overline{\partial})$ su $\Omega^{(0,*)}(M) \equiv C^\infty(M, \Lambda^{(0,*}M)$ è un operatore di Dirac generalizzato; infatti abbiamo visto che $\sqrt{2}(\overline{\partial} + \overline{\partial}^*) = \not{D} + A$ con $\not{D}$ un operatore di Dirac associato ad un fibrato di Clifford. Quindi

$$2(\overline{\partial} + \overline{\partial}^*)^2 = \nabla^*\nabla + \Omega + A^2 + \not{D}A + A\not{D} = \nabla^*\nabla + B$$

con $B = \not{D}A + A\not{D} + \Omega + A^2$. Ovviamente la costante 2 è inessenziale.
Si può anche verificare direttamente, a mano, che $\overline{\partial} + \overline{\partial}^*$ è un operatore che gode della proprietà (100), senza parlare di moduli di Clifford ed operatori di Dirac: trovate i dettagli a pagina 97 di Griffiths-Harris (l'identità di tipo (100) è chiamata in quel libro un'identità di tipo Weitzenbock). Di fatto questa identità è dimostrata in Griffiths-Harris per l'operatore $\overline{\partial} + \overline{\partial}^*$ su $\Omega^{(p,*)}(M) \equiv C^\infty(M, \Lambda^{(p,*}M)$ con p fissato. Concludiamo che vale il seguente importante risultato:

se M è una varietà complessa allora l'operatore $\overline{\partial} + \overline{\partial}^*$ su $\Omega^{(p,*)}(M)$ è un operatore di Dirac generalizzato.

21.3. **Chiusura di $\not{D}$.**

Definizione 29. Il *grafico* di $\not{D}$ è il sottospazio di $H \oplus H$

$$G := \{(s, \not{D}s) : s \in C^\infty(M, E)\}.$$

Naturalmente, tale definizione si può ripetere per ogni operatore densamente definito su uno spazio di Hilbert H, sostituendo a $C^\infty(M, E)$ il dominio dell'operatore considerato. Il lemma seguente afferma che $\not{D}$ è un operatore *chiudibile*.

Lemma 8. Sia $\overline{G}$ la chiusura di G nella norma di $H \oplus H$. Allora $\overline{G}$ è ancora il grafico di un operatore densamente definito su H.

Proof. $\overline{G}$ è ancora un sottospazio di $H \oplus H$, e quindi, per linearità, basta verificare che se $(0, y) \in \overline{G}$, allora $y = 0$. Sia allora $(x_j)_{j \in \mathbb{N}} \subseteq C^\infty(M, E)$ una successione tale che $(x_j, \not{D}x_j)$ converga a $(0, y)$ in $H \oplus H$, cioè $x_j \to 0$ e $\not{D}x_j \to y$ in $L^2(M, E)$; allora, dalla simmetria di $\not{D}$ segue, per ogni $s \in C^\infty(M, E)$,

$$(y|s) = \lim_{j \to +\infty} (\not{D}x_j|s) = \lim_{j \to +\infty} (x_j|\not{D}s) = 0, \tag{101}$$

da cui $y = 0$. □

Osservazione. Nella dimostrazione precedente, non si è mai usato il fatto che $\not{D}$ è un operatore di Dirac, e pertanto la si può ripetere, mutatis mutandi, per ogni operatore simmetrico e densamente definito su uno spazio di Hilbert.
Similmente, se P è un qualsiasi operatore differenziale di ordine k, allora P con dominio $C^\infty(M, E)$, è un operatore chiudibile (basterà utilizzare l'aggiunto formale di P, P^*, nella seconda uguaglianza in (101)).

L'operatore di cui $\overline{G}$ è il grafico è detto *chiusura* di $\not{D}$, e verrà indicato con $\overline{\not{D}}$. Il suo dominio è per definizione il sottospazio $\mathrm{Dom}\left(\overline{\not{D}}\right)$ di H degli $x \in H$ per cui esiste $y \in H$ tale che $(x, y) \in \overline{G}$, cioè

$$\mathrm{Dom}\left(\overline{\not{D}}\right) = \{x \in H : \exists (x_j)_{j \in \mathbb{N}} \subseteq C^\infty(M, E), y \in H \text{ per cui } x_j \to x, \not{D}x_j \to y\},$$

e se $(x, y) \in \overline{G}$, si pone $\overline{\not{D}}x := y$.

Dalle diseguaglianze dimostrate sopra si ottiene allora $\mathrm{Dom}\left(\overline{\not{D}}\right) = H_1$: se $x \in H_1$ e $x_j \to x$, in H_1, $x_j \in C^\infty$, allora dalla (97) segue che $(\not{D}x_j)_{j \in \mathbb{N}}$ è convergente in H, e pertanto $x \in \mathrm{Dom}\left(\overline{\not{D}}\right)$, viceversa se $(x, y) \in \overline{G}$ e $(x_j, \not{D}x_j) \to (x, y)$ in $H \oplus H$, $x_j \in C^\infty$, dal teorema di Gårding segue che $(x_j)_{j \in \mathbb{N}}$ è di Cauchy in H_1, e quindi converge, in H_1, ad una $\tilde{x}$, ma poiché $\|\cdot\|_1$ è più forte di $\|\cdot\|_0$, $x = \tilde{x} \in H_1$. È poi chiaro che $\overline{\not{D}}$ è anch'esso simmetrico.

21.4. **Soluzioni deboli: enunciati.**

Siano $x, y \in C^\infty$, con $\not{D}x = y$, allora, per ogni $s \in C^\infty$,

$$(x|\not{D}s) = (\not{D}x|s) = (y|s),$$

ma ha senso considerare l'eguaglianza tra il primo e l'ultimo membro per arbitrari $x, y \in H$. Questo conduce alla nozione di soluzione debole per l'equazione $\not{D}x = y$.

Definizione 30. Siano $x, y \in L^2(M, E)$. Diremo che $\not{D}x = y$ *debolmente*, se, per ogni $s \in C^\infty(M, E)$, vale $(x|\not{D}s) = (y|s)$. [40]

In realtà, ogni soluzione debole è una soluzione forte per l'equazione associata alla chiusura di $\not{D}$.

Teorema 23. *Siano $x, y \in L^2(M, E)$ tali che $\not{D}x = y$ debolmente. Allora $x \in \mathrm{Dom}\left(\overline{\not{D}}\right)$ e $\overline{\not{D}}x = y$.*

Prima di dare la dimostrazione di questo teorema, abbiamo bisogno di alcune definizioni e risultati riguardanti la regolarizzazione di operatori di Dirac.

---

[40] In generale, se $P : C^\infty(M, E) \to C^\infty(M, E)$ è un operatore differenziale di ordine k, allora $Px = y$ *debolmente*, se, per ogni $s \in C^\infty(M, E)$, vale $(x|P^*s) = (y|s)$, con P^* l'aggiunto formale di P.

21.5. **Operatori regolarizzanti.**

Se E_1, E_2 sono fibrati vettoriali su M, e si indicano con $p_i : M \times M \to M$, $i = 1, 2$, le proiezioni canoniche, si può considerare il fibrato $\mathrm{HOM}(E_1, E_2) := p_1^*(E_2) \otimes p_2^*(E_1^*)$, la cui fibra su (m_1, m_2) è $\mathrm{HOM}(E_1, E_2)_{(m_1,m_2)} = (E_2)_{m_1} \otimes (E_1^*)_{m_2} \simeq \mathrm{Hom}((E_1)_{m_2}, (E_2)_{m_1})$.

Definizione 31. Siano E_i, $i = 1, 2$, fibrati vettoriali su M. Un operatore lineare $F : L^2(M, E_1) \to L^2(M, E_2)$ è detto *regolarizzante* se esiste $K_F \in C^\infty(M \times M, \mathrm{HOM}(E_1, E_2))$ tale che, per ogni $s \in L^2(M, E_1)$,

$$(Fs)(m_1) = \int_M K_F(m_1, m_2)s(m_2)d\,\mathrm{vol}(m_2).$$

K_F è detto *nucleo* di F.

Elenchiamo, senza dimostrazione, le principali proprietà di un operatore regolarizzante su una varietà compatta, tutte di facile verifica:

- F è limitato in $L^2(M, E)$.
  (Osserviamo che se M non è compatta non avremo, in generale, limitatezza.)
- L'immagine di F è contenuta in $C^\infty(M, E)$.
- Per ogni intero $r \geq 0$ l'operatore F definisce un operatore limitato $L^2(M, E) \to H_r(M, E)$.
- Se $E_1 = E_2 = E$, e se $K_F(m_2, m_1)^* = K_F(m_1, m_2)$ (aggiunto fatto rispetto ai prodotti scalari $\langle \cdot, \cdot \rangle_{m_1}^E$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle_{m_2}^E$, su E_{m_1}, E_{m_2}, rispettivamente), allora F è un operatore autoaggiunto su $L^2(M, E)$.

21.6. **Mollificatori di Friedrichs.**

Definizione 32. Un *mollificatore di Friedrichs* per $\not{D}$ è una famiglia $(F_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ di operatori regolarizzanti su $L^2(M, E)$ tali che:

(i) $(F_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ è uniformemente limitata in norma: $\sup_{\varepsilon>0} \|F_\varepsilon\| < +\infty$;
(ii) $([\not{D}, F_\varepsilon])_{\varepsilon>0}$ si estende ad una famiglia uniformemente limitata di operatori, come in (i);
(iii) per $\varepsilon \to 0$, F_ε converge debolmente all'identitá su $L^2(M, E)$, cioè per ogni $x, y \in L^2(M, E)$, $\lim_{\varepsilon\to 0}(x|F_\varepsilon y) = (x|y)$ (in simboli $F_\varepsilon \rightharpoonup \mathbb{I}$).

Notiamo che, poiché chiaramente sia F_ε, che $\not{D}$, mandano sezioni C^∞ in sezioni C^∞, il commutatore $[\not{D}, F_\varepsilon]$ è inizialmente definito sul sottospazio denso $C^\infty(M, E)$ di H.

Lemma 9. Esistono sempre mollificatori di Friedrichs autoaggiunti per $\not{D}$.

Proof. Ci limitiamo a dare la definizione di F_ε. Usando una partizione dell'unità, ci si riconduce a definire F_ε sulle sezioni a supporto compatto contenuto in una banalizzazione locale per E; basta quindi definire F_ε sulle funzioni $s \in L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^k)$ a supporto compatto. Sia allora $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ non negativa, radialmente simmetrica (cioè funzione di $|x|$), a supporto contenuto nella palla di raggio 1 centrata nell'origine, e tale che $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi = 1$. Ad esempio, la funzione definita da $\varphi(x) = \exp(-1/(1 - |x|^2)$ per $|x| < 1$, $\varphi(x) = 0$ per $|x| \geq 1$. Sia $\varphi_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-n}\varphi(\varepsilon^{-1}x)$, $x \in \mathbb{R}^n$. Definiamo

$$F_\varepsilon s(x) := \varphi_\varepsilon * s(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(x - y)s(y)dy, \tag{102}$$

per ogni $s \in L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^k)$ a supporto compatto. Utilizzando la trasformata di Fourier, si verificano senza difficoltà le (i) e (iii) della definzione 32, mentre la verifica della (ii) è leggermente più complicata e non la facciamo [41]. L'autoaggiuntezza è conseguenza del fatto che φ è reale e $\varphi(-x) = \varphi(x)$. $\square$

21.7. **Soluzioni deboli: dimostrazione del teorema 23.**

Sia $(F_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ un mollificatore di Friedrichs per $\not{D}$, e si ponga $x_\varepsilon := F_\varepsilon x \in C^\infty(M,E)$, con $x \in H$ tale che $\not{D}x = y$ debolmente. Usando allora l'autoaggiuntezza di F_ε, si ha, per ogni $s \in C^\infty$,

$$\begin{aligned}(\not{D}x_\varepsilon|s) &= (x_\varepsilon|\not{D}s) = (F_\varepsilon x|\not{D}s)\\ &= (x|F_\varepsilon\not{D}s)\\ &= (x|\not{D}F_\varepsilon s) + (x|[F_\varepsilon,\not{D}]s)\\ &= (y|F_\varepsilon s) + (x|[F_\varepsilon,\not{D}]s),\end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio si è tenuto conto del fatto che $F_\varepsilon s \in C^\infty$. Dunque, per la limitatezza di F_ε e $[F_\varepsilon,\not{D}]$, esisterà una costante $A > 0$ tale che $|(\not{D}x_\varepsilon|s)| \leq A\|s\|$ per ogni $s \in C^\infty$, ed ogni $\varepsilon > 0$, cioè $\|\not{D}x_\varepsilon\| \leq A$, $\varepsilon > 0$. Pertanto sia $(\not{D}x_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$, che $(x_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$, sono successioni (generalizzate) limitate in H, da cui, insieme alla diseguaglianza di Gårding, segue che $(x_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ è limitata in H_1, e quindi, a meno di sottosuccessioni, converge debolemente ad un $\tilde{x} \in H_1$ (gli insiemi limitati in uno spazio di Hilbert sono debolmente precompatti (Teorema di Banach-Alouglu)). Poiché poi, l'immersione di H_1 in H_0 è compatta (lemma di Rellich), esiste $\hat{x}$ in H tale che $x_\varepsilon \to \hat{x}$ in norma H_0; deve essere necessariamente $\tilde{x} = \hat{x}$ perché $(\cdot|\cdot)$ è definito positivo. Quindi $x_\epsilon \to \tilde{x}$ in H, con $\tilde{x} \in H_1$. Da $F_\varepsilon \rightharpoonup \mathbb{I}$, segue che $x = \tilde{x}$ e quindi $x \in H_1 = \mathrm{Dom}\left(\overline{\not{D}}\right)$ come si voleva. Essendo $\overline{\not{D}}$ simmetrico, si ha inoltre $(y|s) = (x|\not{D}s) = (\overline{\not{D}}x|s)$, per ogni $s \in C^\infty$, cioè $\overline{\not{D}}x = y$.

21.8. **Operatori illimitati su spazi di Hilbert. Essenziale autoaggiuntezza di $\not{D}$.**

Sia H uno spazio di Hilbert e sia T un operatore lineare densamente definito:

$$T : \mathrm{Dom}(T) \subset H \to H\,.$$

L'aggiunto (analitico funzionale) di T è definito come segue:

$$\mathrm{Dom}(T^*) := \{y \in H \mid \mathrm{Dom}(T) \ni x \to (Tx|y) \ \text{ è limitato}\}$$

Sia $y \in \mathrm{Dom}(T^*)$; allora, per densità di $\mathrm{Dom}(T)$, il funzionale lineare $\mathrm{Dom}(T) \ni x \to (Tx|y)$ può essere esteso a tutto H e per il teorema di rappresentazione di Riesz esiste $z \in H$ tale che

$$(Tx|y) = (x|z) \quad \forall x \in H.$$

Poniamo, per definizione,

$$T^*y = z$$

e otteniamo che

$$(Tx,y) = (x,T^*y) \ \ \forall x \in \mathrm{Dom}(T), \forall y \in \mathrm{Dom}(T^*)\,.$$

È facile verificare che il grafico di T^*, $\mathrm{Graph}(T^*)$, è chiuso; quindi T^* è un operatore chiuso. Supponiamo ora che T sia simmetrico sul suo dominio, $(Tx|y) = (x,Ty)$ per ogni $x,y \in \mathrm{Dom}(T)$. Abbiamo visto che T è allora chiudibile e sia $\overline{T}$ la sua chiusura. È ovvio che $\overline{T}$ è la più piccola estensione chiusa di T ed è per questa ragione che $\overline{T}$ è spesso chiamata l' *estensione chiusa minimale* di T. Si ha, da quanto osservato fino ad ora, che

$$\mathrm{Dom}(\overline{T}) \subset \mathrm{Dom}(T^*)$$

e questa inclusione può essere propria.

---

[41] ci si riduce a considerare localmente $[a(x)\partial_j, F_\epsilon]$ e questo operatore si scrive esplicitamente utilizzando l'integrazione per parti.

Definizione 33. Un operatore simmetrico densamente definito T è detto *essenzialmente autoaggiunto* se $\mathrm{Dom}(\overline{T}) = \mathrm{Dom}(T^*)$.

Se T è essenzialmente autoaggiunto allora è chiaro che la sua chiusura è un operatore autoaggiunto, e cioè $\overline{T} = \overline{T}^*$.

Come corollario del Teorema 23 abbiamo il seguente importante risultato, dovuto a Chernoff:

Corollario 9. *Sia $\not{D}$ un operatore di Dirac generalizzato. Allora $\not{D}$ con dominio denso $C^\infty(M,E) \subset L^2(M,E)$ è essenzialmente autoaggiunto. Conseguentemente, l'operatore $\overline{D}$ è autoaggiunto.*

Proof. Per definizione $\not{D}$ è simmetrico sul suo dominio. Dalle definizioni segue immediatamente che $\not{D}x = y$ debolmente se e soltanto se $x \in \mathrm{Dom}(D^*)$ e $D^*x = y$, Il Teorema 23 implica quindi che $\mathrm{Dom}(D^*) \subseteq \mathrm{Dom}\left(\overline{\not{D}}\right)$, ma poiché è sempre vero che $\mathrm{Dom}\left(\overline{\not{D}}\right) \subseteq \mathrm{Dom}(D^*)$, e cioè che D^* estende $\overline{\not{D}}$, ne segue che $\mathrm{Dom}(D^*) = \mathrm{Dom}(\overline{\not{D}})$. □

Questo risultato vale più in generale se (M,g) è una varietà riemanniana *completa.*

Ci sono invece esempi in cui $\mathrm{Dom}(D^*)$ include propriamente $\mathrm{Dom}(\overline{\not{D}})$. Diamo un esempio. Sia M una varietà spin con bordo con metrica riemanniana g_M di tipo prodotto in un intorno-collare del bordo; sia $N := \partial M$ il bordo; consideriamo il cono $C(N)$ su N, $C(N) = [0,1] \times N/\{0\} \times N$ e la sua parta regolare $C^0(N) := (0,1)_x \times N$ con metrica $g_{C^0(N)}$ di tipo conico $dx^2 + x^2 g_N$; l'unione $X := M \cup_N C^0(N)$ è una varietà non-compatta; utilizzando g_M e $g_{C^0(N)}$ vediamo facilmente che X può essere dotata di una metrica riemanniana g_X che è per costruzione di tipo conico nella parte che abbiamo aggiunto. Tale metrica è incompleta. Si può dimostrare che l'operatore spin-Dirac di (X, g_X) *non* è essenzialmente autoaggiunto.

Un secondo corollario delle argomentazioni che sono state usate fino ad ora è il seguente risultato di regolarità per le soluzioni dell'equazione $\overline{\not{D}}x = 0$.

Teorema 24. *(Regolarità ellittica) Se $x \in H_1(M,E) = \mathrm{Dom}(\overline{D})$ e $\overline{\not{D}}x = 0$, allora $x \in C^\infty(M,E)$* [42]

Proof. Sia $x \in H_1$ tale che $\overline{\not{D}}x = 0$. Dimostreremo che $x \in H_k(M,E)$ $\forall k \in \mathbb{N}$; per il teorema di immersione di Sobolev seguirà che $x \in C^\infty(M,E)$.
Supponiamo di sapere che $x \in H_{k-1}$. Utilizzando la definizione di F_ϵ data nella (102) è possibile dimostrare che F_ϵ e $[\not{D}, F_\epsilon]$ si estendono ad operatori uniformemente limitati da H_ℓ a H_ℓ per ogni $\ell \in \mathbb{N}$ (e non solo per $\ell = 0$). La disuguaglianza di Gårding ci dice che

$$\|F_\epsilon x\|_k \leq C_{k-1}(\|F_\epsilon\|_{k-1} + \|DF_\epsilon x\|_{k-1}\,.$$

Per l'ipotesi otteniamo che

$$\|F_\epsilon x\|_k \leq C_{k-1}(\|F_\epsilon\|_{k-1} + \|[F_\epsilon, \not{D}]x\|_{k-1}$$

e quindi la successione generalizzata $\{F_\epsilon\}$ è limitata in H_k. Ne segue che $F_\epsilon x$ converge debolmente a $\tilde{x} \in H_k$. Ma dato che per le proprietà dei mollificatori di Friedrichs si ha anche che $F_\epsilon x$ converge a x in $H = L^2(M,E)$, abbiamo che $x = \tilde{x} \in H_k$.

□

[42] e, chiaramente, $Dx = 0$.

21.9. **Proprietà spettrali degli operatori di Dirac.**

In questa sottosezione dimostreremo uno dei risultati fondamentali sugli operatori di Dirac generalizzati su varietà compatte.

Proposizione 22. *Vale la decomposizione in somma diretta $H \oplus H = \overline{G} \oplus J\overline{G}$, dove J è l'operatore limitato su $H \oplus H$ definito da $J(x,y) := (y,-x)$.*

Proof. Poiché evidentemente $\overline{G}^{\perp} = G^{\perp}$, basta dimostrare che $G^{\perp} = J\overline{G}$. Indichiamo con $(\cdot) \bullet (\cdot)$ il prodotto scalare in $H \oplus H$. Sia $(x,y) \in \overline{G}$ con $x_j \to x$, $\not{D}x_j \to y$, $x_j \in C^{\infty}$, allora , per ogni $s \in C^{\infty}$,

$$J(x_j, \not{D}x_j) \bullet (s, \not{D}s) = (\not{D}x_j, -x_j) \bullet (s, \not{D}s) = (\not{D}x_j|x) - (x_j|\not{D}x) = 0,$$

e quindi $J\overline{G} \subseteq G^{\perp}$. Viceversa, sia $(x,y) \in G^{\perp}$, allora, sempre per ogni $s \in C^{\infty}$,

$$0 = (x,y) \bullet (s, \not{D}s) = (x|s) + (y|\not{D}s),$$

cioè $\not{D}(-y) = x$ debolmente, e quindi $-y \in H_1$ e $(-y,x) = (-y, \overline{\not{D}}(-y)) \in \overline{G}$, e $(x,y) = J(-y,x) \in J\overline{G}$. □

Anche quest'ultimo risultato dipende in realtà soltanto dal fatto che $\overline{\not{D}}$ è un operatore autoaggiunto.

Siamo ora nella posizione di enunciare e dimostrare un importante teorema riguardante le proprietà spettrali dell'operatore autoaggiunto $\overline{\not{D}}$.

Teorema 25. *Esiste una successione $(\lambda_j)_{j\in\mathbb{Z}} \subseteq \mathbb{R}$, ed una decomposizione in somma diretta $L^2(M,E) = \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} K_{\lambda_j}$, tali che*

(i) $K_{\lambda_j} \subseteq C^{\infty}(M,E)$;
(ii) $\dim K_{\lambda_j} < \infty$;
(iii) $|\lambda_j| \to +\infty$ *per* $j \to \pm\infty$;
(iv) $\overline{\not{D}}|_{K_{\lambda_j}}$ *è la moltiplicazione per* λ_j.

Proof. Sia $x \in H$ e si consideri la decomposizione di $(x,0) \in H \oplus H$ in base alla proposizione precedente:

$$(x,0) = (Qx, \overline{\not{D}}Qx) + (\overline{\not{D}}y, -y), \tag{103}$$

con $Qx, y := Px \in H$ vettori opportuni; questo definisce $Q, P : H \to H$ come composizioni di due proiettori di $H \oplus H$. Siamo interessati in particolare a Q. Notiamo innanzitutto che Q è la composizione del proiettore ortogonale su $\overline{G}$ ristretto a $H \oplus 0$, denotato $\Pi_{\overline{G}}$, e del proiettore sul primo addendo della somma $H \oplus H$, denotato Π_1; quindi

$$Q = \Pi_1 \circ \Pi_{\overline{G}} : H \oplus 0 \equiv H \to H \tag{104}$$

Dunque Q è limitato, con norma operatoriale maggiorata da 1 (vero per ogni proiezione). Inoltre è chiaro che $\operatorname{Im} Q \subseteq H_1 = \operatorname{Dom}(\overline{\not{D}})$. Di fatto Q definisce un operatore limitato da $H \equiv H_0$ a H_1, infatti, se $x \in H$ allora per la disuguaglianza di Gårding, che si estende a $\overline{\not{D}}$ e agli elementi del suo dominio, si ha

$$\|Qx\|_1 \leq C_0(\|Qx\|_0 + \|\overline{\not{D}}(Qx)\|_0)$$

Ma $\|\overline{\not{D}}(Qx)\|_0 \leq C_1\|Qx\|_0$ e $\|Qx\|_0 \leq \|x\|_0$ perché Q ha norma operatoriale maggiorata da 1; quindi esiste $C > 0$ tale che $\|Qx\|_1 \leq C\|x\|_0$ e quindi $Q : H \to H_1$ è limitato. Per il Lemma di Rellich ne segue che $Q : H \to H$ è un operatore compatto.

Vediamo ora che Q è positivo, iniettivo e autoaggiunto. Denotiamo come al solito con $\bullet$ il prodotto scalare in $H \oplus H$.

Si ha $(Qx|x) = (Qx, \overline{\not{D}}Qx) \bullet (x,0) = \Pi_{\overline{G}}(x,0) \bullet (x,0) \geq 0$ dato che le proiezioni ortogonali sono operatori positivi.
Per l'iniettività: se $Qx = 0$ allora $\Pi_{\overline{G}}(x,0) = 0_{H\oplus H}$ e quindi $(x,0) \in \overline{G}^{\perp} = J\overline{G}$; ne segue che $x = -\overline{\not{D}}0 = 0$ e quindi Q è iniettivo.
Infine, dato che $\Pi_{\overline{G}}$ è autoaggiunto (è una proiezione ortogonale), abbiamo:
$(Qx|y) = (Qx, \overline{\not{D}}Qx) \bullet (y,0) = \Pi_{\overline{G}}(x,0) \bullet (y,0) = (x,0) \bullet \Pi_{\overline{G}}(y,0) = (x,0) \bullet (Qy, \overline{\not{D}}Qy) = (x|Qy)$
e quindi Q è autoaggiunto.
Riassumendo: abbiamo dimostrato che $Q : H \to H$ è un operatore autoaggiunto, strettamente positivo, compatto e con norma maggiorata da 1.
Applicando a Q il teorema spettrale per operatori compatti autoaggiunti, si ottiene una decomposizione in somma diretta $L^2(M,E) = \bigoplus_{j\in\mathbb{N}} M_{\varrho_j}$, con M_{ϱ_j} autospazio di Q relativo all'autovalore ϱ_j, $\dim M_{\varrho_j} < \infty$ e $0 < \varrho_j \leq 1$, $\varrho_j \to 0$.
Consideriamo innanzitutto $\rho = 1$ e l'autospazio associato $M_{\rho=1}$. Se $Qx = x$ allora dalla decomposizione (103), con $y \in H_1$, vediamo che $\overline{\not{D}}y = 0$ e $\overline{\not{D}}x = -y$ e quindi $x \in \mathrm{Ker}\overline{\not{D}}^2$ da cui $x \in \mathrm{Ker}\overline{\not{D}}$ per la simmetria di $\overline{\not{D}}$. Viceversa, se $x \in \mathrm{Ker}\overline{\not{D}}$ allora $(x,0) = (x, \overline{\not{D}}x)$ e quindi $Qx = x$ che ci dà $x \in M_{\rho=1}$. Concludiamo che

$$\mathrm{Ker}\overline{\not{D}} = M_{\rho=1}$$

e quindi in particolare $\dim \mathrm{Ker}\overline{\not{D}} < \infty$. Per regolarità ellittica abbiamo poi che $\mathrm{Ker}\overline{\not{D}} = \mathrm{Ker}\not{D}$.
Supponiamo ora che $\rho \in (0,1)$ e sia $Qx = \rho x$. Otteniamo allora la decomposizione

$$(x,0) = \rho(x, \overline{\not{D}}x) + (-Dy, y)$$

da cui

$$(\rho - 1)x = \overline{\not{D}}y\,, \quad y = -\rho\overline{\not{D}}x\,. \tag{105}$$

Sia λ tale che $\lambda^2 = (1-\rho)/\rho$ e sia $z = -\frac{1}{\rho\lambda}y$. Allora, utilizzando la seconda equazione in (105), abbiamo che $\overline{\not{D}}x = \lambda z$. Utilizzando invece la prima equazione vediamo che $\overline{\not{D}}z = \lambda x$. Abbiamo allora che $x \pm z$ sono autovettori per $\overline{\not{D}}$ associati agli autovalori $\pm\lambda$. Denotiamo con K_μ un autospazio per $\overline{\not{D}}$ associato all'autovalore μ. Per regolarità ellittica applicata all'operatore di Dirac generalizzato $\not{D} - \mu\,\mathrm{Id}$ abbiamo che $K_\mu \subset C^\infty(M,E)$. Scrivendo $x = \frac{(x+z)}{2} + \frac{(x-z)}{2}$ capiamo che

$$M_\rho \subset K_{-\lambda} \oplus K_\lambda\,.$$

Tuttavia, dato che $L^2(M,E) = \bigoplus_{j\in\mathbb{N}} M_{\varrho_j}$ è facile vedere che si ha

$$M_\rho = K_{-\lambda} \oplus K_\lambda\,.$$

Il teorema segue immediatamente dai risultati che abbiamo dimostrato.

□

Sia μ un autovalore di $\overline{\not{D}}$ e sia v_μ un autovettore associato. Consideriamo l'insieme $\sigma(\overline{\not{D}}) = \{\lambda_j\}$ definito nel Teorema che abbiamo appena dimostrato; deve essere che $\mu \in \sigma(\overline{\not{D}})$ perché altrimenti v_μ non sarebbe esprimibile come somma infinita di elementi in K_{λ_j} [43]. Quindi l'insieme $\sigma(\overline{\not{D}}) = \{\lambda_j\}$ è proprio uguale all'insieme degli autovalori di $\overline{\not{D}}$ e cioè al suo spettro (puntuale). [44]

[43] perché $v_\lambda \perp v_{\lambda_j}$ $\forall j$ se $\mu \neq \lambda_j$ $\forall j$

[44] In generale un operatore di Dirac essenzialmente autoaggiunto su una varietà riemanniana (ad esempio una varietà completa) ha spettro L^2 che è unione dello spettro puntuale, e cioè dell'insieme degli autovalori, e dello spettro continuo, che è l'insieme dei $\lambda \in \mathbb{R}$ che non sono autovalori ma per i quali non esiste un inverso limitato di $(\overline{\not{D}} - \lambda\,\mathrm{Id})$; nel caso di varietà compatte si può dimostrare, ma noi non lo faremo, che lo spettro L^2 è solo puntuale.

21.10. **Calcolo funzionale.**

Sia $\sigma(\overline{\not{D}}) = \{\lambda_j\} \subseteq \mathbb{R}$ lo spettro dell'operatore di Dirac $\overline{\not{D}}$. Se f è una funzione reale limitata su $\sigma(\overline{\not{D}})$ si può definire l'operatore $f(\overline{\not{D}})$ tramite

$$f(\overline{\not{D}})(v_\lambda) := f(\lambda)v_\lambda \text{ con } v_\lambda \in K_\lambda$$

dove K_λ è come sempre l'autospazio relativo all'autovalore λ. Essendo f limitata $f(\overline{\not{D}}) \in \mathcal{L}(L^2, L^2)$ ossia $f(\overline{\not{D}})$ è un operatore limitato in $L^2 \equiv H_0 \equiv H$. Infatti

$$\begin{aligned} \|f(\overline{\not{D}})x\|_0^2 &= \|f(\overline{\not{D}})(\sum_\lambda x_\lambda v_\lambda)\|_0^2 = \|\sum_\lambda x_\lambda f(\lambda)(v_\lambda)\|_0^2 \\ &= \sum_\lambda |x_\lambda|^2 f(\lambda)^2 \leq \sup|f|\|x\|_0 \end{aligned}$$

e quindi

$$\|f(\overline{\not{D}})\|_{H\to H} \leq \sup|f|\,. \tag{106}$$

È anche semplice verificare le due proprietà seguenti:

$$[\overline{\not{D}}, A] = 0 \;\Rightarrow\; [f(\overline{\not{D}}), A] = 0 \tag{107}$$

$$f(x) = xg(x),\; f, g \;\text{ limitate } \;\Rightarrow f(\overline{\not{D}}) = \overline{\not{D}}g(\overline{\not{D}}) \;\text{ in }\; \mathcal{L}(L^2, L^2) \tag{108}$$

(parte dell'enunciato è che il membro a destra è ben definito).
Vale infine la seguente importante proprietà:

$$f(\overline{\not{D}})(C^\infty(M, E)) \subset C^\infty(M, E)\,. \tag{109}$$

Per dimostrare (109) abbiamo bisogno della seguente caratterizzazione di un elemento $x \in C^\infty(M, E)$ in termini della sua espansione

$$\sum_{\lambda \in \sigma(\overline{\not{D}})} x_\lambda$$

nelle autofunzioni di $\overline{\not{D}}$:

Proposizione 23. *Si ha che $x \in L^2(M, E)$ è un elemento di $C^\infty(M, E)$ se e solo se per ogni $k \in \mathbb{N}$ si ha che $\|x_\lambda\||\lambda|^k \to 0$ quando $|\lambda| \to \infty$ (e cioè $\|x_\lambda\|$ è rapidamente decrescente in $|\lambda|$).*

Proof. Dobbiamo verificare che $\sum_\lambda x_\lambda$ converge in H_k per ogni k se e solo se $\|x_\lambda\|$ è rapidamente decrescente in $|\lambda|$. In una direzione è molto semplice: se $\sum_\lambda x_\lambda$ converge in H_k per ogni k allora $\sum \||\lambda|^{2k}\|x_\lambda\| = \|D^k x\|^2 < \infty$ e quindi $\|x_\lambda\|$ è rapidamente decrescente in $|\lambda|$.
Vediamo il viceversa. Assumiamo che $\|x_\lambda\|$ sia rapidamente decrescente in $|\lambda|$ e dimostriamo che $\sum_\lambda x_\lambda$ converge in H_k per ogni k. Applichiamo Cauchy. Abbiamo bisogno del seguente risultato, di interesse intrinseco:
sia $\Lambda > 0$ e sia $N(\Lambda)$ è il numero di autovalori di valore assoluto minore di Λ (contando molteplicità). Allora esiste una costante $C \equiv C(\dim M, \text{rango} E)$ tale che

$$N(\Lambda) \leq C(1 + \Lambda^{\dim M(\dim M+4)/2})\,.$$

Trovate la dimostrazione nel libro di Lawson-Michelson *Spin Geometry*, Theorem 5.8 [45] Assumendo questo risultato (crescita degli autovalori al più polinomiale) possiamo procedere come segue: utilizzando Gårding ed il fatto che $Dx_\lambda = \lambda x_\lambda$ abbiamo che

$$\sum_{m\leq|\lambda|\leq m+\ell} \|x_\lambda\|_k \leq CN(m+\ell)\,\max_{m\leq|\lambda|\leq m+\ell}|\lambda|^k\|x_\lambda\|$$

che ci permette di concludere grazie all'ipotesi (per ogni $\ell \in \mathbb{N}$ si ha che $\|x_\lambda\||\lambda|^\ell \to 0$) e alla stima su $N(m+\ell)$. □

Da questa proposizione e dalla definizione di calcolo funzionale vediamo che vale (109) e cioè che $f(\overline{\not{D}})(C^\infty(M,E)) \subset C^\infty(M,E)$.

21.11. **Operatori di Fredholm.**

Siano B_1 e B_2 sue spazi di Banach e si indichi con $\mathcal{L}(B_1, B_2)$ lo spazio degli operatori lineari e limitati nella topologia indotta dalla norma $||\cdot||$.

Definizione 34. $F \in \mathcal{L}(B_1, B_2)$ si dice di Fredholm se $\dim\mathrm{Ker}F < \infty$ e $\dim \mathrm{coKer}F < \infty$ e si indicherà con $Fred(B_1, B_2)$ l'insieme di tali operatori. Si definisce **indice** di un operatore di Fredholm il numero intero:

$$\mathrm{ind}(F) = \dim\mathrm{Ker}F - \dim \mathrm{coKer}F$$

Le proprietà di $Fred(B_1, B_2)$ sono illustrate dal Teorema che segue:

Teorema 26.
1] Se F è di Fredholm allora l'immagine di F è chiusa. Inoltre F^* è anche di Fredholm e si ha

$$\mathrm{ind}(F) = \dim\mathrm{Ker}F - \dim\mathrm{Ker}F^* = -\mathrm{ind}(F^*).$$

2] $Fred(B_1, B_2)$ è aperto in $\mathcal{L}(B_1, B_2)$ ed inoltre l'applicazione $\mathrm{ind} : Fred(B_1, B_2) \to \mathbb{Z}$ è continua dunque localmente costante.
3] Se $F \in Fred(B_1, B_2)$ e $G \in Fred(B_2, B_3)$ allora $G \circ F \in Fred(B_1, B_3)$ e $\mathrm{ind}(G \circ F) = \mathrm{ind}(G) + \mathrm{ind}(F)$.
4] F è di Fredholm se e solo se F è invertibile modulo compatti (Teorema di Atkinson).
5] Se K è un operatore compatto e F è di Fredholm, allora $F + K$ è di Fredholm e

$$\mathrm{ind}(F + K) = \mathrm{ind}(F)$$

Per la dimostrazione di questo Teorema vi rimando ad esempio al libro di Shubin *Pseudodifferential operators and spectral theory.*

21.12. **Indice di un operatore di Dirac.**

Un operatore di Dirac generalizzato $\not{D}$ definisce un operatore

$$\overline{\not{D}} : H^1(M,E) \to L^2(M,E)$$

che è un operatore di Fredholm. Valgono infatti le seguenti importanti proprietà.
Innanzitutto già sappiamo che

$$\dim(\mathrm{Ker}(\overline{\not{D}})) < \infty \tag{110}$$

Per regolarità ellittica

$$\mathrm{Ker}(\overline{\not{D}}) = \mathrm{Ker}(\not{D})$$

[45] Ma per far funzionare la dimostrazione della Proposizione 23 basta anche la stima che trovate all'inizio del Capitolo 8 del libro di John Roe.

e quindi abbiamo dimostrato il primo enunciato del Teorema 16.
Si ha inoltre che

$$\mathrm{Im}(\overline{D\!\!\!/}) = (\mathrm{Ker}(\overline{D\!\!\!/})^{\perp} \tag{111}$$

e quindi $\mathrm{Im}(\overline{D\!\!\!/})$ è chiuso e $\mathrm{coKer}(\overline{D\!\!\!/}) \simeq \mathrm{Ker}(\overline{D\!\!\!/})$. Quindi $\overline{D\!\!\!/} : H^1(M,E) \to L^2(M,E)$ è di Fredholm, perché nucleo e conucleo sono di dimensione finita.

Per dimostrare (111) cominciamo con il considerare $y = \overline{D\!\!\!/}x$ con $x \in H^1$; vogliamo dimostrare che $y \in (\mathrm{Ker}(\overline{D\!\!\!/})^{\perp}$; per ipotesi esite una successione $x_j \in C^\infty$ tale che $x_j \to x$ in L^2 e $\overline{D\!\!\!/}x_j \to \overline{D\!\!\!/}x$ in L^2. Dunque $\forall s \in \mathrm{Ker}(\overline{D\!\!\!/})$ si ha $(\overline{D\!\!\!/}x_j, s) = (x_j, \overline{D\!\!\!/}s) = 0$ che implica $(\overline{D\!\!\!/}x, s) = 0$ e quindi $y = \overline{D\!\!\!/}x \perp s$. Quindi $\mathrm{Im}(\overline{D\!\!\!/}) \subset (\mathrm{Ker}(\overline{D\!\!\!/}))^{\perp}$.
Viceversa, sia $x \in (\mathrm{Ker}(\overline{D\!\!\!/}))^{\perp}$ e si introduca l'**operatore di Green** $G := g(\overline{D\!\!\!/})$ attraverso il calcolo funzionale associato alla funzione limitata g, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, data da $g(0) = 0$ e $g(\lambda) = \lambda^{-1}$. Consideriamo la funzione limitata f uguale a 0 in 0 ed uguale ad 1 fuori da 0; è chiaro che $f(\lambda) = \lambda g(\lambda)$ e quindi, utilizzando (108), e cioè

$$f(\lambda) = \lambda g(\lambda),\ f, g \ \text{ limitate } \ \Rightarrow f(\overline{D\!\!\!/}) = \overline{D\!\!\!/}g(\overline{D\!\!\!/}) \ \text{ in } \ \mathcal{L}(L^2, L^2)$$

vediamo che $\overline{D\!\!\!/}g(\overline{D\!\!\!/})x = x \in L^2$ (perché per ipotesi $x \in (\mathrm{Ker}(\overline{D\!\!\!/}))^{\perp}$) e quindi $x \in \mathrm{Im}(\overline{D\!\!\!/})$. La dimostrazione dell'uguaglianza (111) è completa.

Abbiamo dimostrato che $\overline{D\!\!\!/} : H^1(M,E) \to L^2(M,E)$ è di Fredholm ma abbiamo anche visto che il suo indice è nullo; infatti $\mathrm{coKer}(\overline{D\!\!\!/}) \simeq \mathrm{Ker}(\overline{D\!\!\!/})$. Per ottenere operatori con indici non nulli bisogna considerare operatori di Dirac generalizzati che sono *graduati*. Sia dunque $E = E^+ \oplus E^-$ con $E^{\pm} = \{s \mid \epsilon s = \pm s\}$ ed $\epsilon \in C^\infty(M, \mathrm{End}(E))$ operatore di gradazione con $\epsilon^2 = 1$. Per definizione, un operatore di Dirac è tale che $D\!\!\!/\epsilon + \epsilon D\!\!\!/ = 0$ ossia anticommuta con l'operatore di gradazione; esso si scrive quindi nella forma:

$$D\!\!\!/ = \begin{pmatrix} 0 & D\!\!\!/^- \\ D\!\!\!/^+ & 0 \end{pmatrix}$$

Un operatore di Dirac $D\!\!\!/$ generalizzato è, per definizione, simmetrico (e cioè formalmente autoaggiunto); si ha quindi, in aggiunta,

$$D\!\!\!/^- = (D\!\!\!/^+)^*$$

dove, di nuovo, l'aggiunto qui è quello formale. I quattro esempi fondamentali godono di questa proprietà: l'operatore di Gauss-Bonnet, l'operatore di segnatura, l'operatore $\sqrt{2}(\bar\partial + \bar\partial^*)$ su una varietà complessa e l'operatore spin-Dirac su una varietà spin.

Per quando appena visto $\overline{D\!\!\!/}^+ : H^1(M, E^+) \to L^2(M, E^-)$ è un operatore di Fredholm e, inoltre, $\mathrm{Im}(\overline{D\!\!\!/}^+) = (\mathrm{Ker}\overline{D\!\!\!/}^-)^{\perp}$. Osserviamo nuovamente che per regolarità ellittica

$$\mathrm{Ker}(\overline{D\!\!\!/}^{\pm}) = \mathrm{Ker}(D\!\!\!/^{\pm})$$

e quindi, riassumendo,

$$\mathrm{ind}(\overline{D\!\!\!/}^+) = \mathrm{dimKer}\overline{D\!\!\!/}^+ - \mathrm{dimKer}\overline{D\!\!\!/}^- = \mathrm{dimKer}D\!\!\!/^+ - \mathrm{dimKer}D\!\!\!/^- =: \mathrm{ind}(D\!\!\!/^+)$$

dove l'ultimo membro è proprio l'indice come definito nel Teorema 16. In particolare, abbiamo dimostrato che $\mathrm{ind}(D\!\!\!/^+)$, l'indice definito nel Teorema 16, è un indice di Fredholm; le proprietà di stabilità per l'indice definito nel Teorema 16 sono allora conseguenza dei risultati di stabilità per l'indice di Fredholm enunciati nel Teorema 26. In particolare, se $D\!\!\!/_0$ e $D\!\!\!/_1$ sono due operatori di Dirac generalizzati e $D\!\!\!/_0 = D\!\!\!/_1 + A$, con $A \in C^\infty(M, \mathrm{End}(E))$ allora $\mathrm{ind}(D\!\!\!/_0^+) = \mathrm{ind}(D\!\!\!/_1^+)$: infatti A si estende ad un operatore limitato $H_1 \to H_1$ e quindi $\overline{D\!\!\!/}_0^+ : H^1(M, E^+) \to L^2(M, E^-)$ e $\overline{D\!\!\!/}_1^+ : H^1(M, E^+) \to L^2(M, E^-)$ differiscono per un compatto (per il Lemma di Rellich); dalla proprietà 5] del Teorema 26 otteniamo la tesi. Analogamente, sempre dal Teorema 26, vediamo che se $\{\not{D}(t)\}_{t\in[0,1]}$ è una famiglia ad un parametro di operatori di Dirac, definita da famiglie continue di azioni di Clifford $c(t)$ e di connessioni hermitiane $\nabla^{E,t}$, allora $\mathrm{ind}(\not{D}^+(0)) = \mathrm{ind}(\not{D}^+(1))$.

Osserviamo infine che dal fatto che $\not{D}^- = (\not{D}^+)^*$ segue anche che

$$\mathrm{ind}(\not{D}^+) \;=\; \mathrm{dimKer}(\not{D}^-\not{D}^+) - \mathrm{dimKer}(\not{D}^+\not{D}^-) \tag{112}$$

Più precisamente, per la simmetria di $\not{D}$ si ha che $\mathrm{Ker}\not{D} = \mathrm{Ker}\not{D}^2$; infatti è ovvio che $\mathrm{Ker}\not{D} \subseteq \mathrm{Ker}\not{D}^2$; se d'altra parte $s \in C^\infty(M,E)$, $s \in \mathrm{Ker}\overline{\not{D}}^2$, allora $(\not{D}^2 s, s) = (\not{D}s, \not{D}s) = ||\not{D}s||^2 = 0$ ossia $\not{D}s = 0$. Quindi

$$\mathrm{Ker}(\not{D}^+) \oplus \mathrm{Ker}(\not{D}^-) \;=\; \mathrm{Ker}\not{D} \;=\; \mathrm{Ker}\not{D}^2 \;=\; \mathrm{Ker}(\not{D}^-\not{D}^+) \oplus \mathrm{Ker}(\not{D}^+\not{D}^-)$$

dato che

$$\not{D} = \begin{pmatrix} 0 & \not{D}^- \\ \not{D}^+ & 0 \end{pmatrix}, \quad \not{D}^2 = \begin{pmatrix} \not{D}^-\not{D}^+ & 0 \\ 0 & \not{D}^+\not{D}^- \end{pmatrix}$$

La formula desiderata, $\mathrm{ind}(\not{D}^+) = \mathrm{dimKer}\not{D}^-\not{D}^+ - \dim\,\mathrm{Ker}\not{D}^+\not{D}^-$, segue immediatamente.

21.13. **Immagine e nucleo.**

Abbiamo visto che se $\not{D} : C^\infty(M,E) \to C^\infty(M,E)$ è un operatore di Dirac generalizzato, allora vale la decomposizione ortogonale

$$L^2(M,E) = \mathrm{Ker}(\overline{\not{D}}) \oplus \mathrm{Im}(\overline{\not{D}} : H_1(M,E) \to L^2(M,E)) = \mathrm{Ker}(\not{D}) \oplus \mathrm{Im}(\overline{\not{D}} : H_1(M,E) \to L^2(M,E)) \tag{113}$$

dove nella seconda uguaglianza abbiamo utilizzato il teorema di regolarità ellittica. Si ha di fatto il seguente risultato:

Teorema 27. *Se $\not{D} : C^\infty(M,E) \to C^\infty(M,E)$ è un operatore di Dirac generalizzato, allora si ha una decomposizione ortogonale*

$$C^\infty(M,E) = \mathrm{Ker}(\not{D}) \oplus \mathrm{Im}(\not{D} : C^\infty(M,E) \to C^\infty(M,E))\,. \tag{114}$$

Proof. Sia $\phi \in C^\infty(M,E)$. Utilizzando (113) possiamo scrivere $\phi = \phi_0 + \tilde{\phi}$ con $\phi_0 \in \mathrm{Ker}(\not{D})$. Dato che $\phi_0 \in C^\infty(M,E)$ (per regolarità ellittica), scopriamo che $\tilde{\phi} \in C^\infty(M,E)$. Inoltre $\tilde{\phi}$ è ortogonale al nucleo di $\not{D}$. È allora sufficiente dimostrare che esiste $\psi \in C^\infty(M,E)$ tale che $\not{D}\psi = \tilde{\phi}$. Sia $G = g(\overline{\not{D}})$ l'operatore di Green introdotto nella sottosezione precedente. Da (109) sappiamo che $G(C^\infty(M,E)) \subset C^\infty(M,E)$; sia $\psi := g(\overline{\not{D}})(\tilde{\phi})$. Allora $\psi \in C^\infty(M,E)$ e ragionando come nella sottosezione precedente abbiamo

$$\not{D}(\psi) = \not{D}G(\tilde{\phi}) = \not{D}g(\overline{\not{D}})(\tilde{\phi}) = \tilde{\phi}$$

e quindi la tesi. $\square$

22. **Teorema di Hodge**

22.1. **Complessi di Dirac.**

Definizione 35. Sia (M,g) una varietà riemanniana compatta senza bordo. Consideriamo una successione di fibrati vettoriali E_0,..,E_k; facciamo l'ipotesi che ogni E_j sia dotato di una metrica e di una connessione ∇^{E_j} compatibile. Supponiamo che esista una successione di operatori differenziali del primo ordine $d_j : C^\infty(M,E_j) \to C^\infty(M,E_{j+1})$. Diremo che la successione

$$C^\infty(M,E_0) \xrightarrow{d_0} C^\infty(M,E_2) \xrightarrow{d_2} \cdots \longrightarrow C^\infty(M,E_k)$$

definisce un **complesso di Dirac** se:
(i) $d_{j+1}d_j = 0 \ \forall j \in \{0, k-1\}$;
(ii) se $E = \oplus E_j$ allora $d + d^* : C^\infty(M,E) \to C^\infty(M,E)$, con d^* aggiunto formale di d, è un operatore di Dirac generalizzato.
In tal caso poniamo, come al solito, $\not{D} := d + d^*$.

Si noti che dal fatto che $d^2 = 0$ abbiamo $\not{D}^2 = dd^* + d^*d$ perché oltre a $d^2 = 0$ abbiamo anche $(d^*)^2 \equiv d^* \circ d^* = (d \circ d)^* = (d^2)^* = 0$. L'operatore $dd^* + d^*d$ manda sezioni di E_j in sezioni di E_j e la sua restrizione a $C^\infty(M,E_j)$ è il *laplaciano del complesso ristretto a* $C^\infty(M,E_j)$. Con un piccolo abuso di notazione denoteremo questo operatore con Δ^E_j; la sua espressione esplicita è

$$\Delta^E_j = d_{j-1} \circ d^*_{j-1} + d^*_j d_j\,.$$

Osserviamo che dalla definizione di aggiunto formale segue subito che

$$\mathrm{Ker}(\not{D}^2|_{C^\infty(M,E_j)}) \equiv \mathrm{Ker}\Delta^E_j = \{s \in C^\infty(M,E_j) \ \mid \ d_j s = 0 = d^*_{j-1}s\}$$

Le sezioni nel nucleo di $\not{D}^2$ sono dette *armoniche*; poniamo

$$\mathbb{H}^j(M) = \{s \in C^\infty(M,E_j) \mid \Delta^E_j s = 0\} \equiv \{s \in C^\infty(M,E_j) \ \mid \ d_j s = 0 = d^*_{j-1}s\}.$$

$\mathbb{H}^j(M)$ è lo spazio delle sezioni armoniche di $C^\infty(M,E_j)$; da quello che abbiamo dimostrato sugli operatori di Dirac sappiamo che $\mathbb{H}^j(M)$ è uno spazio vettoriale di dimensione *finita.* Scriveremo anche $\mathbb{H}^j$ per lo spazio delle j-forme armoniche, a meno che ciò generi confusione.

È importante notare che $\not{D}$ anticommuta con la gradazione data dalla parità delle sezione (le sezioni pari sono le sezioni di $E_{2\ell}$ e analogamente per quelle dispari) e quindi $\not{D}$ è dispari rispetto a questa gradazione:

$$\not{D} := d + d^* = \begin{pmatrix} 0 & d + d^*|_{\mathrm{dispari}} \\ d + d^*|_{\mathrm{pari}} & 0 \end{pmatrix}$$

Poniamo, per definizione,

$$\not{D}^+ := d + d^*|_{pari}\,.$$

Questo è un operatore di Dirac con indice finito e per il suo indice si ha:

$$\mathrm{ind}(\not{D}^+) = \dim \mathrm{Ker}(\not{D}^-\not{D}^+) - \dim \mathrm{Ker}(\not{D}^+\not{D}^-) = \dim \mathbb{H}^{\mathrm{pari}}(M) - \dim \mathbb{H}^{\mathrm{dispari}}(M) \tag{115}$$

con $\mathbb{H}^{\mathrm{pari}}(M) = \oplus \mathbb{H}^{2\ell}(M)$ e $\mathbb{H}^{\mathrm{dispari}}(M) = \oplus \mathbb{H}^{2k+1}(M)$

Esempio 1
$E^j = \Lambda^j T^*M \equiv \Lambda^j M$ con d_j l'usuale differenziale esterno sulle j-forme. In questo caso, per quanto visto nella sottosezione 15.7, si ha che $\not{D} = D_{GB}$, l'operatore di Gauss-Bonnet; $\not{D}^2 = dd^* + d^*d$ è l'operatore di Laplace-Beltrami sulle forme differenziali. La sua restrizione alle forme di grado j è, ovviamente, l'operatore $d_{j-1} \circ d^*_{j-1} + d^*_j d_j$ con d_ℓ l'operatore di de Rham sulle ℓ-forme e d^*_ℓ il suo

aggiunto formale che abbiamo calcolato esplicitamente come $\pm * d *$. Utilizzeremo la notazione Δ_j, piuttosto che $\Delta_j^{\Lambda^* M}$, per questo operatore. Spesso ometteremo l'indice j, a meno che ciò generi confusione.

Esempio 2
$E^j = \Lambda^{0,j} M$ con M varietà complessa e d_j uguale all'operatore $\bar{\partial}$ sulle $(0, j)$-forme; l'operatore di Dirac generalizzato associato è l'operatore $\bar{\partial} + \bar{\partial}^*$ ed il suo quadrato è l'operatore $\bar{\partial}\bar{\partial}^* + \bar{\partial}^*\bar{\partial} := \Delta_{\bar{\partial}}$.

Esempio 3
$E^j = \Lambda^{0,j} M \otimes W$ con W fibrato olomorfo e $d = \bar{\partial}_W$.

Esempio 4
Sia p un numero fissato fra 0 e n e sia M una varietà complessa di dimensione n. Allora consideriamo $E^j = \Lambda^{p,j} M$ e d_j uguale all'operatore $\bar{\partial}$ sulle (p, j)-forme.

Per un complesso di Dirac sono ben definiti i gruppi di coomologia

$$H^j(M, E, d) = \frac{\mathrm{Ker}(d_j)}{\mathrm{Im}(d_{j-1})}$$

Nel primo esempio la coomologia è quella di de Rham $H^k_{\mathrm{dR}}(M)$ [46], mentre negli esempi 2, 3 e 4 la coomologia del complesso è data da

$$H^{0,k}_{\bar{\partial}}(M, \mathbb{C}), \quad H^{0,k}_{\bar{\partial}}(M, W), \quad H^{p,k}_{\bar{\partial}}(M, \mathbb{C}),$$

i gruppi di coomologia di Dolbeault [47].

Ogni classe di coomologia $\mathcal{C} = [\alpha] \in H^j(M, E, d)$ è un sottospazio affine, essendo ottenuta sommando il sottospazio vettoriale $dC^\infty(M, E_{j-1})$ ad una sezione $\alpha \in C^\infty(M, E_j)$ tale che $d_j\alpha = 0$; ci si chiede se esiste un rappresentante privilegiato in una data classe. Per identificarlo si cerca un elemento di norma minima. Procediamo in maniera intuitiva: una rappresentazione grafica suggerisce che tale elemento deve essere perpendicolare a $dC^\infty(M, E_{j-1})$, ossia $(\alpha, ds) = 0$ per ogni $s \in C^\infty(M, E_{j-1})$ e ciò che implica che $d^*\alpha = 0$. In conclusione, ci aspettiamo che un rappresentante privilegiato in una classe di coomologia sia una sezione *armonica*. Questa idea intuitiva è vera ed è parte del celebre Teorema di Hodge.

22.2. **Il Teorema di decomposizione di Hodge.**

Il risultato centrale di questa sezione sarà per noi una diretta conseguenza di risultati già dimostrati. Infatti, essendo $\not{D} = d + d^*$ un operatore di Dirac generalizzato, abbiamo il Teorema 27 e quindi

$$C^\infty(M, E) = \mathrm{Ker}(\not{D}) \oplus \mathrm{Im}(\not{D} : C^\infty(M, E) \to C^\infty(M, E)).$$

che possiamo riscrivere come

$$C^\infty(M, E) = \mathrm{Ker}(\not{D}^2) \oplus \mathrm{Im}(\not{D} : C^\infty(M, E) \to C^\infty(M, E)). \tag{116}$$

Abbiamo allora il seguente notevole risultato, noto come *Teorema di decomposizione di Hodge*:

[46] che per il Teorema omonimo è isomorfa alla coomologia singolare $H^k(M, \mathbb{R})$

[47] rispettivamente isomorfi a $H^k(M, \mathcal{O}(M))$, $H^k(M, \mathcal{O}(W))$, $H^k(M, \Omega^p(M))$, le coomologia a valori rispettivamente nel fascio delle funzioni olomorfe di M, delle sezioni olomorfe di W e delle p-forme olomorfe di M

Teorema 28. *Sia*
$$C^\infty(M,E_0) \xrightarrow{d_0} C^\infty(M,E_2) \xrightarrow{d_2} \cdots \longrightarrow C^\infty(M,E_k)$$
un complesso di Dirac. Si ha una decomposizione ortogonale
$$C^\infty(M,E_j) = \mathbb{H}_j(M) \oplus d(C^\infty(M,E_{j-1})) \oplus d^*(C^\infty(M,E_{j+1}))\,. \tag{117}$$
Inoltre
$$\mathrm{Ker}(d_j) = \mathbb{H}_j(M) \oplus d_{j-1}(C^\infty(M,E_{j-1})) \tag{118}$$
Conseguentemente, esiste un isomorfismo di spazi vettoriali:
$$\mathbb{H}^j(M) \cong H^j(M,E,d). \tag{119}$$
In particolare, $\dim H^j(M,E,d) < \infty$.

Proof. Sia $\phi \in C^\infty(M,E_j)$. Allora, usando (116) abbiamo che $\phi = \phi_0 + d\psi + d^*\psi'$ dove, necessariamente, $\psi \in C^\infty(M,E_{j-1})$ e $\psi' \in C^\infty(M,E_{j+1})$. Quindi
$$C^\infty(M,E_j) = \mathbb{H}_j \oplus (d(C^\infty(M,E_{j-1})) + d^*(C^\infty(M,E_{j+1})))$$
Ma $d(C^\infty(M,E_{j-1})) \perp d^*C^\infty(M,E_{j+1})$ (perché d^* è l'aggiunto formale di d e $d^2=0$) e quindi
$$d(C^\infty(M,E_{j-1})) + d^*(C^\infty(M,E_{j+1})) = d(C^\infty(M,E_{j-1})) \oplus d^*(C^\infty(M,E_{j+1})).$$
Ne segue che (117) è dimostrata.
Per quel che concerne (118): è chiaro che $\mathbb{H}_j \oplus d_{j-1}(C^\infty(M,E_{j-1})) \subset \mathrm{Ker}(d_j)$. D'altra parte,
$$\mathrm{Ker}(d_j) \perp d^*(C^\infty(M,E_{j+1}))$$
perché se $d_j\alpha = 0$ allora $(d^*s_{j+1}|\alpha) = (s_{j+1}|d\alpha) = 0$. Ne segue che $\mathrm{Ker}(d_j) \subset \mathbb{H}_j \oplus d_{j-1}(C^\infty(M,E_{j-1}))$ e quindi (118). Infine, dalla decomposizione $\mathrm{Ker}(d_j) = \mathbb{H}_j \oplus d_{j-1}(C^\infty(M,E_{j-1}))$ vediamo immediatamente che $\mathbb{H}^j \cong H^j(M,E,d)$ che è proprio (119). $\square$

23. Applicazioni del teorema di Hodge

23.1. Teorema di Hodge-deRham.

Se applichiamo il Teorema di Hodge al complesso di de Rham

$$\cdots \to \Omega^j(M) \xrightarrow{d} \Omega^{j+1}(M) \to \cdots$$

otteniamo la classica decomposizione di Hodge

$$\Omega^j(M) = \mathbb{H}^j(M) \oplus d\Omega^{j-1}(M) \oplus d^*\Omega^{j+1}(M)$$

con

$$\mathbb{H}^j(M) = \{\omega \in \Omega^j(M) \mid \Delta\omega = 0\} = \{\omega \in \Omega^j(M) \mid d\omega = 0 \;\text{ e }\; d^*\omega = 0\}$$

Si ho poi l'isomorfismo di Hodge-deRham

$$\mathbb{H}^j(M) \simeq H^j_{\mathrm{dR}}(M)\,.$$

23.2. Teorema di Hodge-Dolbeault.

Sia M complessa e fissiamo $p \in \{0, \dots, \dim_{\mathbb{C}} M\}$. Se applichiamo il Teorema di Hodge al complesso di Dolbeault

$$\cdots \to \Omega^{p,q}(M) \xrightarrow{\bar\partial} \Omega^{p,q+1}(M) \to \cdots$$

otteniamo la decomposizione di Hodge-Dolbeault

$$\Omega^{p,q}(M) = \mathbb{H}^{p,q}(M) \oplus \bar\partial\Omega^{p,q-1}(M) \oplus \bar\partial^*\Omega^{p,q+1}(M)$$

con

$$\mathbb{H}^{p,q}(M) = \{\omega \in \Omega^{p,q}(M) \mid \Delta_{\bar\partial}\,\omega = 0\} = \{\omega \in \Omega^j(M) \mid \bar\partial\omega = 0 \;\text{ e }\; \bar\partial^*\omega = 0\}$$

Si ho poi l'isomorfismo di Hodge-Dolbeault

$$\mathbb{H}^{p,q}(M) \simeq H^{p,q}_{\bar\partial}(M)\,.$$

23.3. Dualità di Poincaré.

Teorema 29. *Sia M una varietà compatta connessa orientata $n-$dimensionale. Allora l'applicazione indotta in coomologia dal prodotto esterno seguito dall'integrazione:*

$$\Phi : H^k_{\mathrm{dR}}(M) \otimes H^{n-k}_{\mathrm{dR}}(M) \to \mathbb{R}\,, \quad \Phi([\alpha],[\beta]) := \int_M \alpha \wedge \beta$$

è ben definito e non degenere. Si ha quindi un isomorfismo:

$$H^k_{\mathrm{dR}}(M) \simeq H^{n-k}_{\mathrm{dR}}(M)$$

detto dualità di Poincaré.

Dimostrazione.
Il fatto che Φ sia ben definito segue subito dal Teorema di Stokes. Sia $\alpha \in H^k_{\mathrm{dR}}(M)$; per il Teorema di Hodge-de Rham possiamo supporre che α sia una forma armonica. Ricordando che $d^* = (-1)^{nk+n+1} * d*$ sulle k-forme e che $** = (-1)^{kn+k}$ si dimostra facilmente che

$$\Delta * = * \Delta$$

e quindi scopriamo che $*\alpha$ è anche armonica e rappresenta una classe in $H^{n-k}_{\mathrm{dR}}(M)$. Vediamo allora che

$$\Phi([\alpha],[*\alpha]) = \int \alpha \wedge *\alpha = ||\alpha||^2$$

e abbiamo la tesi.

Osservazione. Utilizzando il Teorema di de Rham otteniamo la dualità di Poincaré per la coomologia singolare:

$$H^k(M,\mathbb{R}) \simeq H^{n-k}(M,\mathbb{R})$$

Ci sono dimostrazioni puramente topologiche di questo risultato. Si veda ad esempio il testo di Griffiths-Harris oppure Vick *Introduction to homology theory.*

23.4. **Dualità di Kodaira-Serre.**

Teorema 30. *Sia M una varietà complessa compatta e connessa di dimensione complessa n. Allora l'applicazione indotta in coomologia di Dolbeault dal prodotto esterno seguito dall'integrazione:*

$$\Psi : H^{p,q}_{\bar\partial}(M) \otimes H^{n-p,n-q}_{\bar\partial}(M) \to \mathbb{C}\,, \quad \Psi([\alpha],[\beta]) := \int_M \alpha\wedge\beta$$

è ben definita e non degenere. Si ha quindi un isomorfismo:

$$H^{p,q}_{\bar\partial}(M) \simeq H^{n-p,n-q}_{\bar\partial}(M)$$

detto dualità di Kodaira-Serre.

Dimostrazione.
La dimostrazione è molto simile a quella della dualità di Poincaré. Sia $\alpha \in H^{p,q}_{\bar\partial}(M)$; per il Teorema di Hodge-Dolbeault possiamo supporre che α sia una forma armonica. Si ha, anche in questo caso, la fondamentale osservazione che

$$\Delta_{\bar\partial} * = * \Delta_{\bar\partial}$$

e quindi $*\alpha$ è anche armonica e rappresenta una classe in $H^{n-p,n-q}_{\bar\partial}(M)$. Vediamo allora che

$$\Psi([\alpha],[*\alpha]) = ||\alpha||^2$$

e abbiamo la tesi.

Osservazione. Utilizzando il Teorema di Dolbeault, $H^{p,q}_{\bar\partial}(M) \simeq H^q(M,\mathbf{\Omega}^p)$, otteniamo la dualità di Kodaira-Serre per la coomologia a valori nel fascio delle p-forme olomorfe $\mathbf{\Omega}^p$

$$H^q(M,\mathbf{\Omega}^p) \simeq H^{n-q}(M,\mathbf{\Omega}^{n-p})$$

Osservazione. Sia M complessa, compatta e connessa. Sia ora m la sua dimensione complessa. Utilizzando il principio del massimo per funzioni olomorfe di una variabile non è difficile dimostrare che le uniche funzioni olomorfe su M sono le costanti [48]. Insieme alla dualità di Kodaira-Serre questo ci dice che

$$H^{0,0}_{\bar\partial}(M) \simeq \mathbb{C}\cdot 1 \qquad H^{m,m}_{\bar\partial}(M) \simeq \mathbb{C}\cdot(*1)\,.$$

[48] Trovate il semplice argomento nel libro di Wells, Theorem 1.11

23.5. **Il Teorema di Künneth per la coomologia di de Rham.**

Siano M ed N due varietà compatte reali orientabili. Il prodotto esterno di forme induce un'applicazione lineare

$$\Omega^k(M) \otimes \Omega^\ell(N) \xrightarrow{\wedge} \Omega^{k+\ell}(M \times N)$$

che invia $\phi \in \Omega^k(M)$ e $\psi \in \Omega^\ell(N)$ nella forma che nel punto $(z,w) \in M \times N$ vale $\phi(z) \wedge \psi(w)$. Denotiamo brevemente questa $k+\ell$-forma su $M \times N$ tramite il simbolo $\phi \otimes \psi$.

Teorema 31. *Il prodotto esterno di forme induce un isomorfismo*

$$\mathbb{H}^j(M \times N) \simeq \oplus_{k+\ell=j}\, \mathbb{H}^k(M) \otimes \mathbb{H}^\ell(N) \tag{120}$$

Applicando il teorema di Hodge-de Rham otteniamo un isomorfismo

$$H^j_{\mathrm{dR}}(M \times N) \simeq \oplus_{k+\ell=j}\, H^k_{\mathrm{dR}}(M) \otimes H^\ell_{\mathrm{dR}}(N)\,. \tag{121}$$

e quindi, per il Teorema di de Rham, otteniamo il seguente isomorfismo per la coomologia singolare:

$$H^j(M \times N, \mathbb{R}) \simeq \oplus_{k+\ell=j}\, H^k(M, \mathbb{R}) \otimes H^\ell(N, \mathbb{R})\,. \tag{122}$$

Osserviamo che esistono dimostrazioni puramente topologiche di (122); inoltre nel caso della coomologia singolare a coefficienti interi, la formula è più complicata. Si veda ad esempio Bredon *Geometry and Topology.*

La dimostrazione del Teorema 31 si basa sulla formula $\Delta_{M\times N} = \Delta_M \otimes \mathrm{Id}_N + \mathrm{Id}_M \otimes \Delta_N$. Vi rimando al Griffiths-Harris per i dettagli (dove è fatto in dettaglio per il Laplaciano associato a $\bar\partial$, ma gli argomenti sono identici).

23.6. **Il Teorema di Künneth per la coomologia di Dolbeault.**

Siano M ed N due varietà complesse compatte. È ancora ben definita l'applicazione

$$\Omega^{p,q}(M) \otimes \Omega^{r,s}(N) \xrightarrow{\wedge} \Omega^{p+r,q+s}(M \times N)$$

e si ha il seguente

Teorema 32. *Il prodotto esterno di forme induce un isomorfismo*

$$\mathbb{H}^{u,v}(M \times N) \simeq \oplus_{p+r=u;\, q+s=v}\, \mathbb{H}^{p,q}(M) \otimes \mathbb{H}^{r,s}(N) \tag{123}$$

Applicando il teorema di Hodge-Dolbeault otteniamo un isomorfismo

$$H^{u,v}_{\bar\partial}(M \times N) \simeq \oplus_{p+r=u;\, q+s=v}\, H^{p,q}_{\bar\partial}(M) \otimes H^{r,s}_{\bar\partial}(N)\,.$$

Anche per questo teorema vi rimando al Griffiths-Harris.

23.7. **Numeri di Hodge di una varietà complessa compatta.**

Sia M una varietà complessa, compatta, connessa di dimensione complessa m. Sia N un'altra tale varietà di dimensione n. Definiamo i numeri di Hodge $h^{p,q}(M)$, o semplicemente $h^{p,q}$, come

$$h^{p,q}(M) := \dim H^{p,q}_{\bar\partial}(M)$$

Per il Teorema di Hodge-Dolbeault e per il teorema di Dolbeault si ha anche che

$$h^{p,q}(M) = \dim \mathbb{H}^{p,q}(M) = \dim H^q(M, \boldsymbol{\Omega}^p)$$

Riassumiamo le proprietà di questi numeri:

$$h^{p,q}(M) < \infty \tag{124}$$

$$h^{0,0}(M) = 1\,, \quad h^{m,m}(M) = 1 \tag{125}$$

$$h^{p,q}(M) = h^{m-p,m-q}(M) \tag{126}$$

$$h^{u,v}(M \times N) = \sum_{p+r=u\,;\,q+s=v} h^{p,q}(M) \cdot h^{r,s}(N) \tag{127}$$

23.8. **La caratteristica di Eulero-Poincaré è l'indice dell'operatore di Gauss-Bonnet.**

Si consideri una varietà compatta orientabile M $n$dimensionale con $n = 2k$. Consideriamo il complesso di de Rham e l'operatore di Dirac associato $\not{D}$. Per quanto visto nella sottosezione 15.7 si ha che $\not{D} = D_{GB}$, l'operatore di Gauss-Bonnet: $d + d^* = D_{GB}$ e quindi

$$D_{GB} = \begin{pmatrix} 0 & d + d^*|_{\text{dispari}} \\ d + d^*|_{\text{pari}} & \end{pmatrix}$$

con $D^+_{GB} = d + d^*|_{\text{pari}}$ e $D^-_{GB} = d + d^*|_{\text{dispari}}$. Ricordando la formula (115) per $\text{ind}(D^+_{GB})$, e cioè $\text{ind}(D^+_{GB}) = \dim \mathbb{H}^{\text{pari}}(M) - \dim \mathbb{H}^{\text{dispari}}(M)$ abbiamo allora

$$\text{ind}(D^+_{GB}) = \sum (-1)^j \dim \mathbb{H}^j = \sum (-1)^j \dim H^j_{\text{dR}}(M) = \sum (-1)^j \dim H^j(M, \mathbb{R})$$

dove nell'ultima uguaglianza abbiamo utilizzato il Teorema di de Rham. Riassumendo:

$$\text{ind}(D^+_{GB}) = \chi(M)$$

Applicando il Teorema dell'indice di Atiyah-Singer otteniamo allora il Teorema di Chern-Gauss-Bonnet:

$$\chi(M) = \int_M e(TM)$$

con $e(TM) := [e(M, \nabla^{TM})]$ uguale alla classe di Eulero.

23.9. **La caratteristica di Eulero $\chi(M, \mathcal{O}(M))$ è l'indice dell'operatore $\bar\partial + \bar\partial^*$.**

Soa ora M una varietà complessa e consideriamo il complesso di Dolbeault

$$\cdots \to \Omega^{0,q}(M) \xrightarrow{\bar\partial} \Omega^{0,q+1}(M) \to \cdots$$

Allora, per i risultati spiegati nella sottosezione 22.1 abbiamo che l'operatore di Dirac generalizzato associato a questo complesso di Dirac è l'operatore $\bar\partial + \bar\partial^*$ e quindi

$$\text{ind}(\bar\partial + \bar\partial^*|_{\text{pari}}) = \sum (-1)^j \dim \mathbb{H}^{0,j}_{\bar\partial}(M) \equiv \sum (-1)^j h^{0,j}(M) =: \chi(M, \mathcal{O})$$

Similmente, se $W \to M$ è un fibrato olomorfo:

$$\text{ind}(\bar\partial_W + \bar\partial^*_W|_{\text{pari}}) = \chi(M, \mathcal{O}(W))$$

Applicando il Teorema dell'indice di Atiyah-Singer otteniamo il Teorema di Riemann-Roch-Hirzebruch:

$$\chi(M, \mathcal{O}(M)) = \int_M \text{Td}(T^{1,0}M)$$

e, più in generale,

$$\chi(M, \mathcal{O}(W)) = \int_M \text{Td}(T^{1,0}M) \wedge \text{Ch}(W)$$

con $\text{Td}(T^{1,0}M)$ la classe di Todd di M e $\text{Ch}(W)$ il carattere di Chern di W.

23.10. **La segnatura di M^{4n} è l'indice dell'operatore di segnatura.**

Sia M una varietà compatta orientabile di dimensione $2l$. Sia D_{sign} l'operatore di segnatura. Quindi D_{sign} è uguale all'operatore di de Rham $d+d^*$ sulle forme differenziali complesse $\Lambda^*_{\mathbb{C}}M$ considerate come un fibrato di moduli di Clifford *graduato*, con operatore di gradazione $\tau = (\sqrt{-1})^{p(p-1)+k}*$,

$$\tau : \Lambda^p_{\mathbb{C}}M \to \Lambda^{n-p}_{\mathbb{C}}M\,.$$

Si veda la sottosezione 15.9. In particolare, si ha la decomposizione $\Lambda^*_{\mathbb{C}}M = \Lambda^+_{\mathbb{C}}M \oplus \Lambda^-_{\mathbb{C}}M$ con $\Lambda^{\pm}_{\mathbb{C}}M = \{\omega \in \Lambda^*_{\mathbb{C}}M \ : \ \tau\omega = \pm\omega\}$. Quindi

$$D_{\text{segn}} = \begin{pmatrix} 0 & d+d^*|_{\Lambda^-} \\ d+d^*|_{\Lambda^+} & 0 \end{pmatrix}$$

Notiamo allora che $D^2_{\text{segn}} = \Delta$ e quindi τ commuta con D^2_{segn}. Si ha:

$$\begin{aligned} \operatorname{ind}(D^+_{\text{segn}}) &= \dim\operatorname{Ker}(D^-_{\text{segn}}D^+_{\text{segn}}) - \dim\operatorname{Ker}(D^+_{\text{segn}}D^-_{\text{segn}}) = \\ &= \dim\{\text{forme armoniche in } \Lambda^+_{\mathbb{C}}M\} - \dim\{\text{forme armoniche in } \Lambda^-_{\mathbb{C}}M\} \\ &= \dim\{h \in \mathbb{H} \mid \tau h = h\} - \dim\{h \in \mathbb{H} \mid \tau h = -h\} \end{aligned}$$

dove abbiamo indicato con $\mathbb{H}$ le forme armoniche in $\Lambda^*_{\mathbb{C}}M$. Sia $0 \le k < l$ e si considerino gli spazi invarianti per τ, $V_k = \mathbb{H}^k \oplus \mathbb{H}^{2l-k}$. Se $\alpha \in V_k$ allora $\alpha = \beta + \tau(\beta)$ con $\beta \in \mathbb{H}^k$ e $\tau(\beta) \in \mathbb{H}^{2l-k}$. Sia $\alpha' = \beta - \tau(\beta)$, allora $\alpha' \in V_k$, ma $\tau(\alpha') = -\alpha'$ e dunque

$$\dim\{h \in V_k \in \mathbb{H} \mid \tau h = h\} = \dim\{h \in V_k \mid \tau h = -h\}.$$

Osservando poi che V_l è invariante per τ, concludiamo che per $\operatorname{ind}(D^+_{\text{segn}})$ si ha, con ovvia notazione:

$$\operatorname{ind}(D^+_{\text{segn}}) = \dim(V_l^+) - \dim(V_l^-).$$

Consideriamo l'endomorfismo di V_l definito da τ; per definizione $\tau = i^{l+l(l-1)}* = i^{l^2}*$ sulle $l-$forme, ossia $\tau = i^{4n^2}* = *$ se $l = 2n$ e $\tau = i^{4n(n+1)+1}* = i*$ se $l = 2n+1$. Per l dispari, $** = -1$; quindi $V(*)_{\pm i}$, gli autospazi dell'operatore reale $*$ relativi agli autovalori complessi coniugati $\pm i$, sono isomorfi, essendo $V(*)_i = \overline{V(*)_{-i}}$: in questo caso si ha allora che $\operatorname{ind}(D^+_{\text{segn}}) = 0$.
Per l pari notiamo che τ è un operatore reale; siano $\mathbb{H}^l_{\pm}$ gli autospazi relativi agli autovalori ± 1 per l'operatore $*$ sulle $l-$forme armoniche reali. Allora si ha:

$$\operatorname{ind}(D^+_{\text{segn}}) = \dim(\mathbb{H}^l_+) - \dim(\mathbb{H}^l_-)$$

Si fissi una base in $\mathbb{H}^l$ tale che

$$\begin{aligned} &\alpha^+_1, \cdots, \alpha^+_{p^+} \in \mathbb{H}^l_+ \\ &\alpha^-_1, \cdots, \alpha^-_{p^-} \in \mathbb{H}^l_- \end{aligned}$$

La forma quadratica:

$$\alpha \to \int \alpha \wedge \alpha \in \mathbb{R} \ \text{ per } \ \alpha \in \mathbb{H}^l \cong H^l_{\text{dR}}(M) \tag{128}$$

è definita positiva su $\mathbb{H}^l_+$ e definita negativa su $\mathbb{H}^l_-$ come si deduce da:

$$\begin{aligned} \textstyle\int \alpha^+_j \wedge \alpha^+_j &= \textstyle\int \alpha^+_j \wedge *\alpha^+_j = (\alpha^+_j \mid \alpha^+_j) > 0 \\ \textstyle\int \alpha^-_j \wedge \alpha^-_j &= -\textstyle\int \alpha^-_j \wedge *\alpha^-_j = -(\alpha^-_j \mid \alpha^-_j) < 0 \end{aligned}$$

Concludendo

$$\operatorname{ind}(D^+_{\text{segn}}) = \operatorname{segn}(M)$$

con $\operatorname{segn}(M) = p^+ - p^-$ la segnatura della forma quadratica (128), ossia, per definizione, la segnatura di M.

Riassumendo:
se M^{4n} è una varietà orientabile compatta di dimensione $4n$ allora

$$\mathrm{ind}(D^+_{\mathrm{segn}}) = \mathrm{segn}(M)\,. \tag{129}$$

Applicando il Teorema dell'indice di Atiyah-Singer al membro a sinistra otteniamo il teorema della segnatura di Hirzebruch:

$$\mathrm{segn}(M) = \int_M L(TM)$$

con $L(TM)$ la classe L di Hirzebruch.

23.11. **Il Teorema di Bochner.**

Teorema 33. *Sia M una varietà compatta con primo numero di Betti $b_1(M) = \dim H^1_{\mathrm{dR}}(M)$ non nullo. Allora non esiste alcuna metrica con curvatura di Ricci positiva.*

Dimostrazione Sia $\not{D} = d + d^*$. La formula di Weitzenbock dà la seguente espressione per $\not{D}^2$:

$$\overline{\not{D}}^2 \equiv dd^* + d^*d = \nabla^*\nabla + \Omega_c^{\wedge^* M}.$$

Si consideri la restrizione a $T^*M = \Lambda^1 M$: $\Omega_c^{\wedge^* M}|_{T^*M}$. Si identifichi, tramite la metrica, TM con T^*M. Si verifica allora con un conto che

$$\Omega_c^{\wedge^* M}|_{TM}(e_k) = \frac{1}{2}\sum_{i,j,l} e_i e_j e_l (R(e_i, e_j)e_k, e_l) = \sum_a \mathrm{Ric}_{ka} e_a$$

Se la curvatura di Ricci è positiva, allora per $\alpha \in \Omega^1(M)$ armonica si ha $(\Omega_c^{\wedge^* M}\alpha, \alpha) = (\overline{\not{D}}^2\alpha, \alpha) - (\nabla^*\nabla\alpha, \alpha) = -||\nabla\alpha||^2 \leq 0$ che implica $\alpha = 0$ ossia $b_1(M) = 0$.

23.12. **Teoria di Hodge su varietà di Kähler.**

Sia (M, h) una varietà complessa hermitiana e sia $\omega \in \Omega^{1,1}(M)$ la forma di Kähler associata. Vi ricordo che (M, h) è di Kähler se $d\omega = 0$. Nella Proposizione 12 abbiamo visto una caratterizzazione equivalente della proprietà di Kähler. Ne enunciamo ora un'altra [49]. Diamo innanzitutto la seguente

Definizione 36. Diremo che la metrica hermitiana h oscula la metrica hermitiana canonica all'ordine k in $p_0 \in M$, se esiste una carta complessa centrata in p_0, con coordinate associate $(z_1, \ldots, z_n)$, tale che

$$h = \sum(\delta_{ij} + \kappa_{ij}) dz_i \otimes d\overline{z}_j$$

con κ_{ij} che è zero all'ordine k in 0.
Diremo che h oscula la metrica hermitiana canonica all'ordine k se ciò è vero in ogni punto di M.

Proposizione 24. *(M, h) è di Kähler se e solo se h oscula all'ordine 2 la metrica hermitiana canonica.*

[49] Per uno studio dettagliato di tutte le possibili equivalenti nozioni di metrica di Kähler vi invito a consultare le note di Andrei Moroianu (disponibili in rete; c'è anche un libro, sempre a cura di Moroianu, che peró non è disponibile in rete).

Per la dimostrazione di questa Proposizione e dei risultati riportati in questa Sottosezione vi rimando, per esempio, al Griffiths-Harris.

Abbiamo già visto che se M è di tipo Kähler allora per i numeri di Betti pari si ha $b_{2k}(M) > 0$. In questa sottosezione vedremo ulteriori fondamentali risultati sui numeri di Betti e sui numeri di Hodge di una varietà di Kähler.
Consideriamo l'operatore

$$d^c := \frac{\sqrt{-1}}{4\pi}(\bar\partial - \partial)\,.$$

Sia

$$L : \Omega^{p,q}(M) \to \Omega^{p+1,q+1}(M)$$

l'operatore

$$L(\alpha) = \alpha \wedge \omega$$

con ω la forma di Kähler. Sia $\Lambda := L^*$, l'aggiunto di L:

$$\Lambda : \Omega^{p,q}(M) \to \Omega^{p-1,q-1}(M)$$

Proposizione 25. *Sia (M, h) di Kähler. Valgono le seguenti equivalenti identità:*

$$[\Lambda, d] = -4\pi(d^c)^*\,, \quad [L, d^*] = 4\pi d^c\,.$$

La dimostrazione è un lungo e complicato conto nel caso di $\mathbb{C}^n$ dotato della metrica hermitiana canonica. Nel caso generale si utilizza la Proposizione 24. Come facili conseguenze di questa Proposizione otteniamo dopo qualche calcolo i seguenti due fondamentali Corollari.

Corollario 10. *Sia (M, h) di Kähler e sia Δ_d il Laplaciano di Hodge-de Rham. Si ha*

$$[\Lambda, \Delta_d] = 0\,; \quad \textit{equivalentemente} \quad [L, \Delta_d] = 0\,.$$

Corollario 11. *Sia (M, h) di Kähler e sia $\Delta_{\bar\partial} \equiv \bar\partial\bar\partial^* + \bar\partial^*\bar\partial$ il Laplaciano di Hodge-Dolbeault. Consideriamo anche $\Delta_\partial \equiv \partial\partial^* + \partial^*\partial$. Si ha*

$$\Delta_d = 2\Delta_{\bar\partial} = 2\Delta_\partial$$

Conseguentemente $\Delta_d(\Omega^{p,q}(M)) \subset \Omega^{p,q}(M)$; in parole, il Laplaciano di Hodge-De Rham rispetta la decomposizione delle forme in tipo (p, q).

Consideriamo ora $Z_d^{p,q}(M) := \{\alpha \in \Omega^{p,q}(M) \,|\, d\alpha = 0\}$ e

$$H^{p,q}(M) = Z_d^{p,q}(M)/d\Omega^* \cap \Omega^{p,q}(M)\,.$$

Consideriamo anche gli spazi di forme armoniche

$$\mathbb{H}_d^{p,q}(M) := \{\alpha \in \Omega^{p,q}(M) \,|\, \Delta_d\, \alpha = 0\}$$

insieme all'usuale

$$\mathbb{H}_d^r(M) := \{\alpha \in \Omega^r(M) \,|\, \Delta_d\, \alpha = 0\}\,.$$

Consideriamo anche

$$\mathbb{H}_{\bar\partial}^{p,q}(M) := \{\alpha \in \Omega^{p,q}(M) \,|\, \Delta_{\bar\partial}\, \alpha = 0\}\,.$$

Dal fatto che Δ_d rispetta la decomposizione in forme di tipo (p, q) e che è un operatore reale otteniamo le seguenti due identità:

$$\mathbb{H}_d^r(M) = \oplus_{p+q=r}\mathbb{H}_d^{p,q}(M)\,, \quad \mathbb{H}_d^{p,q}(M) = \overline{\mathbb{H}_d^{q,p}(M)}\,.$$

D'altra parte, una semplice modifica del Teorema di Hodge dimostra che

$$H^{p,q}(M) \simeq \mathbb{H}_d^{p,q}(M)$$

Inoltre, da $\Delta_d = 2\Delta_{\bar\partial}$ segue che
$$\mathbb{H}^{p,q}_d(M) = \mathbb{H}^{p,q}_{\bar\partial}(M)$$
e quindi
$$H^{p,q}(M) \simeq H^{p,q}_{\bar\partial}(M)\,.$$
Mettendo tutto insieme otteniamo il seguente notevole

Teorema 34. *Sia (M,h) una varietà di Kähler. Allora per i numeri di Betti $b_j(M) := \dim H^j_{\mathrm{dR}}(M)$ e per i numeri di Hodge $h^{p,q}(M) := \dim H^{p,q}_{\bar\partial}(M)$ vale quanto segue*

$$b_{2k}(M) > 0, \quad k \in \{0,\dots,\dim_{\mathbb{C}} M\} \tag{130}$$

$$b_r(M) = \sum_{p+q=r} h^{p,q}(M) \tag{131}$$

$$h^{p,q}(M) = h^{q,p}(M) \tag{132}$$

Conseguentemente
$$b_{2r+1}(M) \in 2\mathbb{Z} \tag{133}$$

Le prime tre equazioni seguono da quanto sopra; l'ultima è facile conseguenza di (131) e (132).

Esempio 1. Per lo spazio proiettivo complesso $P^n(\mathbb{C})$ si ha
$$H^{p,q}_{\bar\partial}(P^n(\mathbb{C})) = \begin{cases} 0 & \text{if } p \neq q \\ \mathbb{C} & \text{if } p = q \end{cases}$$
La dimostrazione è facile conseguenza del Teorema precedente e del fatto che
$$H^{2j}_{\mathrm{dR}}(P^n(\mathbb{C})) \simeq \mathbb{C}\,, \quad H^{2j+1}_{\mathrm{dR}}(P^n(\mathbb{C})) = 0\,.$$
Infatti: dall'ultima relazione sulla coomologia di de Rham segue che $H^{p,q}_{\bar\partial}(P^n(\mathbb{C})) = 0$ se $p+q$ è dispari; se $p \neq j$ allora
$$1 = b_{2j}(P^n(\mathbb{C})) \geq h^{p,2j-p}(P^n(\mathbb{C})) + h^{2j-p,p}(P^n(\mathbb{C})) = 2h^{p,2j-p}(P^n(\mathbb{C}))$$
e quindi $h^{p,2j-p}(P^n(\mathbb{C})) = 0$. Ne segue che necessariamente $h^{p,p}(P^n(\mathbb{C})) = 1$ e abbiamo finito.

Esempio 2. Una superficie di Riemann M è automaticamente di Kähler. Supponiamo che M sia topologicamente un toro con g buchi; allora $b_1(M) = 2g$ e vediamo allora che
$$h^{1,0}(M) = h^{0,1}(M) = g\,.$$

24. Nucleo del calore e teorema di Atiyah-Singer

24.1. Equazione del calore.

Sia (M, g) una varietà riemanniana compatta senza bordo. Consideriamo un operatore di Dirac $D\!\!\!/$ generalizzato su un fibrato $E \to M$ di rango k. L'equazione del calore associata all'operatore $D\!\!\!/^2$ è per definizione l'equazione

$$\frac{\partial}{\partial t}s + D\!\!\!/^2 s = 0\,, \quad \in C^\infty(\mathbb{R}^+ \times M; E)\,. \tag{134}$$

Teorema 35. *Per ogni dato iniziale $s_0 \in C^\infty(M, E)$ esiste ed è unica la soluzione di (134) con condizione iniziale $s(0, \cdot) = s_0(\cdot)$. Inoltre la soluzione $s(t, \cdot) := s_t(\cdot)$ soddidfa $\|s_t\|_{L^2} \leq \|s_0\|_{L^2}$.*

Dimostrazione. È facile conseguenza della teoria sviluppata nelle precedenti sezioni.
Unicità. Sia s_t una soluzione. Per la norma L^2 abbiamo allora

$$\frac{\partial}{\partial t}\|s_t\|^2 = \frac{\partial}{\partial t}(s_t, s_t) = -(D\!\!\!/^2 s_t, s_t) - (s_t, D\!\!\!/^2 s_t) = -2(D\!\!\!/ s_t, D\!\!\!/ s_t) = -2\|D\!\!\!/ s_t\|^2 \leq 0$$

Quindi

$$\|s_t\|^2 \leq \|s_0\|^2 \,\forall t \geq 0$$

da cui la tesi.
Esistenza. Per il calcolo funzionale (si veda la lezione precedente) ha senso considerare l'operatore $\exp(-t\overline{D\!\!\!/^2})$ (infatti la funzione $\lambda \to \exp(-t\lambda^2)$ è sicuramente limitata). Poniamo $s_t := \exp(-t\overline{D\!\!\!/^2})s_0$. Allora sappiamo che $s_t \in C^\infty(M, E)$; inoltre la funzione $\lambda \to \exp(-t\lambda^2)$ è derivabile k volte rispetto a t e la funzione derivata è ancora limitata; è allora facile convincersi che è possibile derivare rispetto a t la funzione s_t ed ottenere:

$$\frac{d}{dt}s_t = -\overline{D\!\!\!/^2} e^{-t\overline{D\!\!\!/^2}} s_0 = -\overline{D\!\!\!/^2} s_t \equiv -D\!\!\!/^2 s_t$$

da cui la tesi. La condizione iniziale è chiaramente soddisfatta per le proprietà della funzione esponenziale e per il calcolo funzionale.

Notazione. L'operatore $\exp(-t\overline{D\!\!\!/^2})$, verrà denotato d'ora in avanti semplicemente con $\exp(-tD\!\!\!/^2)$. L'operatore $\exp(-tD\!\!\!/^2)$ è detto **operatore del calore.**

Dalle proprietà della funzione esponenziale segue che vale la proprietà di semigruppo

$$e^{-(t_1+t_2)D\!\!\!/^2} = e^{-t_1 D\!\!\!/^2} \circ e^{-t_2 D\!\!\!/^2}\,.$$

Sia $E \boxtimes E^*$ il fibrato su $M \times M$ che ha come fibra su (m_1, m_2) il fibrato $E_{m_1} \otimes E^*_{m_2} \equiv \mathrm{Hom}(E_{m_2}, E_{m_1})$.

Proposizione 26. *L'operatore del calore* $\exp(-tD\!\!\!/^2)$ *è un operatore regolarizzante:*

$$(e^{-tD\!\!\!/^2}s)(m_1) = \int_M K_t(m_1, m_2)s(m_2)dvol_M(m_2)\,, \quad \textit{con } K_t \in C^\infty(M \times M; E \boxtimes E^*)\,. \tag{135}$$

Il nucleo K_t è detto nucleo del calore.

Dimostrazione. Sarà conseguenza del seguente

Lemma 10. Sia $A \in \mathcal{L}(L^2(M, E), L^2(M, E))$, $A = A^*$. Supponiamo che $A : L^2(M, E) \to C^{r+1}(M, E)$ sia continuo come operatore fra spazi di Banach. Allora A^2 è un operatore integrale con nucleo in $C^r(M \times M; E \boxtimes E^*)$.

Assumiamo il lemma e dimostriamo la proposizione.
$\forall k \in \mathbb{N}$ l'operatore $\not{D}^k \exp(-t\not{D}^2)$ è limitato in L^2, dato che corrisponde tramite il calcolo funzionale alla funzione $\lambda \to \lambda^k e^{-t\lambda^2}$. Ne segue, per la norma $\| \ \|_0 \equiv \| \ \|_{L^2}$ che

$$\|\not{D}^k e^{-t\not{D}^2}\|_0 \leq C\|s\|_0 \,,$$

da cui, per la disuguaglianza di Gärding e utilizzando C per una costante generica:

$$\|e^{-t\not{D}^2} s\|_k \leq C\left(\|e^{-t\not{D}^2} s\|_0 + \|\not{D}^k e^{-t\not{D}^2}\|_0\right) \leq C\|s\|_0 \,.$$

Ne segue che $e^{-t\not{D}^2} : L^2 \to H_k$ è continuo $\forall k$ e quindi per il Lemma d'immersione di Sobolev, $e^{-t\not{D}^2} : L^2 \to C^r$ è continuo $\forall r$. Ma dalla proprietà di semigruppo sappiamo che $e^{-t\not{D}^2} = e^{-\frac{t}{2}\not{D}^2} \circ e^{-\frac{t}{2}\not{D}^2}$ e utilizzando il Lemma abbiamo immediatamente la tesi.

Dimostrazione Lemma (Sketch). Per semplicità consideriamo $E =$ fibrato banale. Consideriamo $m_1 \in M$. Associamo ad $s \in L^2$ il numero complesso $(As)(m_1)$. Otteniamo un funzionale lineare su L^2 e quindi, per il Teorema di Riesz, esiste $v_{m_1} \in L^2$ tale che $(As)(m_1) =< s, v_{m_1} >$, i.e.

$$(As)(m_1) = \int_M s(m_2)\overline{v_{m_1}(m_2)} dm_2 \,.$$

Si ha
(i) $m \to v_m$ è una funzione C^r a valori in L^2 (segue dall'ipotesi $A \in \mathcal{L}(L^2, C^{r+1})$).
(ii) $(A^2 s)(m_1) = \int_M s(m_2)(Av_{m_2})(m_1) dm_2$ (segue da $A = A^*$).
Poniamo $K(m_1, m_2) := Av_{m_2}(m_1)$. Allora $K \in C^r(M \times M)$ perché $m_2 \to v_{m_2}$ è $C^r(M, L^2)$ da (i) e quindi $m_2 \to Av_{m_2}$ è $C^r(M, C^r(M))$ per ipotesi. Il lemma è dimostrato.

Esempio. Il nucleo del calore del Laplaciano in $\mathbb{R}^n$ è $K_t(x, y) = (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-t||x-y||^2}$.

Notazione. Useremo anche la notazione $K(e^{-t\not{D}^2})(x, y)$ per il nucleo del calore associato a $\exp(-t\not{D}^2)$.

24.2. **Proiezione ortogonale sul nucleo.**

Abbiamo appena visto che $e^{-t\not{D}^2}$ è regolarizzante, cioè

$$e^{-t\not{D}^2}(m_1) = \int K_t(m_1, m_2) s(m_2) dvol_M$$

con nucleo K_t in C^∞. Esiste un altro operatore regolarizzante notevole: Π, la proiezione ortogonale $L^2(M, E) \to \mathrm{Ker}(\not{D}^2) \subset L^2(M, E)$, con $\mathrm{Ker}(\not{D}^2)$ di dimensione finita e contenuto in $C^\infty(M, E)$. Per verificare che Π è un operatore integrale con nucleo C^∞ fissiamo una base $\varphi_1, ..., \varphi_k$ di $\mathrm{Ker}(\not{D}^2)$. È chiaro che se $s \in L^2(M, E)$ allora $\Pi s = \sum_{i:1}^{k} (s, \varphi_i)\varphi_i$ da cui

$$\Pi s = \sum_{i:1}^{k} (\int_M < s, \varphi_i >)\varphi_i \tag{136}$$

Supponiamo preliminarmente che φ_i siano funzioni: definiamo allora funzioni C^∞ su $M \times M$, e le denotiamo $\varphi_i \boxtimes \varphi_i^*$, come segue

$$(\varphi_i \boxtimes \varphi_i^*)(m_1, m_2) = \varphi_i(m_1)\overline{\varphi_i}(m_2).$$

Riscrivendo (136) in termini di queste funzioni abbiamo allora

$$\begin{aligned}(\Pi s)(m_1) &= \sum_{i:1}^{k} \left(\int_M s(m_2)\overline{\varphi_i}(m_2) dvol_{m_2}\right) \varphi_i \\ &= \int_M (\sum_{i:1}^{k} \varphi_i \boxtimes \varphi_i^*)(m_1, m_2) s(m_2) dvol_{m_2}\end{aligned}$$

espressione che dimostra che Π è un operatore integrale con nucleo C^∞ dato da

$$K(\Pi) := \sum_{i:1}^{k} \varphi_i \boxtimes \varphi_i^* \in C^\infty(M \times M)\,.$$

In generale se E è un fibrato *hermitiano* allora definiamo

$$\varphi_i \boxtimes \varphi_i^* \in C^\infty(M \times M, E \boxtimes E^*) \equiv C^\infty(M \times M, \mathrm{HOM}(E, E))$$

$$\text{dove} \quad (E \boxtimes E^*)(m_1, m_2) = E_{m_1} \otimes E^*_{m_2} = \mathrm{Hom}(E_{m_2}, E_{m_1})$$

tramite

$$((\varphi_i \boxtimes \varphi_i^*)(m_1, m_2))\,(v_1) = \langle v_1, \varphi_i(m_2)\rangle\, \varphi_i(m_1)\,, \quad \text{con} \quad v \in E_{m_2}\,.$$

Con questa definizione, ed utilizzando nuovamente (136) abbiamo ancora

$$(\Pi s)(m_1) = \int_M K(\Pi)(m_1, m_2) s(m_2) dvol_{m_2}$$

con nucleo

$$K(\Pi) = \sum_{i:1}^{k} \varphi_i \boxtimes \varphi_i^* \in C^\infty(M \times M; E \boxtimes E^*).$$

24.3. **Ancora sulla regolarità del nucleo del calore.**

Il fatto che l'operatore del calore $e^{-t\not{D}^2}$ sia un operatore regolarizzante è di fatto conseguenza di un risultato più generale che ha interesse per lo meno enunciare:

Proposizione 27. *Sia $\not{D}$ un operatore di Dirac generalizzato su una varietà compatta e sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione rapidamente decrescente. Allora $f(\overline{\not{D}})$ è un operatore regolarizzante. Inoltre, se $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ è lo spazio delle funzioni rapidamente decrescenti, con la sua naturale struttura di spazio di Fréchet, allora, confondendo un operatore regolarizzante con il suo nucleo, si ha che*

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) \ni f \to f(\overline{\not{D}}) \in C^\infty(M \times M; E \boxtimes E^*)$$

è continuo

Non dimostreremo questa Proposizione. L'idea è di scrivere

$$f(\overline{\not{D}}) = \sum_\lambda f(\lambda)\Pi_\lambda\,,$$

con Π_λ il proiettore ortogonale sull'autospazio associato a $\lambda \in \sigma(\overline{\not{D}})$. Per la sezione precedente sappiamo che l'operatore Π_λ è regolarizzante. Occorre allora dimostrare che la serie $\sum_\lambda f(\lambda)\Pi_\lambda$ converge nella topologia dei nuclei integrali C^∞, e cioè in $C^\infty(M \times M; E \boxtimes E^*)$. Questo ultimo passo è lasciato come esercizio nel libro di Roe. Per una dimostrazione molto dettagliata di questo esercizio consultate
`https://www.math.uni-augsburg.de/prof/diff/dokumente/Spingeo_1516/Aufgabe-2.pdf`.

24.4. **Operatori di Hilbert-Schmidt.**

Definizione 37. $A \in \mathcal{L}(H,H)$, con H di Hilbert, si dice *di Hilbert-Schmidt* se esiste una base ortonormale $(e_i)_i$ tale che $\sum_{i=1}^{+\infty} \|Ae_i\|^2 < +\infty$.
In tal caso possiamo introdurre una nuova norma (la norma di Hilbert-Schmidt) tramite

$$\|A\|_{HS}^2 = \sum_{i=1}^{+\infty} \|Ae_i\|^2 = \sum_{i,j} |< Ae_i, e_{j>}|^2 .$$

Teorema 36. *Si ha che*
i) $\|A\|_{HS}$ *non dipende dalla scelta di* $(e_i)_i$*, e inoltre* $||A|| \leqslant \|A\|_{HS}$
ii) $\|A\|_{HS} = \|A^*\|_{HS}$
iii) A *di HS* $\Rightarrow$ A *compatto*
iv) $\|A\|_{HS}^2 = (A, A)_{HS}$ *dove* $(A,B)_{HS} = \sum_{i:1}^{+\infty} (Ae_i, Be_i)$
v) Se $U \in \mathcal{L}(H,H)$ *e* A *è di HS allora* UA *e* AU *sono di HS e vale* $\|UA\|_{HS} \leqslant \|U\| \, \|A\|_{HS}$*, cioè HS è un ideale.*

Per una dimostrazione dettagliata di questo Teorema potete consultare il libro di Shubin (Appendice).

Proposizione 28. *Sia* $H = L^2(M, dm)$ *e* $K \in C^0(M \times M)$*. Definiamo* $A \in \mathcal{L}(H,H)$ *tramite* $Au = \int_M K_A(m_1, m_2)u(m_2)dm_2$*. Allora* A *è di HS e* $\|A\|_{HS}^2 = \int \int_M |K_A|^2 \, dm_1 dm_2$.

Dimostrazione. Una base per $L^2(M \times M)$ è data da $e_i \boxtimes \overline{e_j}$ dove $(e_i)_i$ è una base di L^2. Qui abbiamo posto, come sopra,

$$e_i \boxtimes \overline{e_j}(m_1, m_2) := e_i(m_1)\overline{e_j}(m_2) .$$

Sviluppiamo $K_A = \sum < K_A, e_i \boxtimes \overline{e_j} > e_i \boxtimes \overline{e_j}$ da cui $\|A\|_{HS}^2 = \sum_{i:1}^{+\infty} \|Ae_i\|^2 = \sum_{i,j} |< Ae_i, e_j >|^2 = \sum_{i,j} \left| \int \int K_A(x,y) e_i(x) \overline{e_j}(y) \right| = \sum_{i,j} |< K_A, e_i \boxtimes \overline{e_j} >|^2 = \|K_A\|_{L^2(M \times M)}^2$.
Quindi $\|A\|_{HS}^2 < +\infty$ dato che M è compatta.

Analogamente, se E è un fibrato hermitiano e $K \in C^0(M \times M, E \boxtimes E^*)$ allora l'operatore integrale definito da K è di Hilbert-Schmidt.

Corollario 12. e^{-tD^2} *è di HS* $\forall t$.

24.5. **Operatori di classe traccia.**

Definizione 38. $T \in \mathcal{L}(H,H)$ si dice *di classe traccia* o *tracciabile* se $T = AB$ con A, B di HS. Se T è tracciabile, poniamo $\mathrm{Tr}(T) := (B, A^*)_{HS}$ da cui

$$\mathrm{Tr}(T) = \sum_{i:1}^{+\infty} (Be_i, A^*e_i) = \sum_{i:1}^{+\infty} (ABe_i, e_i) = \sum_{i:1}^{+\infty} (Te_i, e_i)$$

con la serie assolutamente convergente.

Osservazione. Sia A limitato. Allora A tracciabile $\Rightarrow A$ di HS $\Rightarrow A$ compatto.

Se T è autoaggiunto e se scegliamo $(e_i)_i$ base di autovettori di T (base che esiste per il teorema spettrale per operatori compatti e autoaggiunti) allora $\mathrm{Tr}(T) = \sum_{i:1}^{+\infty} \lambda_i$ dove λ_i sono i relativi autovalori (reali).

Da quanto discusso fino ad ora scopriamo che e^{-tD^2}, che è autoaggiunto, è tracciabile e

$$\mathrm{Tr}(e^{-tD^2}) = \sum_{i:1}^{+\infty} e^{-t\lambda_i^2}, \quad \text{con} \quad \lambda_i \quad \text{autovalori di} \quad D.$$

(in questa formula gli autovalori non sono distinti). Infatti per il corollario (12) sappiamo che $e^{-\frac{t}{2}D^2}$ è di HS e quindi per la proprieta' di semigruppo abbiamo che e^{-tD^2} è tracciabile.

Proposizione 29. *T tracciabile, B limitato $\Rightarrow TB$ e BT sono tracciabili e* $\mathrm{Tr}(BT) = \mathrm{Tr}(TB)$. *In parole, gli operatori tracciabili sono un ideale e la traccia di un commutatore $[T, B]$ è uguale a zero.*

Dimostrazione Sia $T = AA'$ con A e A' di HS, $TB = TAA'B$ e

$$\mathrm{Tr}(TB) = \sum_i < TBe_i, e_i > = \sum_i < Be_i, T^* e_i > =$$

$$\sum_i < Be_i, e_k > \overline{< T^* e_i, e_k >} = \sum_i < Be_i, e_k >< Te_k, e_i > = \mathrm{Tr}(BT).$$

Osservazione: analogamente, se T e B sono di HS allora $\mathrm{Tr}(TB) = \mathrm{Tr}(BT)$ (notare che i prodotti sono tracciabili per definizione).

24.6. **Teorema di Lidski.**

Teorema 37. *(Lidski) Se A è regolarizzante con nucleo $K_A \in C^\infty$ allora A è tracciabile e* $\mathrm{Tr}(A) = \int_M K_A \mid_\Delta dvol$ *dove $\Delta = \{(m, m)\} \hookrightarrow M \times M$. Analogamente, se $A : C^\infty(M, E) \to C^\infty(M, E)$ è regolarizzante con nucleo $K_A \in C^\infty(M \times M, E \boxtimes E^*)$ allora A è tracciabile e*

$$\mathrm{Tr}(A) = \int_M \mathrm{tr}_{E_m}((K_A)(m, m)) dvol \,. \tag{137}$$

Osservazione. Il nucleo K_A è tale che $K_A(m, m) \in \mathrm{End}(E_m)$ ed è quindi ben definita la traccia $\mathrm{tr}_{E_m}(K_A(m, m))$

Dimostrazione. Supponiamo preliminarmente che esistano B, C operatori integrali con nucleo continuo come nella proposizione 28 tali che $A = BC$: allora B e C sono di HS e

$$\mathrm{Tr}(A) = (C, B^*)_{HS} = \mathrm{Tr}(CB) = (B, C^*)_{HS}.$$

Sempre per la proposizione 28

$$\mathrm{Tr}(A) = \int_M \int_M K_B(m_1, m_2) K_C(m_2, m_1) dm_1 dm_2;$$

d'altra parte A è anche a nucleo continuo e più precisamente

$$K_A = K_{BC}(m_1, m_2) = \int K_B(m_1, m_2) K_C(m_2, m_3) dm_2;$$

da cui la tesi in questo caso particolare. Resta solo da provare che possiamo sempre esprimere $A = BC$ come sopra: siano $B = (1+D^2)^{-n}$ e $C = (1+D^2)^n A$, e verifichiamo le ipotesi. Il nucleo di C è C^∞ e per quel che concerne B consideriamo $B' = (1+D^2)^{-n/2}$: per Garding e Sobolev $B' : L^2 \to C^1$ se n è abbastanza grande, e per il lemma tecnico della lezione scorsa ne segue che $(B')^2 = B$ ha nucleo C^0. La proposizione è dimostrata.

Riassumendo, abbiamo provato il seguente fondamentale

Teorema 38. e^{-tD^2} *è tracciabile,* $\mathrm{Tr}(e^{-tD^2}) = \sum_i e^{-t\lambda_i^2}$*. Se* K_t *denota il nucleo del calore allora*

$$\mathrm{Tr}(e^{-tD^2}) = \int_M \mathrm{tr}_{E_m}\left(K_t(m,m)\right) dvol \tag{138}$$

24.7. **Formula di McKean-Singer.**

Ricordiamo innanzitutto che se $V = V^+ \oplus V^-$ è uno spazio vettoriale $\mathbb{Z}_2$-graduato e $A \in \mathrm{End}(V)$, allora

$$A = \begin{pmatrix} A_{++} & A_{+-} \\ A_{-+} & A_{--} \end{pmatrix}$$

e, per definizione,

$$\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(A_{++}) + \mathrm{tr}(A_{--}) \quad \text{e} \quad \mathrm{str}(A) = \mathrm{tr}(A_{++}) - \mathrm{tr}(A_{--})$$

dove a destra c'è, per definizione, la **supertraccia** di A.

Sia $D = \begin{pmatrix} 0 & D^- \\ D+ & 0 \end{pmatrix}$ un operatore di Dirac su un fibrato hermitiano $\mathbb{Z}_2$-graduato $E^+ \oplus E^-$. Consideriamo

$$D^2 = \begin{pmatrix} D^-D^+ & 0 \\ 0 & D^+D^- \end{pmatrix}, \quad \text{e} \quad e^{-tD^2} = \begin{pmatrix} e^{-tD^-D^+} & 0 \\ 0 & e^{-tD^+D^-} \end{pmatrix}.$$

Teorema 39. *(Formula di McKean-Singer) Si ha*

$$\mathrm{ind}(D^+) = \mathrm{Str}(e^{-tD^2}) \equiv \mathrm{Tr}(e^{-tD^-D^+}) - \mathrm{Tr}(e^{-tD^+D^-}) = \int_M \mathrm{str}_{E_m}(K_t(m,m))dvol. \tag{139}$$

Dimostrazione. Continuiamo con il nostro piccolo abuso di notazione e confondiamo D con la sua chiusura.
Nella dimostrazione del Teorema di decomposizione spettrale abbiamo visto che $L^2(M,E) = \bigoplus_{j\in\mathbb{N}} M_{\varrho j}(Q)$ e che $M_\rho(Q) = K_{-\mu}(D) \oplus K_\mu(D)$ con $\mu^2 = (1-\rho)/\rho$.
È chiaro che

$$K_{-\mu}(D) \oplus K_\mu(D) \subset K_{\mu^2}(D^2)$$

e quindi, dalla decomposizione ortogonale $L^2(M,E) = \bigoplus_{j\in\mathbb{N}} M_{\varrho_j}(Q)$, vediamo che

$$L^2(M,E) = \bigoplus_\lambda K_\lambda(D^2)\,.$$

Sia $K_\lambda = K_\lambda^+ \oplus K_\lambda^-$ la decomposione dell' autospazio di D^2 associato a λ secondo la gradazione di E e sia $n_\lambda^\pm = \dim(K_\lambda^\pm)$. Per quanto visto $\mathrm{Tr}(e^{-tD^-D^+}) = \sum_{\lambda\geqslant 0} e^{-t\lambda} n_\lambda^+$ e qui gli autovalori si intendono ovviamente distinti. Abbiamo allora $\mathrm{Tr}(e^{-tD^-D^+}) = n_0^+ + \sum_{\lambda>0} e^{-t\lambda} n_\lambda^+$ e $\mathrm{Tr}(e^{-tD+D^-}) = \sum_{\lambda\geqslant 0} e^{-t\lambda} n_\lambda^- = n_0^- + \sum_{\lambda>0} e^{-t\lambda} n_\lambda^-$, e quindi

$$\mathrm{ind}(D^+) = \dim \mathrm{Ker}(D^-D^+) - \dim \mathrm{Ker}(D^+D^-) = n_0^+ - n_0^- \,.$$

Basta quindi provare che $\sum_{\lambda>0} e^{-t\lambda} n_\lambda^- = \sum_{\lambda>0} e^{-t\lambda} n_\lambda^+$. Se $\varphi^+ \in K_\lambda^+$ per $\lambda > 0$ allora $D^+\varphi^+ \in K_\lambda^-$ per $\lambda > 0$: infatti $D^+D^-(D^+\varphi^+) = D^+(D^-D^+\varphi^+) = \lambda D^+\varphi^+$. Analogamente se $\varphi^- \in K_\lambda^-$ per $\lambda > 0$ allora $D^-\varphi^- \in K_\lambda^+$ cioè $K_\lambda^+ \xrightarrow{D^+} K_\lambda^- \xrightarrow{\frac{1}{\lambda}D^-} K$ è l'identità. Ne segue che $K_\lambda^+ \simeq K_\lambda^-$ per $\lambda > 0$ e quindi $n_\lambda^+ = n_\lambda^-$ per $\lambda > 0$, come si voleva.
L'ultima uguaglianza segue subito da (138).

24.8. **Idea della dimostrazione del teorema di Atiyah-Singer tramite il nucleo del calore.** Sia AS la forma differenziale che compare nel membro a destra della formula di Atiyah-Singer. Denotiamo la componente di grado massimo di questa forma differenziale con $[\mathrm{AS}]_n$, con n uguale alla dimensione di M. La formula di Atiyah-Singer per operatori di Dirac si ottiene mandando a zero t nella formula di McKean-Singer. Per operatori qualsiasi il limite della supertraccia del nucleo del calore moltiplicato per la forma di volume, non esiste. Per operatori *associati ad una connessione di Clifford* si ha, miracolosamente, il limite puntuale

$$\mathrm{str}_{E_p} K_t(p,p) d\mathrm{vol}_M(p) \longrightarrow [\mathrm{AS}]_n(p)\,. \tag{140}$$

Dato che il limite è puntuale, possiamo ragionare in un intorno di $p \in M$. Il limite si calcola con un procedimento di riscalamento che è dovuto ad Ezra Getzler. Lo trovate spiegato nel libro di Berline-Getzler-Vergne oppure in quello di Roe (seconda edizione, la prima conteneva errori). Una spiegazione schematica ma piuttosto dettagliata del metodo di Getzler, basato sul libro di Berline-Getzler-Vergne, la trovate anche in delle note per un corso di dottorato (P. Piazza, Note per il corso "Il Teorema dell'indice di Atiyah-Singer", a.a. 2000-2001).

Osservazione. È importante notare che per l'esempio dato dall'operatore di Dolbeault è necessario assumere che la metrica sulla varietà complessa sia di Kahler; solo con questa ipotesi addizionale si ottiene un operatore di tipo Dirac per il quale il limite puntuale (140) esiste. Tuttavia, per una qualsiasi varietà complessa hermitiana, è ancora possibile calcolare l'indice dell'operatore $(\overline{\partial}+\overline{\partial}^*)^+$ e si ottiene anche in questo caso il membro a destra del teorema di Riemann-Roch-Hirzebruch. Rivediamo l'argomento, che abbiamo essenzialmente già dato: si introduce una connessione di Clifford sul fibrato $\Lambda^{0,*}M$, si considera l'operatore di Dirac associato a questa particolare connessione ed alla struttura di modulo di Clifford già introdotta in $\Lambda^{0,*}M$; si ottiene in questo modo un operatore D che ha lo stesso simbolo principale di $(\overline{\partial}+\overline{\partial}^*)^{\mathrm{pari}}$ e che ha quindi lo stesso indice (la loro differenza è un endomorfismo del fibrato). Si scrive la formula dell'indice per D^+ e si verifica che è proprio quella che fa intervenire il membro a destra del teorema di RRH. Dato che $(\overline{\partial}+\overline{\partial}^*)^+$ e D^+ hanno lo stesso indice, abbiamo finito.

References

[1] M. Atiyah. *K-Theory*, Benjamin, New York, 1967.

[2] N. Berline, E. Getzler e M. Vergne. *Heat kernels and Dirac operators*, Springer-Verlag 1992.

[3] P. Gilkey. *Invariance Theory, the heat equation and the Atiyah-Singer index theorem* (seconda edizione). CRC press. 1995.

[4] P. Griffiths, J. Harris. *Priciples of Algebraic Geometry*, Wiley, New York.

[5] A. Hatcher, *Vector bundles and K-Theory*;
disponibile al link `https://www.math.cornell.edu/ hatcher/VBKT/VBpage.html`

[6] D. Husemmoler. *Fibre bundles*, GTM Vol. 20, Springer-Verlag, 1975.

[7] K. Kodaira. *Complex manifolds and deformations of complex structures*. Grundlehren der Math. Wiss. **283**. Springer.

[8] H. B. Lawson, M. Michelshon. *Spin Geometry* Princeton Mathematical Series, Vol 38.

[9] J. Milnor. *Morse theory*, Ann. Math. Studies 51, Princeton University Press, Princeton 1963.

[10] J. Milnor e J.D. Stasheff. *Characteristic classes*, Ann. Math. Studies 51, Princeton University Press, Princeton 1974.

[11] J. Roe. *Elliptic operators, topology and asymptotic methods* (Second Edition). Longman Scientific and Technical 1998.

[12] E. Sernesi. *Geometria 2*. Bollati-Boringhieri.

[13] M. Shubin. *Pseudodifferential operators and spectral theory*. Second Edition. Springer-Verlag.

[14] M. Spivak. *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, vol. I, II ed., Publish or Perish, Inc., Wilmington, Delaware, 1979.

[15] F. Warner. *Foundations of Differentiable manifolds and Lie Groups*. Graduate text in Mathematics **94**. Springer-Verlag.

[16] R. O. Wells Jr. *Differential analysis on complex manifolds* Graduate text in Mathematics. **65** Springer-Verlag.