Paolo Piazza

Corso di Laurea Magistrale

Geometria Superiore

a.a. 2011-12

Contents

1. Capitolo 1. Preliminari su varietà reali e complesse.

1.1. Varietà differenziabili reali.

Per la definizione di varietà differenziabile reale potete consultare Warner [13], da p. 5 a p. 8. In alternativa, Kodaira [5, Definizione 2.6]. Il Kodaira definisce prima le varietà complesse e poi quelle reali, ma non dovreste avere problemi perché le idee sono molto simili. Un'altra buona referenza è Sernesi [10], Capitolo 5.

1.2. Varietà complesse.

Potete consultare il Kodaira [5, Def. 2.3] oppure il Griffith-Harris [3, p.14].

1.3. Esempi.

- Spazi proiettivi reali e complessi: sarà un esercizio.
- Grassmanniane: sarà un esercizio.
- sottovarietà di $\mathbb{R}^n$ definite come insieme di zeri di r funzioni differenziabili con Jacobiano di rango r.
- varietà algebriche proiettive: Kodaira [5], sezione 2.2 (a). Qui trovate anche esempi notevoli di varietà proiettive.
- spazi quoziente per l'azione di un gruppo che opera liberamente ed in maniera propriamente discontinua. Sempre [5], Sezione 2.2 (b). Esempi: curve ellittiche [5, Example 2.7], tori complessi [5, Example 2.8].

1.4. Spazio tangente ad una varietà differenziabile in un punto.

Vi rimando a Sernesi [10], sezione 21.
In alternativa Warner [13], da pag 11 a pag 15.
Per la dimostrazione che $TM := \cup_{p\in M} T_pM$ è una varietà differenziabile vedere [13] pag. 19 (verifiche lasciate al lettore).

1.5. Sottovarietà.

Per la nozione di sottovarieta' di una varieta' differenziabile reale potete consultare il Warner, da p. 22 a p. 33. In alternativa, piu' facile ma meno completo, Sernesi 2: da p. 213 a pag 216 (inclusione differenziabile e' la stessa cosa di "embedding"). Tuttavia, non mi sembra che Sernesi nelle pagine seguenti, sulle summersioni, abbia il risultato piu' generale per la controimmagine di una sottovarieta' tramite un'applicazione differenziabile (Theorem 1.39 in Warner). Sottovarietà complesse di varietà complesse sono trattate in Griffiths-Harris, p.18

1.6. Ripasso di Algebra Multilineare.

- Sernesi, Geometria 2. Da p. 331 a p. 334.
- Warner, Foundations etc. Da p. 54 a p. 62.
- Lang, Algebra Lineare. Da pag 280 a pag 302.

2. Capitolo 2. Fibrati vettoriali I.

2.1. Definizione di fibrato vettoriale.

Definizione 1. Un *fibrato vettoriale* C^∞ di rango k è una terna (E,π,M), dove E e M sono varietà C^∞, $\pi : E \to M$ è un'applicazione C^∞ suriettiva, tale che per ogni $m \in M$

(i) la fibra $E_m = \pi^{-1}(m)$ ha una struttura di spazio vettoriale di dimensione k;

(ii) esiste un intorno U di m e un diffeomorfismo $\varphi_U : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^k$ tale che per ogni $m' \in U$

a) $\varphi_U(E_{m'}) \subseteq \{m'\} \times \mathbb{R}^k$

b) $\varphi_U|_{E_{m'}} : E_{m'} \to \{m'\} \times \mathbb{R}^k$ è un isomorfismo di spazi vettoriali.

La varietà M è detta *base* del fibrato; la varietà E è detta *spazio totale* del fibrato.
Gli intorni U sono detti *intorni banalizzanti*, i diffeomorfismi φ_U *banalizzazioni locali.*
Se per ogni $m \in M$ l'intorno U può essere scelto uguale ad M, il fibrato vettoriale si dice *banale.*

Notazione. Denoteremo spesso il fibrato (E,π,M) con $(E \to M)$, oppure, semplicemente con E.

Definizioni analoghe.

- Fibrati vettoriali nella categoria degli spazi topologici e applicazioni continue.

- Fibrati vettoriali su $\mathbb{C}$.

- Se M ed E sono varietà complesse (quindi le carte $\psi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{C}^n$ hanno valori in $\mathbb{C}^n$ e le funzioni di transizione $\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1} : \psi_\alpha(U_\alpha) \subseteq \mathbb{C}^n \to \psi_\beta(U_\beta) \subseteq \mathbb{C}^n$ sono biolomorfe) allora (E,π,M) è un fibrato vettoriale complesso *olomorfo* se ogni banalizzazione locale $\varphi_U : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{C}^k$ è biolomorfa.

2.2. Funzioni di transizione.

Dalla definizione segue che M ammette un ricoprimento $\{U_\alpha\}$ con intorni banalizzanti, che chiameremo *ricoprimento banalizzante.* Per ogni coppia di aperti U_α, U_β del ricoprimento, con $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, e per ogni $m \in U_\alpha \cap U_\beta$ l'applicazione

$$g_{\alpha\beta}(m) = \varphi_{U_\alpha}|_{E_m} \circ \left(\varphi_{U_\beta}^{-1}\Big|_{\{m\}\times\mathbb{R}^k} \right) :$$
$$\{m\} \times \mathbb{R}^k \to \{m\} \times \mathbb{R}^k$$

è un isomorfismo di spazi vettoriali.
Allora possiamo pensare alle $g_{\alpha\beta}(m)$ come applicazioni

$$g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to GL(k,\mathbb{R}).$$

Queste vengono dette *funzioni di transizione* e verificano due proprietà:
1) $g_{\alpha\alpha}(m) = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^k}$ $\forall m \in U_\alpha \cap U_\beta$,
2) $g_{\alpha\beta} \circ g_{\beta\gamma} = g_{\alpha\gamma}$ in $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$.

Se M è una varietà differenziabile e se sono dati un ricoprimento $\{U_\alpha\}$ di M e mappe $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to GL(k,\mathbb{R})$ soddisfacenti le proprietà 1) e 2), allora è possibile definire un fibrato vettoriale

(E, π, M) che ammetta le $g_{\alpha\beta}$ come funzioni di transizione. Precisamente, consideriamo l'insieme $\widehat{E}$ ottenuto prendendo l'unione disgiunta di tutti gli intorni $U_\alpha \times \mathbb{R}^k$; introduciamo una relazione d'equivalenza $\mathcal{R}$ in $\widehat{E}$ come segue

$$U_\alpha \times \mathbb{R}^k \ni (x, e)\, \mathcal{R}\, (y, f) \in U_\beta \times \mathbb{R}^k \Leftrightarrow x = y \text{ e } f = g_{\alpha\beta}(x)e$$

Sia E lo spazio quoziente dotato della topologia indotta e sia $\pi : E \to M$ la mappa che associa alla classe d'equivalenza di (x, e) il punto $x \in M$. Uno degli esercizi del *secondo compito a casa* consiste nel dimostrare che (E, π, M) ha una naturale struttura di fibrato vettoriale.

Quindi si può dare una definizione alternativa di fibrato vettoriale, come una varietà M su cui siano dati un ricoprimento $\{U_\alpha\}$ e una collezione di mappe differenziabili $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to GL(k, \mathbb{R})$ soddisfacenti le proprietà 1) e 2).

2.3. **Morfismi di fibrati.**

Definizione 2. Siano (E, π, M) e (F, π', M) due fibrati vettoriali (sulla stessa base). Una *mappa di fibrati* (o un *morfismo di fibrati*) da (E, π, M) a (F, π', M) è un'applicazione differenziabile $f : E \to F$ che manda omomorficamente fibre in fibre corrispondenti, ovvero tale che per ogni $m \in M$

1) $f(E_m) \subseteq F_m$
2) $f|_{E_m} : E_m \to F_m$ è un omomorfismo di spazi vettoriali.

Una mappa di fibrati $f : E \to F$ si dice *isomorfismo di fibrati* se è un diffeomorphismo e manda isomorficamente fibre in fibre corrispondenti, ovvero se per ogni $m \in M$

$$f|_{E_m} : E_m \to F_m$$

è un isomorfismo di spazi vettoriali. Un'analoga definizione vale nel caso topologico (richiederemo semplicemente che f sia continua e, nel caso di un isomorfismo, che sia un omeomorfismo).
Il seguente lemma è di facile dimostrazione (altro esercizio del *secondo compito a casa*).

Lemma 1. Siano (E, π_E, M) e (F, π_F, M) due fibrati vettoriali. Sia $f : E \to F$ un morfismo di fibrati e supponiamo che $f|_{E_m}$ sia un isomorfismo per ogni $m \in M$. Verificare che f è allora un isomorfismo di fibrati (e cioè f è anche un diffeomorfismo).

2.4. **Esempi notevoli.**

Esempio 1. Sia M una varietà differenziabile. Per ogni punto $m \in M$ indichiamo con $T_m M$ lo spazio tangente alla varietà M nel punto m. Poniamo

$$TM = \bigcup_{m \in M} T_m M$$

e definiamo $\pi : TM \to M$ ponendo $\pi(x) = m$ se $x \in T_m M$. Si verifica che (TM, π, M) è un fibrato vettoriale il cui rango è uguale alla dimensione di M. Tale fibrato vettoriale si dice *fibrato tangente* ad M. Per ulteriori informazioni sul fibrato tangente potete consultare [13].

Esempio 2. Sia $\mathbb{R}P^n$ lo spazio proiettivo di dimensione n. Ricordiamo che $\mathbb{R}P^n \cong S^n / \sim$, dove $\sim$ è la relazione che identifica i vettori $\underline{x}$ e $-\underline{x}$. Sappiamo che $\mathbb{R}P^n$ è una varietà differenziabile compatta. Consideriamo l'insieme

$$E_1\left(\mathbb{R}^{n+1}\right) = \left\{([\underline{x}], \underline{v}) \in \mathbb{R}P^n \times \mathbb{R}^{n+1} : \underline{v} = \lambda \underline{x}\right\}$$

e l'applicazione $\pi : E_1\left(\mathbb{R}^{n+1}\right) \to \mathbb{R}P^n$ definita da $\pi([\underline{x}], \underline{v}) = [\underline{x}]$. La terna $\left(E_1\left(\mathbb{R}^{n+1}\right), \pi, \mathbb{R}P^n\right)$ è un fibrato vettoriale di rango 1. Facciamo vedere come trovare banalizzazioni locali: per ogni

$[\underline{x}] \in \mathbb{R}P^n$, consideriamo U_1, un intorno di $\underline{x}$ in S^n ad intesezione vuota con la sua immagine tramite la mappa antipodale; l'aperto $U = U_1/\sim \subseteq \mathbb{R}P^n$ è un intorno banalizzante di $[\underline{x}]$ e il diffeomorfismo $\varphi_U : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}$ definito da $\varphi_U([\underline{x}], t\underline{x}) = ([\underline{x}], t)$ è una banalizzazione locale.
Analogamente la terna $\left(E_1\left(\mathbb{C}^{n+1}\right), \pi, \mathbb{C}P^n\right)$ è un fibrato vettoriale complesso olomorfo di rango 1.

Esempio 3. Sia $n > k$. Poniamo

$$G_k(\mathbb{R}^n) = \{\text{sottospazi vettoriali } k-\text{dimensionali di } \mathbb{R}^n\}.$$

Lo spazio $G_k(\mathbb{R}^n)$ ha una naturale topologia: sia $V_k(\mathbb{R}^n)$ l'aperto di $\mathbb{R}^n \times \times \cdots \times \mathbb{R}^n$ k-volte costituito dalle k-ple di vettori linearmente indipendenti. Esiste una suriezione $\pi : V_k(\mathbb{R}^n) \to G_k(\mathbb{R}^n)$

$$\pi(\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_k) = \operatorname{Span}(\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_k).$$

Dotiamo $G_k(\mathbb{R}^n)$ della topologia quoziente: U è aperto in $G_k(\mathbb{R}^n)$ se e solo se $\pi^{-1}(U)$ è aperto in $V_k(\mathbb{R}^n)$.
$G_k(\mathbb{R}^n)$ ha una naturale struttura di varietà differenziabile compatta di dimensione $n(n-k)$. Consideriamo l'insieme

$$E_k(\mathbb{R}^n) = \{(p, \underline{v}) \in G_k(\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n : \underline{v} \in p\}$$

e l'applicazione $\pi : E_k(\mathbb{R}^n) \to G_k(\mathbb{R}^n)$ definita da $\pi(p, \underline{v}) = p$. La terna $(E_k(\mathbb{R}^n), \pi, G_k(\mathbb{R}^n))$ è un fibrato vettoriale di rango k e C^∞. Le verifiche di tutte queste affermazioni costituiscono un interessante esercizio. Si noti che per $k = 1$ riotteniamo l'esempio 2.
$G_k(\mathbb{R}^n)$ è detta la Grassmanniana dei k-piani in $\mathbb{R}^n$. $(E_k(\mathbb{R}^n), \pi, G_k(\mathbb{R}^n))$ è detto *fibrato universale* sulla Grassmanniana.

Esempio 4. Analogamente lo spazio $G_k(\mathbb{C}^n)$ è una varietà complessa compatta di dimensione complessa $n(n-k)$ e la terna $(E_n(\mathbb{C}^n), \pi, G_k(\mathbb{C}^n))$ è un fibrato vettoriale complesso olomorfo di rango k, detto *fibrato universale* su $G_k(\mathbb{C}^n)$.

Osservazioni.
1. Se $T \in GL(n, \mathbb{C})$ allora T induce un'applicazione $T_\sharp : G_k(\mathbb{C}^n) \to G_k(\mathbb{C}^n)$, che è un diffeomorfismo.
2. C'è un'applicazione naturale

$$\psi : G_k(\mathbb{C}^n) \to G_{n-k}(\mathbb{C}^n) \tag{1}$$

ottenuta mandando V in $V^\perp$. Quest'applicazione è un diffeomorfismo.
3. Alcuni autori definiscono la Grassmanniana $G_k(\mathbb{C}^n)$ come l'insieme dei sottospazi di *codimensione* k in $\mathbb{C}^n$. Le due definizioni sono compatibili tramite l'applicazione ψ in (1).

2.5. **Sezioni di un fibrato.**

Definizione 3. Sia (E, π, M) un fibrato vettoriale. Una *sezione* C^∞ del fibrato è un'appl. differenziabile $s : M \to E$ tale che $\pi \circ s = \mathrm{Id}|_M$ ovvero tale che per ogni $m \in M$ risulti $s(m) \in E_m = \pi^{-1}(m)$.

Denotiamo con $C^\infty(M, E)$ l'insieme delle sezioni C^∞ del fibrato (E, π, M). Si noti che, poiché ogni fibra è una spazio vettoriale, anche $C^\infty(M, E)$ è uno spazio vettoriale, le cui operazioni sono definite punto per punto. Notiamo anche che $C^\infty(M, E)$ ha una naturale struttura di $C^\infty(M)$-mudulo.

Proposizione 1. *Un fibrato vettoriale (E, π, M) di rango k è banale se e solo se esistono k sezioni C^∞ $s_1, \ldots, s_k$ linearmente indipendenti, ovvero tali che $s_1(m), \ldots, s_k(m)$ siano linearmente indipendenti per ogni $m \in M$.*

Dimostrazione.
$\boxed{\Rightarrow}$ Supponiamo (E, π, M) banale. Allora esiste una mappa di fibrati $\Phi : E \to M \times \mathbb{R}^k$ che induce un isomorfismo $\Phi : E_m \to \{m\} \times \mathbb{R}^k$ su ogni fibra. Sia $\Psi = \Phi^{-1} : M \times \mathbb{R}^k \to E$ e definiamo le applicazioni $s_i : M \to E$ ponendo $s_i(m) = \Psi(m, \underline{e}_i)$ (dove $\underline{e}_i$ è l'i -simo vettore canonico di $\mathbb{R}^k$). Le applicazioni $s_1, ..., s_k$ sono sezioni C^∞ e per costruzione sono linearmente indipendenti.
$\boxed{\Leftarrow}$ Supponiamo che esistano k sezioni C^∞ $s_1, ..., s_k$ linearmente indipendenti. Definiamo $\Psi : M \times \mathbb{R}^k \to E$ ponendo $\Psi(m, \underline{x}) = x^1 s_1(m) + ... + x^k s_k(m)$. L'applicazione Ψ è C^∞ e induce un isomorfismo su ogni fibra. Allora non è difficile vedere, questo è il Lemma 1, che Ψ è un diffeomorfismo. Quindi (E, π, M) è banale. $\square$

Osservazione. Notiamo che la dimostrazione stabilisce l'esistenza *locale* di k sezioni linearmente indipendenti su ogni aperto banalizzante. Si dice che queste sezioni costituiscono una **base locale**.

Esempio. Il fibrato $\left(E_1\left(\mathbb{R}^{n+1}\right), \pi, \mathbb{R}P^n\right)$ non è banale.

Dimostrazione. Basta far vedere che ogni $s \in C^\infty\left(\mathbb{R}P^n, E_1\left(\mathbb{R}^{n+1}\right)\right)$ si annulla in un punto. Sia $s : \mathbb{R}P^n \to E_1\left(\mathbb{R}^{n+1}\right)$ una sezione. Sia $p : S^n \to \mathbb{R}P^n$ la proiezione canonica. L'applicazione $q = s \circ p : S^n \to E_1\left(\mathbb{R}^{n+1}\right)$ è tale che $q(\underline{x}) = ([\underline{x}], t(\underline{x})\underline{x})$, con $t \in C^\infty(S^n)$. Inoltre, poiché $q(-\underline{x}) = q(\underline{x})$, si deve avere $t(-\underline{x}) = -t(\underline{x})$. Allora, poiché S^n è connessa e in particolare $t \in C^0(S^n)$, deve esistere $\underline{x}_0 \in S_n$ tale che $t(\underline{x}_0) = 0$, ovvero tale che $s([\underline{x}_0]) = ([\underline{x}_0], \underline{0})$. $\square$

Possiamo dare anche una definizione alternativa di sezione. Sia (E, π, M) un fibrato vettoriale, con ricoprimento $\{U_\alpha\}$ e funzioni di transizione $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to GL(k, \mathbb{R})$. Una *sezione* C^∞ del fibrato è allora una collezione $\{s_\alpha\}$ di mappe $s_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}^k$ differenziabili tali che per ogni coppia di aperti U_α e U_β non disgiunti e per ogni $m \in U_\alpha \cap U_\beta$ risulti

$$s_\alpha(m) = g_{\alpha\beta}(m)\, s_\beta(m)\,.$$

Le due definizioni sono equivalenti come ora mostreremo.
Sia s una sezione C^∞ (nel senso della prima definizione). Occorre verificare che esiste una collezione $\{s_\alpha\}$ di mappe che soddisfa le condizioni richieste nella seconda definizione. Sia $m \in M$ e siano U_α un intorno di m banalizzante e φ_α una banalizzazione locale su U_α. Se $\underline{e}_1, ..., \underline{e}_k$ sono i vettori della base canonica di $\mathbb{R}^n$, $\varphi_\alpha^{-1}(m, \underline{e}_1), ..., \varphi_\alpha^{-1}(m, \underline{e}_k)$ sono una base di E_m. Quindi esistono k numeri, che chiamo

$$s_\alpha^1(m), ..., s_\alpha^k(m)$$

tali che

$$s(m) = \sum_{i=1}^{k} s_\alpha^i(m)\, \varphi_\alpha^{-1}(m, \underline{e}_i)\,.$$

Allora, considerando la restrizione di s a $U_\alpha \cap U_\beta$, si ha

$$s|_{U_\alpha \cap U_\beta} = \sum_{i=1}^{k} s_\alpha^i(m)\, \varphi_\alpha^{-1}(m, \underline{e}_i) = \sum_{i=1}^{k} s_\beta^i(m)\, \varphi_\beta^{-1}(m, \underline{e}_i)\,.$$

Applicando φ_α al secondo e terzo membro, si ha

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k} s_\alpha^i(m)\, \underline{e}_i &= \sum_{i=1}^{k} s_\beta^i(m) \left(\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}\right)(m, \underline{e}_i) = \\ &= \sum_{i=1}^{k} s_\beta^i(m)\, g_{\alpha\beta}(m)\, (\underline{e}_i) = \\ &= \sum_{i=1}^{k} s_\beta^i(m)\, (g_{\alpha\beta}(m))_i^j \left(\underline{e}_j\right).\end{aligned}$$

dove l'indice in basso in $(g_{\alpha\beta}(m))_i^j$ è l'indice di colonna.

Quindi

$$s_\alpha^k(m) = s_\beta^i(m)\, (g_{\alpha\beta}(m))_i^k\,,$$

Allora, ponendo $s_\alpha = \left(s_\alpha^1, ..., s_\alpha^k\right)^t$, si ottiene

$$s_\alpha = g_{\alpha\beta}\, s_\beta.$$

Quindi la collezione $\{s_\alpha\}$ soddisfa le condizioni richieste nella seconda definizione.
Il viceversa è chiaro: se sono date le $\{s_\alpha\}$ e le banalizzazioni, allora possiamo definire una sezione globale s (scrivete i dettagli per esercizio).

3. Capitolo 3. Fibrati vettoriali II .

3.1. Operazioni sui fibrati.

Dati 2 fibrati su M (E, π^E, M), (F, π^F, M) si possono definire i fibrati

$$E^*\,,\quad E\otimes F\,,\quad E\oplus F\,,\quad \Lambda^n E\,,\quad \mathrm{Hom}(E,F)\equiv E\otimes F^*$$

a partire dalle corrispondenti operazioni sulle fibre. Ad esempio, poniamo

$$E\oplus F := \cup_{m\in M} E_m \oplus F_m\,;$$

rimane allora definito il fibrato $(E\oplus F, \pi^{E\oplus F}, M)$ che per costruzione ha come fibre $(\pi^{E\oplus F})^{-1}(m) = E_m \oplus F_m$. La banalità locale è ereditata da quella di E ed F: per ipotesi $\forall m \in M$ esistono aperti U^E , U^F e diffeomorfismi locali

$$\phi^E : (\pi^E)^{-1}(U^E) \to U^E \times \mathbb{R}^k$$
$$\phi^F : (\pi^F)^{-1}(U^F) \to U^F \times \mathbb{R}^n$$

con cui si costruisce il diffeomorfismo

$$\phi^{E\oplus F} : (\pi^{E\oplus F})^{-1}(U^E \cap U^F) \to U^E \cap U^F \times \mathbb{R}^{k+n}$$

che dà la banalizzazione di $E \oplus F$. Lascio a voi i dettagli.

Osservazione 1. Consideriamo un morfismo di fibrati $f : E \to F$. È allora chiaro che f definise in maniera naturale una sezione $s_f \in C^\infty(M, \mathrm{Hom}(E, F))$: basterà porre $s_f(m) := f|_{E_m}$. Supponiamo che $m_0 \in M$ sia tale che $s_f(m_0) \in \mathrm{Iso}(E_{m_0}, F_{m_0})$, allora esiste un intorno aperto di m_0, U, tale che $s_f(m) \in \mathrm{Iso}(E_m, F_m)$ $\forall m \in U$ (per la dimostrazione basterà considerare un intorno banalizzante di m_0 ed utilizzare il fatto che $GL(k,\mathbb{R})$ è aperto in $M_{k\times k}(\mathbb{R})$).

3.2. Fibrato indotto da un'applicazione (pull-back).

Sia $f : N \to M$ un'applicazione tra le varietà differenziabili M ed N e sia (E, π, M) un fibrato su M. Si consideri l'insieme

$$f^*E = \{(n, v) \in N \times E | f(n) = \pi(v)\}.$$

Utilizzando il fatto che $f^*E = \Phi^{-1}(\Delta)$, con Δ la diagonale in $M \times M$ e $\Phi(n, v) := (f(n), \pi(v))$, si dimostra che f^*E è una sottovarietà di $N \times E$ e che ha, quindi, una naturale struttura di varietà differenziabile [1]. Esistono due applicazioni naturali $\hat{f}$ e π^{ind}:

$$\hat{f} : f^*E \to E \text{ con } \hat{f}(n, v) = v$$
$$\pi^{ind} : f^*E \to N \text{ con } \pi^{ind}(n, v) = n$$

(f^*E, π^{ind}, N) ha una naturale struttura di fibrato vettoriale; esso è, per definizione, il *fibrato indotto da f su N*. La fibra di f^*E su n è $E_{f(n)}$, come segue subito dalla definizione; quindi $(f^*E)_n$ ha una struttura di spazio vettoriale per ogni $n \in N$.
Facciamo vedere la banalità locale:
sia U un intorno banalizzante di M; $f^{-1}(U)$ è allora un aperto di N e si ponga $f^{-1}(U) = \tilde{U}$. Sia

$$\psi : U \times \mathbb{R}^k \to \pi^{-1}(U)$$

una banalizzazione di $\pi^{-1}(U)$. Si definisca:

$$\tilde{\psi} : \tilde{U} \times \mathbb{R}^k \to (\pi^{ind})^{-1}(\tilde{U})$$

[1] Si veda ad esempio il [13], theorem 1.39.

con
$$\tilde{\psi}(n,v) = (n, \psi(f(n),v))$$
Si ha $\pi(\psi(f(n),v)) = f(n)$ come deve essere ed è facile verificare che $\tilde{\psi}$ è un diffeomorfismo, con inversa $\tilde{\psi}^{-1} : (\pi^{ind})^{-1}(\tilde{U}) \to \tilde{U} \times \mathbb{R}^k$ definita da $\tilde{\psi}^{-1}(n,w) = (n,\hat{w})$ con $\psi(n,\hat{w}) = w$.

Osservazioni.
1. Se (E,π,M) è banale e $f : N \to M$ è un'applicazione differenziabile allora il fibrato indotto su N , f^*E, è anche banale.
2. Se $g : Z \to Y$ e $f : Y \to X$ sono due mappe C^∞, allora $(f \circ g)^*E$ è isomorfo a $g^*(f^*E)$: $(f \circ g)^*E \cong g^*(f^*E)$: basterà mandare $(z,e) \in (f \circ g)^*E$ in $(z,(g(z),e)) \in g^*(f^*E)$.
3. Se $i : Y \hookrightarrow X$ è un'inclusione allora $E|_Y \cong i^*E$: basterà mandare $e \in E|_Y$ in $(\pi(e),e)$.
4. Si può dare una definizione di fibrato indotto utilizzando le funzioni di transizione: se $E = \{(U_\alpha, g_{\alpha\beta})\}$, si ponga
$$f^*E = \{(f^{-1}(U_\alpha), g_{\alpha\beta} \circ f)\}.$$
5. Se $f : N \to M$ è una mappa C^∞ allora otteniamo una mappa lineare indotta $f^* : C^\infty(M;E) \to C^\infty(N, f^*E)$ associando a s la sezione f^*s, con $(f^*s)(m) := s(f(m))$.
6. Se $f : N \to M$ è un'applicazione costante, $f(n) = m_0, \forall n \in N$, allora f^*E è banale, perché isomorfo al fibrato banale $N \times E_{m_0}$.

3.3. **Il semigruppo** $\mathrm{Vect}(X)$**. Teorema di omotopia.**

In questa sottosezione lavoreremo nella categoria degli spazi topologici e funzioni continue.

Definizione 4. Sia X uno spazio topologico compatto di Hausdorff [2]. $\mathrm{Vect}_k(X)$ è per definizione l'insieme delle classi di isomorfismo di fibrati vettoriali *complessi* di rango k. Analogamente si definisce $\mathrm{Vect}_k^{\mathbb{R}}(X)$, le classi di isomorfismo di fibrati vettoriali *reali* di rango k. Poniamo $\mathrm{Vect}(X) = \cup_k \mathrm{Vect}_k(X)$.

È importante notare che $\mathrm{Vect}(X)$ è un *semigruppo* abeliano rispetto all'operazione $\oplus$, con elemento neutro uguale al fibrato banale $X \times \{0\}$. Notiamo anche che se $f : Y \to X$ è continua allora l'operazione di pull-back induce un morfismo di semigruppi $f^* : \mathrm{Vect}(X) \to \mathrm{Vect}(Y)$. Abbiamo quindi definito un funtore $\mathrm{Vect}(\quad)$ dalla categoria degli spazi topologici compatti e applicazioni continue alla categoria dei semigruppi abeliani e morfismi di semigruppi. Questo funtore risulta essere *omotopico*: questa fatto fondamentale è conseguenza del seguente teorema

Teorema 1. *(di omotopia) Sia Y compatto e siano f_0, f_1, due applicazioni continue $Y \to X$. Sia $(E \to X)$ un fibrato vettoriale su X. Se f_0 è omotopa a f_1, $f_0 \sim f_1$, allora f_0^*E è isomorfo a f_1^*E.*

Il teorema vale nell'ipotesi più generale che Y sia paracompatto.
Dimostrazione.
Sia $\{f_t\}_{t\in[0,1]}$ l'omotopia fra f_0 e f_1. Basta dimostrare che la classe di isomorfismo di f_t^*E è localmente costante in t.
In generale sia $H \to Y \times [0,1]$ un fibrato; utilizzeremo le notazioni
$$Y \times \{\tau\} := Y_\tau\,, \quad H|_{Y\times\{\tau\}} := H_\tau$$
Sia $s_\tau \in C(Y_\tau, H_\tau)$: allora esiste un'estensione $s \in C(Y \times [0,1], H)$ tale che $s|_{Y_\tau} = s_\tau$. Dimostriamo questo fatto: sia $x \in Y_\tau$ ed U un intorno di x che sia banalizzante per H; la sezione s_τ ristretta a $Y_\tau \cap U$ può essere considerata come una funzione a valori vettoriali definita su un chiuso di uno spazio topologico normale; per il teorema di Tietze esiste un'estensione $t_U \in C(U, H|_U)$ di s_τ

[2] **tutti i nostri spazi topologici sono di Hausdorff se non specificato diversamente**

ristretta a $Y_\tau \cap U$. Dato che Y è compatto esiste un ricoprimento finito di Y_τ, $\{U_1,\ldots,U_m\}$ con U_j aperto, ed estensioni t_j di s_τ ristretta a $Y_\tau \cap U_j$. Sia $\{\phi_j\}$ una partizione dell'unità subordinata al ricoprimento $\{U_1,\ldots,U_m\}$. È chiaro che $\phi_j t_j$ ha una naturale estensione ad una sezione in $C(Y \times [0,1,H)$: concludiamo che $\sum_j \phi_j t_j$ è un'estensione cercata.
La stessa identica dimostrazione stabilisce il seguente

Lemma 2. (di estensione) Sia X uno spazio topologico compatto di Hausdorff e $W \subseteq X$ un sottoinsieme chiuso. Sia $(E \to X)$ un fibrato vettoriale. Allora ogni sezione $s_W : W \to E|_W$ può essere estesa ad una sezione $s \in C(X,E)$.

La dimostrazione dipende solo dall'esistenza di una partizione dell'unità ed infatti il Lemma vale nell'ipotesi più generale che X sia paracompatto di Hausdorff.
Abbiamo ora bisogno di un altro risultato preliminare:

Lemma 3. Siano E ed F due fibrati su X, X compatto. Sia $W \subseteq X$ un chiuso e supponiamo che esista un isomorfismo di fibrati $\phi : E|_W \to F|_W$. Allora esiste un aperto $U \supseteq W$ ed un morfismo di fibrati $\Phi : E \to F$ che estende ϕ ed è un isomorfismo su U.

Dimostrazione. Per l'osservazione 1, l'isomorfismo ϕ definisce in maniera naturale una sezione che chiameremo ancora ϕ del fibrato $\mathrm{Hom}(E,F)$ ristretto a W. Per il Lemma precedente esiste un'estensione Φ di ϕ che definisce quindi un morfismo di fibrati $E \to F$ su tutto X. Dato che $\Phi|_W = \phi$ è un isomorfismo, segue esiste un aperto U contente W tale che $\Phi|_U$ è un isomorfismo.Il lemma è dimostrato.

Possiamo ora concludere la dimostrazione del teorema. Sia $f : Y \times [0,1] \to X$ l'omotopia fra f_0 e f_1, quindi $f(y,\tau) = f_\tau$. Sia $\pi : Y \times [0,1] \to Y$ la proiezione sul primo fattore. Fissiamo $\tau \in [0,1]$ Per le proprietà funtoriali del pull-back è chiaro che i fibrati f^*E e $\pi^* f_\tau^*(E)$ sono isomorfi quando ristretti a Y_τ. Per il lemma appena enunciato sappiamo che questo isomorfismo si estende ad un intorno aperto di Y_τ: quindi, dalla compattezza di Y deduciamo che esiste un $\epsilon > 0$ tale che f^*E e $\pi^* f_\tau^*(E)$ sono isomorfi se ristretti a $Y \times (\tau - \epsilon, \tau + \epsilon)$ e ciò è sufficiente per concludere.

Corollario 1. *Se X ed Y sono due spazi compatti ed $f : Y \to X$ è un'equivalenza omotopica* [3] *allora $f^* : \mathrm{Vect}(X) \to \mathrm{Vect}(Y)$ è un isomorfismo di semigruppi*

Corollario 2. *Se X è contraibile* [4] *allora ogni fibrato E su X è banale ed esiste quindi un isomorfismo di semigruppi $\mathrm{Vect}(X) \cong \mathbb{N}$.*

Infatti, dire che X è contraibile equivale a dire che la mappa identità su X è omotopa alla mappa costante C ad un punto p_0 di X. Ma, come osservato subito prima di questa sottosezione, il pullback tramite una mappa costante è un fibrato banale; il corollario segue allora immediatamente dal teorema di omotopia ($E = (\mathrm{Id}_X)^*E \simeq X \times E_{p_0} \simeq X \times \mathbb{R}^k$.)

3.4. **Sottofibrato.**

Sia (E,π,M) un fibrato vettoriale. Sia F una sottovarietà di E e supponiamo che $F \cap E_m$, con $E_m := \pi^{-1}(m)$, sia un sottospazio vettoriale di E_m. La terna $(F, \pi|_F, M)$ è per definizione un sottofibrato di E. Dalla condizione che F è una sottovarietà segue che $\forall x \in M$ $\exists$ U, intorno di x, e banalizzazioni locali di E :

$$\phi_U : E_U := \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^k$$

[3] esiste $g : X \to Y$ tale che $f \circ g \sim \mathrm{id}_X$ e $g \circ f \sim \mathrm{id}_Y$

[4] e cioè X è omotopicamente equivalente ad un punto

tali che la loro restrizione ad F fornisce banalizzazioni locali di F:

$$\phi_U|_F : F_U \to U \times \mathbb{R}^\ell \subset U \times \mathbb{R}^k.$$

In termini delle funzioni di transizione: possiamo scrivere in una tale banalizzazione

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} h_{\alpha\beta} & k_{\alpha\beta} \\ 0 & j_{\alpha\beta} \end{pmatrix}$$

e le $h_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to GL(l, \mathbb{R})$ sono le funzioni di transizione di (F, π, M).

Con la stessa tecnica si può costruire il fibrato quoziente $(E/F, \pi, M)$ le cui funzioni di transizione sono le $j_{\alpha\beta}$.

3.5. **Metrica riemanniana su un fibrato reale.**

Dato un fibrato reale (E, π, M), si definisce una metrica g come una sezione del fibrato $E^* \otimes E^*$, $g \in C^\infty(M, E^* \otimes E^*)$, tale che $g(m)$, forma bilineare su $E \times E$, sia *simmetrica* $g(m)(u, v) = g(m)(v, u)$ e definita positiva:

$$g(m)(v, v) \geq 0 \ \forall v \in E_m$$

Utilizzando una partizione dell'unità si dimostra senza particolari difficoltà che esiste sempre una metrica su un fibrato E: basterà definire metriche locali $g^\alpha(\ ,\ )$ su ogni intorno banalizzante (e questo si può fare utilizzando la banalizzazione ψ_α e la metrica standard su $U_\alpha \times \mathbb{R}^k$); poi si considera una partizione dell'unità $\{f_\alpha\}$ subordinata a $\{U_\alpha\}$ e per ogni $m \in M$ la forma $g(m)(\ ,\ ) := \sum_\alpha f_\alpha(m) g^\alpha(m)(\ ,\ )$. È facile vedere a questo punto che g definisce una metrica su E.
Se $E = TM$. allora una metrica g su E si dice una **metrica riemanniana sulla varietà** M.

3.6. **Metrica hermitiana su un fibrato complesso.**

Se (E, π, M) è un fibrato complesso, analogamente si definisce la nozione di metrica hermitiana su (E, π, M). L'esistenza di una metrica hermitiana si dimostra ancora una volta utilizzando una partizione dell'unità.

3.7. **Matrice locale della metrica rispetto ad una base locale.**

Tramite le banalizzazioni locali abbiamo $\forall\ U_\alpha$, intorno banalizzante, una base locale di sezioni (già visto). Infatti se $\psi_\alpha : U_\alpha \times \mathbb{R}^k \to \pi^{-1}(U_\alpha)$ è una banalizzazione locale, fissata una base e_i in $\mathbb{R}^k$, si ha una base locale di sezioni definita da:

$$e_i^\alpha(m) := \psi_\alpha(m, e_i) \in C^\infty(U_\alpha, E)$$

(Attenzione: indici in basso, queste sono **sezioni** del fibrato $E|_{U_\alpha}$...)
Se u, v sono sezioni di $\pi^{-1}(U_\alpha)$, allora $u = \lambda^i e_i^\alpha$ e $v = \mu^i s_i^\alpha$, dove si è utilizzata la convenzione della somma su indici ripetuti e:

$$g(u, v) = \lambda^i \mu^j g(e_i^\alpha, e_j^\alpha)$$

Dunque $\forall m \in U_\alpha$, $g(e_i^\alpha, e_j^\alpha)(m) := g_{ij}(\alpha)(m)$ è la matrice locale della metrica rispetto alla base locale $\{e_i^\alpha\}$ calcolata in m.
Sia $\{\eta_i^\alpha\}$ un'altra base locale con

$$\eta_i^\alpha = G_i^j e_j^\alpha$$

allora la matrice locale della metrica rispetto a η_j^α, e cioè $g(\eta_i^\alpha, \eta_j^\alpha)$, è uguale a $G^T g\, G$. In particolare, si considerino due intorni banalizzanti U_α, U_β ed in $U_\alpha \cap U_\beta$ le basi $\{e_i^\alpha\}$, $\{e_i^\beta\}$ definite come sopra utilizzando le due banalizzazioni, allora $e_i^\beta = (g_{\alpha\beta})_i^j e_j^\alpha$, dove vi ricordo ancora una volta che queste sono sezioni e non coordinate.

Se $g(\alpha)(m)$ è la matrice della metrica $\forall m \in U_\alpha$, si ha quindi :

$$g(\beta) = g_{\alpha\beta}^T \, g(\alpha) \, g_{\alpha\beta}$$

Quest'ultima relazione può essere utilizzata per definire la metrica mediante le funzioni di transizione $g_{\alpha\beta}$.

3.8. **Fibrato normale.**

Sia F un sottofibrato di E dotato di metrica g, allora non è difficile dimostrare (ma non è proprio ovvio) che

$$F^\perp = \bigcup_{m \in M} F_m^\perp$$

definisce un sottofibrato di E, detto fibrato ortogonale ad F.

Valgono le seguenti proprietà:

- $E/F \simeq F^\perp$
- $F \oplus F^\perp \simeq E$
- Se $M \subseteq \mathbb{R}^n$ è una sottovarietà e si considera il sottofibrato $TM \subseteq M \times \mathbb{R}^n = T\mathbb{R}^n|_M$, allora $N_M \equiv (TM)^\perp$ è il fibrato normale ad M.
- Analogamente se $M \subseteq (X, g)$ è una sottovarietà di una varietà riemanniana X dotata di metrica g, allora $(TM)^\perp \equiv N_{M/X}$, l'ortogonale di TM in $TX|_M$, è il fibrato normale ad M in X.

4. Capitolo 4. Forme differenziali.

4.1. Forme differenziali su una varietà differenziabile reale.

Sia M una varietà differenziabile reale di dimensione m e sia $\mathcal{A}$ un atlante per M. Sappiamo (è stato un esercizio per casa) che è allora ben definito (TM, π, M), il fibrato tangente a M, un fibrato vettoriale reale di rango $\dim M$. Lo spazio delle sezioni di questo fibrato è lo spazio dei *campi vettoriali* su M. Una collezione di aperti banalizzanti per questo fibrato è dato proprio dalle carte di $\mathcal{A}$. Se (U, ϕ) è una tale carta, con $\phi : U \to \mathbb{R}^m$, $\phi = (x^1, \ldots, x^m)$, $x^j \in \mathcal{C}^\infty(M)$, allora una base locale di sezioni è data dai campi vettoriali

$$U \ni p \to \frac{\partial}{\partial x^j}\Big|_p \in T_pM \,.$$

È proprio utilizzando questa base locale che si banalizza localmente il fibrato tangente.

Sappiamo che è allora ben definito il fibrato duale (T^*M, π, M) che è detto fibrato cotangente. Le sezioni del fibrato cotangente sono le 1-forme differenziali di M. Data una funzione differenziabile $f : M \to \mathbb{R}$ su M, $f \in C^\infty(M)$, possiamo sempre definire una 1-forma, df, ponendo il suo valore in p, denotato df_p, definito come segue

$$df_p(v) = v([f]_p)$$

con $v \in T_pM$ (v è quindi una derivazione sui germi di funzioni in p) e $[f]_p$ il germe definito da f in $p \in M$. In particolare, se (U, ϕ) è una carta come sopra, allora sono ben definite le sezioni locali

$$U \ni p \to dx^j_p \in T^*_pM \,.$$

Dato che dalle definizioni segue subito che $dx^j_p(\frac{\partial}{\partial x^i}\big|_p) = \delta^j_i$ vediamo che queste m sezioni locali sono una base locale che è infatti la base locale duale a quella vista per il fibrato tangente. Si ha quindi $df|_U = \sum \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$ (basterà far vedere che i due membri coincidono su una base di T^*_pM $\forall p \in U$, il che è immediato scegliendo la base locale $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}$).

Consideriamo ora il fibrato $\Lambda^k(T^*M)$, per $k = 0, \ldots, m = \dim M$. Le sezioni di $\Lambda^k(T^*M)$ sono, per definizione, le k-forme differenziali su m. Si pone spesso $\Omega^k(M) := C^\infty(M, \Lambda^k(T^*M))$ e $\Omega^*(M) = \oplus_{k=0}^{\dim M} \Omega^*(M)$ (che è anche lo spazio delle sezioni del fibrato $\oplus_k \Lambda^k(T^*M)$). Da quello che avete imparato (autonomamente) sull'algebra di Grassmann di uno spazio vettoriale e dalla nostra breve discussione qui sopra, deducete subito che le carte di $\mathcal{A}$ sono intorni banalizzanti per questi fibrati e che una base locale di sezioni per $\Lambda^k(T^*M)|_U$ è data da

$$\{dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}, 0 < i_1 < i_2 < \cdots < i_k\} \,.$$

Ciò implica, ovviamente, che ogni $\omega \in \Omega^k(M)$ si scrive localmente, nella carta $(U, (x^1, \ldots, x^m))$, come

$$\omega|_U = \sum_{0<i_1<i_2<\cdots<i_k} \omega_{i_1 \cdots i_k} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}$$

con $\omega_{i_1 \cdots i_k} \in C^\infty(U)$. È inoltre chiaro che $\Omega^*(M)$ eredita un prodotto esterno definito puntualmente: se $\omega \in \Omega^k(M)$ e $\eta \in \Omega^\ell(M)$ allora $\omega \wedge \eta \in \Omega^{k+\ell}(M)$ è la $(k+\ell)$-forma definita da $\omega \wedge \eta(p) := \omega(p) \wedge_p \eta(p)$ dove $\wedge_p$ è il prodotto esterno in $\Lambda^*(T^*_pM)$.

Vi ricordo che se $F : N \to M$ è un'applicazione differenziabile fra due varietà differenziabili, allora è ben definito il differenziale di F in ogni punto $q \in N$, denotato dF_q:

$$dF_q : T_qN \to T_{F(q)}M.$$

Per definizione $dF_q(v)$ è il vettore tangente di $T_{F(q)}M$ definito dalla relazione $dF_p(v)([g]_{F(q)}) := v([g \circ F]_q)$. Questa definizione è compatibile con quella che abbiamo dato per funzioni $f : M \to \mathbb{R}$

una volta identificato $T_{f(p)}\mathbb{R}$ con $\mathbb{R}$ (mandando il vettore $\alpha d/dr|_{f(p)}$ in α). È facile verificare che se $G : M \to R$ è un'altra applicazione differenziabile allora $d(G \circ F)_q = dG_{F(q)} \circ dF_q$. Data quindi un'applicazione differenziabile $F : N \to M$ abbiamo l'applicazione duale

$$(dF_q)^* : T^*_{F(q)}M \to T^*_q N.$$

Notiamo che se $F(q)$ appartiene alla carta $(U, (X^1, \dots, x^m))$ allora $(dF_q)^*(dx^j|_{F(q)}) = d(x^j \circ F)_q$; infatti, per ogni vettore tangente $v \in T^*_q N$ abbiamo

$$((dF_q)^*(dx^j|_{F(q)}))(v) = dx^j|_{F(q)}((dF_q)(v)) = d(x^j \circ F)_q(v)\,.$$

Sapete bene che $(dF_q)^*$ induce un'applicazione lineare, che è anche un omomorfismo di algebre, da $\Lambda^*(T^*_{F(q)}M)$ a $\Lambda^*(T^*_q N)$. Rimane allora definita un'operazione $F^* : \Omega^*(M) \to \Omega^*(N)$: se $\omega \in \Omega^k(N)$ si scrive in $p = F(q) \in M$ come $\sum \omega_{i_1\cdots i_k}(p) dx^{i_1}|_p \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}|_p$ allora $F^*\omega$ è la forma differenziale il cui valore in $q \in F^{-1}(p)$ è uguale a $\sum \omega_{i_1\cdots i_k}(F(q))(dF_q)^*(dx^{i_1}|_p) \wedge \cdots \wedge (dF_q)^*(dx^{i_k}|_p)$ che può anche essere scritto come $(F^*\omega)(q) := \sum \omega_{i_1\cdots i_k}(F(q)) d(x^{i_1} \circ F)_q \wedge \cdots \wedge d(x^{i_k} \circ F)_q$.

4.2. **Differenziale di de Rham. Coomologia di de Rham.** [5]

Un'operazione fondamentale sulle forme differenziali è quella di differenziazione esterna o differenziazione di de Rham. Sia ω una k-forma; vogliamo definire una $(k+1)$-forma $d\omega$. Sia $p \in M$; per definire $(d\omega)(p)$ consideriamo un intorno coordinato di p, sia esso $(U, (x^1, \dots, x^m))$. Allora

$$\omega|_U = \sum_{0<i_1<i_2<\cdots<i_k} \omega_{i_1\cdots i_k} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}\,;$$

poniamo

$$(d\omega)|_U := \sum_{0<i_1<i_2<\cdots<i_k} (d\omega_{i_1\cdots i_k}) \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}\,.$$

Si può dimostrare che questa operazione definisce globalmente un unico operatore lineare $d : \Omega^*(M) \to \Omega^{*+1}(M)$ che verifichi le seguenti 3 proprietà:
- $\omega \in \Omega^k(M)$, $\eta \in \Omega^*(M) \Rightarrow d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta$;
- $d^2 = 0$
- se $f \in C^\infty(M)$ allora df è la 1-forma definita dal differenziale di M (vedi sopra).

Si può anche dimostrare, non è difficile, che se $F : N \to M$ allora

$$F^*(d\omega) = d(F^*\omega)\,,$$

a parole: il differenziale commuta con F^*.

Una k-forma ω è detta **chiusa** se $d\omega = 0$. Una k-forma ω è detta **esatta** se $\omega = d\eta$ per qualche $(k-1)$-forma η. Notiamo che una forma esatta è sempre chiusa, dato che $d^2 = 0$. Definiamo il k-mo gruppo di coomologia di de Rham come

$$H^k_{\mathrm{dR}}(M) := \mathrm{Ker}(\mathrm{d}|_{\Omega^k(M)})/\mathrm{Im}(\mathrm{d}|_{\Omega^{k-1}(M)})\,.$$

Trattasi, di fatto, di spazi vettoriali. I gruppi di coomologia di de Rham sono uno strumento fondamentale in topologia algebrica e geometria differenziale.

[5] ulteriori informazioni e dimostrazioni su Warner pp 65 $\to$ 69.

4.3. **Orientabilità. Integrazione. Teorema di Stokes.** [6]

Un fibrato reale E di rango k sulla varietà M è detto *orientabile* se $\bigwedge^k E = \bigwedge^{max} E$ è banale. In questo caso il fibrato in rette $(\bigwedge^{max} E, \pi, M)$ possiede una sezione globale non nulla.

Se E è orientabile allora $\bigwedge^{max} E \setminus 0 = \cup_{m \in M}(\bigwedge^{max} E_m \setminus 0)$ ha due componenti connesse; la scelta di una di esse è detta scelta di una *orientazione* per E. Non è difficile dimostrare che E è orientabile se e solo se ammette un ricoprimento di intorni banalizzanti tali che le funzioni di transizione abbiano tutte determinante positivo. Fissata una orientazione di E diremo che una base locale $\{s_1, \dots, s_k\}$ ha orientazione positiva se $s_1 \wedge \dots \wedge s_k$ appartiene alla componente connessa che definisce l'orientazione.

Una varietà differenziabile M è orientabile se il fibrato tangente è orientabile o, equivalentemente, se ammette un atlante tale che lo jacobiano delle mappe di transizione, da una carta ad un'altra, abbia determinante sempre positivo. Se M è orientabile allora anche $\Lambda^{\dim M} T^*M$ è banale (infatti TM e T^*M sono isomorfi). Esiste quindi una m-forma ω, con $m = \dim M$, che non è mai nulla [7]. Una tale forma è detta una forma di volume. Se M è una varietà riemanniana, e cioè TM è stato dotato di una metrica riemanniana g, allora possiamo scegliere una tale m-forma ω con l'ulteriore proprietà che $\omega(X_1, \dots, X_m) = 1$ per ogni base locale di campi di vettori con orientazione positiva e ortonormali. Una tale m forma è unica ed è detta **la** forma di volume definita dalla metrica. Viene spesso denotata con $d\mathrm{vol}_g$

È possibile definire l'integrale $\int_M \omega$ di una m-forma ω su una varietà differenziabile orientabile di dimensione m; lo si definisce prima nelle carte, utilizzando l'integrale in $\mathbb{R}^n$, e poi si usa una partizione dell'unità. Se α è una forma con massimo grado strettamente minore di $\dim M$ allora $\int_M \alpha$ è per definizione uguale a zero. Una volta data la nozione di varietà differenziabile orientabile con bordo e di orientazione indotta sul bordo è possibile dimostrare il fondamentale teorema di Stokes:

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega$$

per ogni $(m-1)$-forma ω. In particolare, se M è senza bordo otteniamo

$$\int_M d\omega = 0$$

per ogni $(m-1)$-forma ω.

Notiamo infine che una varietà differenziabile riemanniana orientabile è dotata in maniera naturale di una misura: questa è la misura associata tramite il teorema di Riesz al funzionale

$$C_c^\infty(M) \ni f \to \int_M f \mathrm{dvol}_g \,.$$

Il volume di una varietà riemanniana è, per definizione, il numero $\mathrm{Vol}(M) := \int_M d\mathrm{vol}_g$; se M ha dimensione positiva è facile vedere che il volume è un numero positivo.

4.4. **Varietà complesse: fibrato tangente olomorfo.**

Sia ora M una varietà complessa di dimensione complessa n. Sia TM il suo fibrato tangente reale, un fibrato reale di rango $2n$. Sia $TM \otimes \mathbb{C}$ il complessificato di TM, un fibrato complesso di dimensione complessa $2n$.
Supponiamo dapprima che $M = \mathbb{C}^n$ e sia $p \in \mathbb{C}^n$. Sia $C_p^\infty(\mathbb{C}^n, \mathbb{R})$ l'algebra dei germi in p di

[6] ulteriori informazioni e dimostrazioni su Bott-Tu, pagine 27 → 33
[7] è anche vero il viceversa

funzioni C^∞ a valori reali; sia $C^\infty_p(\mathbb{C}^n,\mathbb{C})$ l'algebra dei germi in p di funzioni C^∞ a valori complessi; sia $\mathcal{O}_p(\mathbb{C}^n)$ (rispettivamente $\overline{\mathcal{O}}_p(\mathbb{C}^n)$) la sottoalgebra di $C^\infty_p(\mathbb{C}^n,\mathbb{C})$ costituita dai germi di funzioni olomorfe (rispettivamente antiolomorfe). Indichiamo le coordinate con $(z_1,\dots,z_n) = (x_1+iy_1,\dots,x_n+iy_n)$. Sia $T_p\mathbb{C}^n$ lo spazio tangente a $\mathbb{C}^n$ in p e cioè, per definizione, lo spazio vettoriale reale costituito delle derivazioni $\mathbb{R}$-lineari di $C^\infty_p(\mathbb{C}^n,\mathbb{R})$. Una base per $T_p\mathbb{C}^n$ è costituita da

$$\{\frac{\partial}{\partial x_j}\big|_p\,,\,\frac{\partial}{\partial y_j}\big|_p\,;\; j=1,\dots,n\}$$

Lo spazio vettoriale $T_p\mathbb{C}^n\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}$, che denoteremo semplicemente $T_p\mathbb{C}^n\otimes\mathbb{C}$, è lo spazio vettoriale complesso delle derivazioni $\mathbb{C}$-lineari dell'algebra $C^\infty(\mathbb{C}^n,\mathbb{C})$. Se definiamo i campi di vettori

$$\frac{\partial}{\partial z_j} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x_j} - i\frac{\partial}{\partial y_j})\,, \qquad \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x_j} + i\frac{\partial}{\partial y_j})\,,$$

allora vediamo che una base complessa di $T_p\mathbb{C}^n\otimes\mathbb{C}$ è data dalle derivazioni

$$\{\frac{\partial}{\partial z_j}\big|_p\,,\,\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}\big|_p\,;\; j=1,\dots,n\}$$

Siano

$$T^{1,0}_p\mathbb{C}^n := \{v\in T_p\mathbb{C}^n\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C} \mid v[f]=0 \;\; \forall [f]\in\overline{\mathcal{O}}_p(\mathbb{C}^n)\}$$

e

$$T^{0,1}_p\mathbb{C}^n := \{v\in T_p\mathbb{C}^n\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C} \mid v[f]=0 \;\; \forall [f]\in\mathcal{O}_p(\mathbb{C}^n)\}$$

Allora è facile dimostrare che

$$T_p\mathbb{C}^n\otimes\mathbb{C} = T^{1,0}_p\mathbb{C}^n\oplus T^{0,1}_p\mathbb{C}^n \tag{2}$$

$$T^{1,0}_p\mathbb{C}^n = \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\,(\frac{\partial}{\partial z_1}\big|_p,\dots,\frac{\partial}{\partial z_n}\big|_p\,) \tag{3}$$

$$T^{0,1}_p\mathbb{C}^n = \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\,(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_1}\big|_p,\dots,\frac{\partial}{\partial \bar{z}_n}\big|_p) \tag{4}$$

Esiste inoltre una naturale operazione di coniugio in $T_p\mathbb{C}^n\otimes\mathbb{C}$ e

$$T^{0,1}_p\mathbb{C}^n = \overline{T^{1,0}_p\mathbb{C}^n} \tag{5}$$

Se ora M è una varietà complessa allora $\forall p\in M$ possiamo definire T_pM, $T_pM\otimes\mathbb{C}$, $T^{1,0}_pM$, $T^{1,0}_pM$ e considerando coordinate locali scopriamo (sarà un esercizio) che $T^{1,0}M := \cup_p T^{1,0}_pM$ è un sottofibrato di $TM\otimes\mathbb{C}$ con funzioni di transizione fra le carte $(U,(z_1,\dots,z_n))$ e $(W,(w_1,\dots,w_n))$ date da

$$\left(\frac{\partial w_j}{\partial z_i}\right)$$

Trattasi quindi di un fibrato *olomorfo*. Il fibrato $T^{1,0}M$ è detto il fibrato tangente olomorfo. Analogamente $T^{0,1}M := \cup_p T^{0,1}_pM$ è un sottofibrato di $TM\otimes\mathbb{C}$, detto il fibrato tangente antiolomorfo. Vale l'analoga di (5):

$$T^{0,1}M = \overline{T^{1,0}M} \tag{6}$$

Notiamo infine che $(T^{1,0}M)_{\mathbb{R}}$ è isomorfo a TM con isomorfismo indotto dalla mappa

$$(T^{1,0}M)_{\mathbb{R}} \ni v \to 2\mathrm{Re}(v) \equiv v+\overline{v} \in TM\otimes\mathbb{C}$$

che ha ovviamente valori in TM. [8] La moltiplicazione per i in $T^{1,0}M$ induce tramite l'isomorfismo $2\mathrm{Re}(\ )$ un operatore $J \in C^\infty(M, \mathrm{End}(TM))$ tale che $J_p^2 = -1\ \forall p \in M$. Possiamo utilizzare questo operatore per definire una struttura di fibrato vettoriale complesso in TM:

$$(\alpha + i\beta)v_p := \alpha v_p + J_p(\beta v_p)\,.$$

Osserviamo, per chiudere questa sezione, che la varietà reale soggiacente ad una varietà complesse è sempre orientabile. La dimostrazione si basa sulla seguente semplice osservazione:
se $f : U \subset \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ è olomorfa, allora possiamo considerare lo Jacobiano reale di f, $J_{\mathbb{R}}(f)$, interpretando f come una mappa da $U \subset \mathbb{R}^{2n}$ a $\mathbb{R}^{2n}$ e possiamo ovviamente considerare lo Jacobiano complesso $J_{\mathbb{C}}(f)$. Si ha

$$J_{\mathbb{R}}(f) = B^{-1} \begin{pmatrix} J_{\mathbb{C}}(f) & 0 \\ 0 & \overline{J_{\mathbb{C}}(f)} \end{pmatrix} B\,,$$

con $B \in GL(2n, \mathbb{C})$[9]. In particolare $\det J_{\mathbb{R}}(f) = \det J_{\mathbb{C}}(f)\overline{\det J_{\mathbb{C}}(f)} = |\det J_{\mathbb{C}}(f)| \geq 0$. Applicando questa osservazione ai cambiamenti di coordinate olomorfi concludiamo la dimostrazione che le varietà complesse sono sempre orientabili, se viste come varietà reali.

4.5. **Varietà quasi-complesse.**

In generale, una struttura quasi-complessa su una varietà *reale* è un elemento $J \in C^\infty(M, \mathrm{End}(TM))$ tale che $J_p^2 = -1\ \forall p \in M$. Abbiamo appena dimostrato che la varietà reale associata ad una varietà complessa ha una naturale struttura quasi-complessa. Una struttura quasi-complessa su una varietà reale non è detto che esista [10]. Se esiste una struttura quasi-complessa allora possiamo definire, come sopra, una naturale struttura di fibrato complesso in TM. Esistono strutture quasi-complesse che non provongono da alcuna struttura complessa (ad esempio in S^6). Torneremo sulle varietà quasi-complesse più avanti.

4.6. **Forme di tipo (p, q). Coomologia di Dolbeault.**

Consideriamo ora il duale T^*M di TM. Si ha

$$T^*M \otimes \mathbb{C} = \Lambda^{1,0}(M) \oplus \Lambda^{0,1}(M) \tag{7}$$

con descrizione locale data in termini delle 1-forme duali ai campi tangenti olomorfi e anti-olomorfi:

$$dz_j = dx_j + i\, dy_j\,, \qquad d\bar z_j = dx_j - i\, dy_j$$

Si ha anche, come nel caso del fibrato tangente,

$$\Lambda^{0,1}(M) = \overline{\Lambda^{1,0}(M)}. \tag{8}$$

Localmente, lo spazio delle sezioni di $\bigwedge^{1,0}(M)$ ha base locale data da $dz_1, \ldots, dz_n$, mentre lo spazio delle sezioni di $\bigwedge^{0,1}(M)$ ha base locale $d\bar z_1, \ldots, d\bar z_n$. Osserviamo che, in generale, per due spazi vettoriali E, F

$$\Lambda^r(E \oplus F) = \oplus_{r=p+q}\Lambda^{p,q}$$

con $\bigwedge^{p,q} := \mathrm{Span}\{e \wedge f\,, e \in \bigwedge^p E\,, f \in \bigwedge^q F\,\}$. Ciò implica, con ovvia notazione, la decomposizione $C^\infty(M, \Lambda^r(T^*M \otimes \mathbb{C})) = \oplus_{r=p+q}\Omega^{p,q}(M)$ dove $\Omega^{p,q}(M)$ sono le forme di grado $p+q$ localmente

---

[8] infatti, una base locale reale di $(T^{1,0}M)_{\mathbb{R}}$ è data da $\frac{\partial}{\partial z_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial z_n}, i\frac{\partial}{\partial z_1}, \ldots, i\frac{\partial}{\partial z_n}$ e questa base è chiaramente inviata in $\{\frac{\partial}{\partial x_j}\,,\ \frac{\partial}{\partial y_j}\}$

[9] B è la matrice di cambiamento di coordinate (complesse), dalle $x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n$ alle $z_1, \ldots, z_n, \overline{z}_1, \ldots, \overline{z}_n$

[10] È semplice convincersi, ad esempio, che M deve avere dimensione pari: tuttavia ciò non è sufficiente, S^4 ad esempio, non ammette strutture quasi-complesse

esprimibili come combinazioni lineari di $dz^{j_1} \wedge \cdots \wedge dz^{j_p} \wedge d\bar{z}^{i_1} \wedge \cdots \wedge d\bar{z}^{i_q}$. Si noti che si può scrivere l'operatore di derivazione d come:

$$d = \partial + \bar{\partial} \quad \text{con} \quad \partial^2 = \bar{\partial}^2 = \partial\bar{\partial} + \bar{\partial}\partial = 0$$

dove $\partial : \Omega^{p,q}(M) \to \Omega^{p+1,q}(M)$ e $\bar{\partial} : \Omega^{p,q}(M) \to \Omega^{p,q+1}(M)$ sono ottenuti per proiezione. Esplicitamente

$$\partial(a_{JI} dz^{j_1} \wedge \cdots \wedge dz^{j_p} \wedge d\bar{z}^{i_1} \wedge \cdots \wedge d\bar{z}^{i_q}) = \sum_{\ell} \frac{\partial}{\partial z_\ell} a_{JI} dz^\ell \wedge dz^{j_1} \wedge \cdots \wedge dz^{j_p} \wedge d\bar{z}^{i_1} \wedge \cdots \wedge d\bar{z}^{i_q}$$

e analogamente per $\overline{\partial}$.

Dato che $\overline{\partial}^2 = 0$ possiamo definire i gruppi di coomologia di Dolbeault:

$$H^{0,q}_{\overline{\partial}}(M) := \mathrm{Ker}(\overline{\partial}|_{\Omega^{0,q}(M)})/\mathrm{Im}(\overline{\partial}|_{\Omega^{0,q-1}(M)})$$

e più in generale

$$H^{p,q}_{\overline{\partial}}(M) := \mathrm{Ker}(\overline{\partial}|_{\Omega^{p,q}(M)})/\mathrm{Im}(\overline{\partial}|_{\Omega^{p,q-1}(M)}).$$

4.7. **Metriche hermitiane. Forma di Kähler.**

Una metrica hermitiana h su una varietà complessa M è, per definizione, una metrica hermitiana sul fibrato tangente olomorfo $T^{1,0}M$; in particolare

$$h \in C^\infty(M, (T^{1,0}M \otimes \overline{T^{1,0}M})^*) = C^\infty(M, (T^{1,0}M \otimes T^{0,1}M)^*) = C^\infty(M, \Lambda^{1,0}M \otimes \Lambda^{0,1}M)\,.$$

La coppia (M, h) è detta una varietà hermitiana. Localmente possiamo scrivere la metrica hermitiana come:

$$h = h_{ij}(z) dz_i \otimes d\bar{z}^j\,.$$

Se $\{\phi_j\,; j = 1, \ldots, n\}$ è la base duale ad una base ortonormale locale per $T^{1,0}M$ allora, localmente,

$$h = \sum_j \phi_j \otimes \overline{\phi_j}$$

La parte reale e la parte immaginaria di h definiscono rispettivamente una forma bilineare simmetrica e una forma bilineare antisimmetrica sul fibrato reale $(T^{1,0}M)_\mathbb{R}$. Tramite l'isomorfismo $(T^{1,0}M)_\mathbb{R} \simeq TM$ otteniamo una metrica riemanniana $g := \mathrm{Re}h$ su TM e una due-forma reale $\omega := -\frac{1}{2}\mathrm{Im}h$ su M. La 2 forma ω è detta la forma di Kähler associata alla varietà hermitiana (M, h). Esplicitamente, se $\phi_j = \alpha_j + \sqrt{-1}\beta_j$, con α_j, β_j 1-forme reali, allora

$$h = \sum_j \phi_j \otimes \overline{\phi_j} = (\sum_j(\alpha_j + \sqrt{-1}\beta_j)) \otimes (\sum_j(\alpha_j - \sqrt{-1}\beta_j))$$

e quindi

$$h = \sum_j(\alpha_j \otimes \alpha_j + \beta_j \otimes \beta_j) + \sqrt{-1}\sum_j(-\alpha_j \otimes \beta_j + \beta_j \otimes \alpha_j)$$

da cui deduciamo che la metrica riemanniana g è data da $\sum_j(\alpha_j \otimes \alpha_j + \beta_j \otimes \beta_j)$ mentre la forma di Kähler è data da

$$\omega = \sum_j \alpha_j \wedge \beta_j = \frac{\sqrt{-1}}{2}\sum_j \phi_j \wedge \overline{\phi_j}$$

Analogamente, se la metrica è data localmente da $h = h_{ij}(z)dz_i \otimes d\overline{z}^j$ allora

$$\omega = \frac{\sqrt{-1}}{2} h_{ij}(z) dz_i \wedge d\overline{z}^j\,.$$

Notiamo che la forma di volume associata a $g = \sum_j (\alpha_j \otimes \alpha_j + \beta_j \otimes \beta_j)$ è data da

$$d\mathrm{vol}_g := \alpha_1 \wedge \beta_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_n \wedge \beta_n$$

ed è facile verificare che nell'intorno fissato si ha l'uguaglianza

$$d\mathrm{vol}_g = \frac{\omega^m}{m!} \tag{9}$$

Possiamo quindi concludere che $\frac{\omega^m}{m!}$ è la forma di volume associata alla metrica riemanniana fissata da h. In particolare $\int_M \frac{\omega^m}{m!} > 0$ e ciò implica che $[\omega] \neq 0$ in $H^2_{\mathrm{dR}}(M)$. In effetti, se per assurdo fosse $\omega = d\eta$ allora, per il Teorema di Stokes,

$$m!\mathrm{Vol}(M) = \int_M \omega^m = \int d\eta \wedge \omega^{m-1} = \int_M d(\eta \wedge \omega^{m-1}) = 0$$

il che è assurdo.

5. **Capitolo 5. Connessioni.**

5.1. **Connessioni su un fibrato.**

Sia X un campo di vettori su M e cioè un elemento di $C^\infty(M, TM)$. Data una sezione $s \in C^\infty(M, E)$, vogliamo derivare s lungo X. Se $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ è una collezione di intorni banalizzanti e se $s \in C^\infty(M, E)$ corrisponde alla collezione $\{s_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}^k\}$ con $s_\beta = g_{\beta\alpha} s_\alpha$ allora potremmo considerare il vettore di $1-$forme $(ds^1_\alpha, .., ds^k_\alpha)$ e porre la derivata di s, o meglio della sua restrizione a U_α, lungo X pari a
$$(ds^1_\alpha(X), .., ds^k_\alpha(X))$$
Tale procedimento, però, non si globalizza: cambiando base si avrebbe
$$ds_\beta = d(g_{\beta\alpha} s_\alpha) = dg_{\beta\alpha} s_\alpha + g_{\beta\alpha} ds_\alpha$$
dunque se $dg_{\beta\alpha} \neq 0$ le ds_β non si trasformano mediante le sole funzioni di transizione ma anche attraverso $dg_{\beta\alpha}$ ed s_α. Ci domandiamo quindi come poter derivare una sezione lungo un campo di vettori. La nozione di *connessione* è introdotta proprio a questo scopo.

Definizione 5. Una connessione su un fibrato (E, π, M) è un operatore lineare
$$\nabla : C^\infty(M, E) \to C^\infty(M, T^*M \otimes E)$$
verificante la regola di Leibnitz: $\forall f \in C^\infty(M)$ e $\forall\ s \in C^\infty(M, E)$
$$\nabla(fs) = df \otimes s + f \nabla s$$

Osservazioni.
1. Utilizzando la dualità fra T^*M e TM è chiaro che possiamo applicare un elemento di $C^\infty(M, T^*M \otimes E)$ ad un elemento di $C^\infty(M, TM)$ e ottenere una sezione in $C^\infty(M, E)$. Ponendo quindi $\nabla s(X) := \nabla_X s$ si ha un operatore
$$\nabla_X : C^\infty(M, E) \to C^\infty(M, E)$$
detto **derivata covariante di** $s \in C^\infty(M, E)$ **lungo** $X \in C^\infty(M, TM)$**.** Si noti che $\forall f \in C^\infty(M)$, $\forall X_1, X_2 \in C^\infty(M, TM)$ si ha
$$\nabla_{fX}(s) = \nabla s(fX) = f \nabla s(X) = f \nabla_X s \tag{10}$$
$$\nabla_{X_1+X_2}(s) = \nabla(s)(X_1 + X_2) = \nabla_{X_1}(s) + \nabla_{X_2}(s) \tag{11}$$
essendo ∇s lineare su TM. Inoltre $\forall s_1, s_2 \in C^\infty(M, E)$
$$\nabla_X(s_1 + s_2) = \nabla_X(s_1) + \nabla_X(s_2) \tag{12}$$
$$\nabla_X(fs) = \nabla(fs)(X) = (df \otimes s)(X) + f \nabla s(X) = X(f)s + f \nabla_X s. \tag{13}$$
La definizione di connessione è data in alcuni testi richiedento che $\forall X \in C^\infty(M, TM)$ sia definito un operatore $\nabla_X : C^\infty(M, E) \to C^\infty(M, E)$ verificante l'uguaglianza del primo e dell'ultimo membro delle (10), (11), (12), (13).

2. L'operatore ∇ è *locale*: se $s|U \equiv 0$ allora $\nabla(s)|U$ è anche la sezione nulla su U. Sia infatti $m \in U$ e sia f una funzione identicamente uguale ad uno in un intorno di m e uguale a zero sul complementare di U. È chiaro che $fs \equiv 0$; d'altra parte $\nabla(fs) = df \otimes s + f \nabla(s)$ da cui segue che $\nabla(s)(m) = 0$ come si voleva.
In particolare, ha senso considerare $\nabla|_U$, la restrizione di ∇ ad un aperto $U \subset M$: utilizzeremo spesso il simbolo ∇ anziché $\nabla|_U$, a meno che ciò generi confusione.

3. Sia $T : C^\infty(M,E) \to C^\infty(M,E)$ un operatore lineare e tale che $T(fs) = fT(s)$ se $f \in C^\infty(M)$ e $s \in C^\infty(M,E)$. Si può definire in maniera naturale un operatore $\widehat{T} \in C^\infty(M, \mathrm{End}(E))$. Infatti sia $e_m \in E_m$, allora esiste $e \in C^\infty(M,E)$ tale che $e(m) = e_m$ [11] si ponga $\widehat{T}(m)(e_m) := T(e)(m)$. Per l'ipotesi la definizione è ben posta ed è facile vedere che $\widehat{T}_m$ è effettivamente un'applicazione lineare da E_m a E_m. Viceversa è ovvio che dato un $\widehat{T} \in C^\infty(M, \mathrm{End}(E))$ si possa definire $T : C^\infty(M,E) \to C^\infty(M,E)$ tramite $T(e)(m) := \widehat{T}(e(m))$. Dunque vi è una corrispondenza biunivoca $T \leftrightarrow \widehat{T}$ ed in seguito non faremo distinzione fra T e $\widehat{T}$. Allo stesso modo, se $T : C^\infty(M,E) \to C^\infty(M,F)$ è un operatore lineare tale che $T(fs) = fT(s)$ per $f \in C^\infty(M)$ e $s \in C^\infty(M,E)$, allora si può definire in maniera naturale un operatore $\widehat{T} \in C^\infty(M, \mathrm{Hom}(E,F)) \equiv C^\infty(M, F \otimes E^*)$

4. Analogamente, un operatore $T : C^\infty(M,E) \to C^\infty(M, T^*M \otimes E)$ tale che $T(fs) = fT(s)$ definisce in maniera naturale una sezione di $C^\infty(M, T^*M \otimes \mathrm{End}(E))$ [12] e similmente un operatore $T : C^\infty(M,E) \to C^\infty(M, \Lambda^2(T^*M) \otimes E)$ tale che $T(fs) = fT(s)$ definisce un elemento $C^\infty(M, \Lambda^2(T^*M) \otimes \mathrm{End}(E))$

5. Siano ∇ e ∇' due connessioni, allora $(\nabla - \nabla')(fs) = \nabla(fs) - \nabla'(fs) = df \otimes s + f\nabla s - df \otimes s + f\nabla' s = f(\nabla - \nabla')(s)$ ossia $(\nabla - \nabla')$ soddisfa la proprietà sopra enunciata per l'operatore T e dunque si può scrivere:

$$\nabla = \nabla' + \omega$$

ove $\omega \in C^\infty(M, T^*M \otimes \mathrm{End}(E))$ (dove stiamo quindi identificando gli operatori T con $\hat{T}$).

5.2. **Descrizione locale delle connessioni.**

Sia U un aperto banalizzante ed e_i una base locale di $\pi^{-1}(U)$. Allora $\nabla e_i \in C^\infty(U, \pi^{-1}(U) \otimes T^*U)$ e dunque

$$\nabla e_i = \omega_i^j \otimes e_j$$

con $\omega_i^j \in C^\infty(U, T^*U) \equiv \Omega^1(U)$. La (ω_i^j) è per definizione la matrice locale di 1-forme associata alla connessione ∇ nella base locale scelta. Data $s \in C^\infty(U, \pi^{-1}(U))$ si ha $s = s^i e_i$ e quindi $\nabla s = \nabla(s^i e_i) = ds^i \otimes e_i + s^i \nabla e_i = ds^k \otimes e_k + s^i \omega_i^k \otimes e_k = (ds^k + s^i \omega_i^k) \otimes e_k$. In forma compatta $\nabla s = ds + \omega s$ ovvero

$$\nabla = d + \omega \quad \text{su} \quad U \quad \text{aperto banalizzante rispetto alla base locale } \{e_i\}$$

Si ha allora, per $s \in C^\infty(M,E)$, $X \in C^\infty(M,TM)$,

$$\nabla_X s|_U = (ds^j + \omega_i^j s^i)(X) e_j, \tag{14}$$

e se su U, $X = X^l \frac{\partial}{\partial x^l}$,

$$\nabla_X s|_U = \left(\frac{\partial s^j}{\partial x^l} X^l + s^i \Gamma_{il}^j X^l \right) e_j, \tag{15}$$

dove $\Gamma_{il}^j \in C^\infty(U)$, sono le componenti di ω_i^j,

$$\omega_i^j = \Gamma_{il}^j dx^l. \tag{16}$$

---

[11] basterà procedere come segue: consideriamo una *bump-function* $\phi \in C^\infty(M)$, uguale ad uno in un intorno U di m (contenuto in un intorno trivializzante U_α di m) ed uguale a 0 nel complementare di un intorno V con $U \subset V \subset U_\alpha$; poniamo $e(m) := e_m$, $e(m') := \phi(m') e_m$ dove con un piccolo abuso di notazione stiamo omettendo un isomorfismo fra $E_{|U_\alpha}$ e $U_\alpha \times E_m$.

[12] dove abbiamo utilizzato il fatto che dati due spazi vettoriali V W si ha, $\mathrm{Hom}(W, V \otimes W) = V \otimes W \otimes W^* = V \otimes \mathrm{End}(W)$

Da queste formule si vede che fissato $m \in M$, $\nabla_X s(m)$ dipende dalle componenti $X^l(m)$, di $X(m)$, ma non dalle loro derivate. Dato allora un vettore $X_m \in T_m M$, si potrà definire $\nabla_{X_m} s \in E_m$ come $\nabla_{\tilde{X}} s(m)$, con $\tilde{X}$ estensione arbitraria di X_m ad M, non dipendendo, per quanto appena osservato, il valore di questo dall'estensione scelta.

5.3. **Esistenza di una connessione.**

Si noti che se ∇ e ∇' sono due connessioni e $g \in C^\infty(M)$ allora $g\nabla + (1-g)\nabla'$ è ancora una connessione. Ora, su ogni ricoprimento banalizzante U_α possiamo definere una connessione ∇^α specificando la matrice di 1-forme rispetto ad una base locale $\{e_j^\alpha\}$. Utilizzando un ricoprimento $\{U_\alpha\}$ banalizzante, una partizione dell'unità $\{\phi_\alpha\}$ subordinata ad esso e le connessioni locali ∇^α su $\pi^{-1}(U_\alpha)$, si ottiene facilmente una connessione su tutto E; basterà porre $\nabla := \sum_\alpha \phi_\alpha \nabla^\alpha$.

5.4. **Cambiamento di base locale.**

Sia $\tilde{e}_i = G_i^j e_j$ (con il che G è la matrice del cambiamento di base e j è l'indice di riga) allora si ha:

$$\begin{aligned} \nabla(\tilde{e}_i) &= \nabla(G_i^j e_j) = dG_i^j \otimes e_j + G_i^j \nabla e_j \\ &= dG_i^j \otimes e_j + G_i^j \omega_j^k \otimes e_k = (dG_i^k + G_i^j \omega_j^k) \otimes e_k \end{aligned}$$

Il primo membro a sinistra è anche uguale a $\nabla(\tilde{e}_i) = \tilde{\omega}_i^j \otimes \tilde{e}_j = \tilde{\omega}_i^j G_j^m \otimes e_m$ ed essendo $\{e_m\}$ una base si ha:

$$\tilde{\omega}_i^j G_j^k = dG_i^k + G_i^j \omega_j^k$$

ossia

$$(G\omega)_i^k = (dG)_i^k + (\omega G)_i^k$$

che riscriviamo in forma compatta come:

$$\tilde{\omega} = G^{-1} dG + G^{-1} \omega G$$

In particolare in $U_\alpha \cap U_\beta$ si ha:

$$\nabla = d + \omega_\alpha \text{ rispetto a } \{e_i^\alpha\}$$

$$\nabla = d + \omega_\beta \text{ rispetto a } \{e_i^\beta\}$$

e $e_i^\beta = (g_{\alpha\beta})_i^j e_j^\alpha$, dunque:

$$\omega_\beta = (g_{\alpha\beta})^{-1} dg_{\alpha\beta} + (g_{\alpha\beta})^{-1} \omega_\alpha g_{\alpha\beta} \tag{17}$$

formula che lega le matrici locali di 1-forme della connesione in due intorni banalizzanti differenti.

Potremmo come al solito prendere spunto dalla (17) per dare una definizione alternativa di connessione, direttamente tramite le matrici di connessione.

5.5. **Esempi.**

1. Sia M una sottovarietà differenziabile di $\mathbb{R}^N$. Sul fibrato banale $T\mathbb{R}^N|_M = M \times \mathbb{R}^N$ c'è la connessione banale d. Sia poi $p : T\mathbb{R}^N|_M \to TM$ la proiezione canonica sul primo addendo della decomposizione in somma diretta $T\mathbb{R}^N|_M = TM \oplus N$, dove N è il fibrato normale ad M, cioè il fibrato ortogonale a $TM \subseteq M \times \mathbb{R}^N$ rispetto alla metrica canonica. Allora la posizione

$$\nabla_X Y := p(dY(X)), \qquad X, Y \in C^\infty(M, TM),$$

definisce una connessione su TM, come si verifica facilmente tenendo conto del fatto che sia p che dY sono $C^\infty(M)$-lineari, e che $pY = Y$.

2. Sia $M = G_k(\mathbb{R}^{n+k})$ la grassmanniana dei k-sottospazi in $\mathbb{R}^{n+k}$, e sia

$$E_{k,n+k}(\mathbb{R}) = \left\{(p, \underline{v}) \in G_k(\mathbb{R}^{n+k}) \times \mathbb{R}^{n+k} : \underline{v} \in p\right\}$$

il fibrato tautologico su M. Rispetto alla metrica canonica sul fibrato banale $M \times \mathbb{R}^{n+k}$ vale allora la decomposizione in somma diretta

$$M \times \mathbb{R}^{n+k} = E_{k,n+k}(\mathbb{R}) \oplus E_{k,n+k}(\mathbb{R})^{\perp},$$

e sia p la proiezione sul primo addendo. Allora anche in questo caso si verifica facilmente che si ottiene una connessione su $E_{k,n+k}(\mathbb{R})$ ponendo

$$\nabla_X s := p(ds(X)), \quad s \in C^\infty(M, E_{k,n+k}(\mathbb{R})), X \in C^\infty(M, TM).$$

5.6. **Connessione pull-back.**

Sia, in generale, $f : N \to M$ un'applicazione C^∞ e consideriamo il fibrato indotto $f^*E \to N$. Si è visto allora che, se $\{U_\alpha\}$ è un atlante banalizzante per E e $\{g_{\alpha\beta}\}$ sono le relative funzioni di transizione, si ottiene un atlante banalizzante per f^*E, con relative funzioni di transizione, considerando $\{f^{-1}(U_\alpha)\}$ e $\{g_{\alpha\beta} \circ f\}$. Se allora ∇^E è una connessione su E e $\{\omega_\alpha\}$ è la famiglia di matrici di 1-forme determinata da ∇^E su $\{U_\alpha\}$, consideriamo le matrici di 1-forme $\omega^*_\alpha := f^*\omega_\alpha := (f^*(\omega_\alpha)^j_i)_{j,i=1,\ldots,k}$ e verifichiamo che definiscono una connessione su f^*E: si ha, su $f^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)$:

$$\begin{aligned}
\omega^*_\beta &= f^*\left(g^{-1}_{\alpha\beta} dg_{\alpha\beta} + g^{-1}_{\alpha\beta}\omega_\alpha g_{\alpha\beta}\right) \\
&= f^*(g^{-1}_{\alpha\beta}) f^* dg_{\alpha\beta} + f^*(g^{-1}_{\alpha\beta}) f^*\omega_\alpha f^* g_{\alpha\beta} \\
&= (g_{\alpha\beta} \circ f)^{-1} d(g_{\alpha\beta} \circ f) + (g_{\alpha\beta} \circ f)^{-1}\omega^*_\alpha (g_{\alpha\beta} \circ f)
\end{aligned}$$

avendo usato il fatto che il pull-back commuta con il differenziale, e che, essendo $g_{\alpha\beta}$ una funzione (a valori matrici), $f^*g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} \circ f$. Ha dunque senso la seguente

Definizione 6. Siano E, f e ∇^E come sopra. Le matrici di 1-forme $\{\omega^*_\alpha\}$ considerate sopra definiscono una connessione ∇^{f^*E} su f^*E, detta *connessione indotta da* ∇^E *tramite* f.

Alternativamente, notiamo che $C^\infty(M, f^*E)$ è generato, in quanto modulo su $C^\infty(M)$ dall'immagine dell'applicazione $f^* : C^\infty(N, E) \to C^\infty(M, f^*E)$. Possiamo definire allora la connessione pull-back ponendo:

$$\nabla^{f^*E}(gf^*s) := dg \otimes f^*s + gf^*(\nabla^E s), \quad \forall g \in C^\infty(M), \quad \forall s \in C^\infty(N, E).$$

5.7. **Trasporto parallelo.**

Sia (E, π, M) un fibrato di rango k. Sia $\gamma : I \to M$, $I \subseteq \mathbb{R}$ aperto, una curva C^∞.

Definizione 7. Una *sezione di E lungo γ* è una funzione C^∞ $s : I \to E$, tale che $s(t) \in E_{\gamma(t)}$ per ogni $t \in I$. Equivalentemente, una sezione di E lungo γ è un elemento di $C^\infty(I, \gamma^*E)$ (infatti $(\gamma^*E)_t = E_{\gamma(t)}$).

Consideriamo il fibrato γ^*E su I indotto dalla curva $\gamma : I \to M$; Se allora ∇^{γ^*E} è la connessione indotta su γ^*E, definiremo una derivazione delle sezioni lungo γ ponendo $\nabla_{\dot\gamma} := \nabla^{\gamma^*E}_{\frac{d}{dt}}$. Osserviamo che poiché ogni fibrato vettoriale su un intervallo di $\mathbb{R}$ è banale, si avrà, globalmente, $\nabla^{\gamma^*E} = d + \varphi$, con $\varphi = (\varphi^j_i dt)_{j,i=1,\ldots,k}$, rispetto ad una base globale di sezioni di γ^*E. Allora per ogni fissato

$s_0 \in E_{\gamma(t_0)}$, $t_0 \in I$, esisterà un'unica sezione $s_{s_0} \in C^\infty(I, \gamma^* E)$ che sia soluzione (globale, perché l'equazione è lineare), del problema di Cauchy

$$\begin{aligned} &(\nabla_{\dot\gamma} s)^j = \frac{ds^j}{dt} + \varphi_i^j s^i = 0, \qquad j = 1, \ldots, k, \\ &s(t_0) = s_0. \end{aligned} \tag{18}$$

Rimane così definita, per ogni curva $\gamma : I \to M$, un'applicazione

$$\tau^\gamma_{t_0,t} : s_0 \in E_{\gamma(t_0)} \to s_{s_0}(t) \in E_{\gamma(t)},$$

evidentemente lineare ed iniettiva (e quindi un isomorfismo), detta **trasporto parallelo lungo** γ. La possibilità di *connettere* fibre distanti è proprio all'origine dell'uso della parola *connessione.*

Risulta inoltre che è possibile recuperare la connessione a partire dal trasporto parallelo: si può infatti dimostrare [12] che per ogni sezione s di E ed ogni campo tangente X ad M vale

$$(\nabla_X s)(m) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left[(\tau^\gamma_{0,t})^{-1} s(\gamma(t)) - s(m) \right],$$

dove γ è una qualunque curva su M tale che $\gamma(0) = m$ e $\dot\gamma(0) = X_m$.

5.8. **Ulteriori proprietà.**

Siano E,F fibrati su M, con rispettive connessioni ∇^E, ∇^F. È facile verificare che

$$\nabla^{E \oplus F} := \begin{pmatrix} \nabla^E & 0 \\ 0 & \nabla^F \end{pmatrix}$$

definisce una connessione su $E \oplus F$, con matrice locale di 1-forme

$$\omega^{E \oplus F} = \begin{pmatrix} \omega^E & 0 \\ 0 & \omega^F \end{pmatrix},$$

e che

$$\nabla^{E \otimes F} := \nabla^E \otimes \mathbb{I}_{C^\infty(M,F)} + \mathbb{I}_{C^\infty(M,E)} \otimes \nabla^F$$

definisce una connessione su $E \otimes F$, con matrice di 1-forme $\omega^{E\otimes F} = \omega^E \otimes \mathbb{I} + \mathbb{I} \otimes \omega^F$, prodotti tensoriali di matrici.
Inoltre si definisce una connessione ∇^{E^*} sul fibrato duale E^* di E, richiedendo che, se $\{e_i\}$ è una base locale di E ed $\{e^i\}$ è la relativa base duale, valga

$$0 = d(e^i, e_j) = (\nabla^{E^*} e^i, e_j) + (e^i, \nabla^E e_j),$$

dove con $(\cdot,\cdot)$ si è indicata la dualità naturale tra E ed E^*. Si trova allora che $\omega^{E^*} = -(\omega^E)^T$. Notiamo che, per definizione, se $\theta \in C^\infty(M, E^*)$ e $s \in C^\infty(M, E)$ allora

$$(\nabla_X \theta)(s) = -\theta(\nabla_X s) + X(\theta(s)) \tag{19}$$

Se il fibrato E ha una metrica $\langle \cdot,\cdot \rangle_E$, la connessione ∇^E si dirà *compatibile con la metrica* se

$$d\langle s,t \rangle_E = \langle \nabla^E s, t\rangle_E + \langle s, \nabla^E t \rangle_E, \qquad s,t \in C^\infty(M,E), \tag{20}$$

dove naturalmente si intende $\langle \omega \otimes s, t \rangle_E = \omega \langle s,t \rangle_E = \langle s, \omega \otimes t \rangle_E$, per $\omega \in \Omega^1(M)$, o equivalentemente, per $X \in C^\infty(M, TM)$,

$$X\langle s,t \rangle_E = \langle \nabla^E_X s, t \rangle_E + \langle s, \nabla^E_X t \rangle_E;$$

se poi E è reale e $\langle\cdot,\cdot\rangle_E$ è simmetrica ed $\{e_i\}$ è una base locale ortonormale, dalla (20) si ha:

$$\begin{aligned}0 = d\langle e_i, e_j\rangle_E &= \langle \omega_i^k \otimes e_k, e_j\rangle_E + \langle e_i, \omega_j^l \otimes e_l\rangle_E\\ &= \omega_i^j + \omega_j^i,\end{aligned}$$

e quindi la matrice di 1-forme di connessione, calcolata rispetto ad una base locale ortonormale, è antisimmetrica. Analogamente si verifica che se E è complesso e la metrica è hermitiana, la matrice di connessione rispetto ad una base ortonormale è antihermitiana.

5.9. **Curvatura.**

Sia (E, π, M) un fibrato vettoriale di rango k. Una connessione ∇ su E è un'applicazione $\nabla : C^\infty(M, E) \to C^\infty(M, T^*M \otimes E)$ soddisfacente la regola di Leibniz. La si può poi estendere ad una applicazione $\mathbb{R}$-lineare (o meglio, ad una famiglia di applicazioni), $\tilde\nabla : C^\infty(M, \bigwedge^p T^*M \otimes E) \to C^\infty(M, \bigwedge^{p+1} T^*M \otimes E)$, richiedendo che valga

$$\tilde\nabla(\varphi \otimes s) = d\varphi \otimes s + (-1)^p \varphi \wedge \nabla s, \qquad \varphi \in C^\infty(M, \bigwedge^p T^*M), s \in C^\infty(M, E),$$

dove naturalmente si intende $\varphi\wedge(\omega\otimes s) = (\varphi\wedge\omega)\otimes s$, $\omega \in \Omega^1(M)$. Poiché, se $f \in C^\infty(M)$, $(f\varphi)\otimes s = \varphi\otimes(fs)$, affinché la definizione di $\tilde\nabla$ sia sensata è necessario verificare che $\tilde\nabla((f\varphi)\otimes s) = \tilde\nabla(\varphi\otimes(fs))$. Si ha:

$$\begin{aligned}\tilde\nabla((f\varphi) \otimes s) &= d(f\varphi) \otimes s + (-1)^p (f\varphi) \wedge \nabla s\\ &= df \wedge \varphi \otimes s + f d\varphi \otimes s + (-1)^p f\varphi \wedge \nabla s = df \wedge \varphi \otimes s + f\tilde\nabla(\varphi \otimes s),\end{aligned}$$

e, d'altra parte,

$$\begin{aligned}\tilde\nabla(\varphi \otimes (fs)) &= d\varphi \otimes (fs) + (-1)^p \varphi \wedge \nabla(fs)\\ &= f(d\varphi \otimes s) + (-1)^p(\varphi \wedge df) \otimes s + (-1)^p f(\varphi \wedge \nabla s)\\ &= df \wedge \varphi \otimes s + f\tilde\nabla(\varphi \otimes s),\end{aligned}$$

avendo usato nell'ultimo passaggio $\varphi \wedge df = (-1)^p df \wedge \varphi$. La definizione è dunque ben posta. D'ora in poi, con un piccolo abuso di notazione, porremo $\tilde\nabla = \nabla$.

In particolare da quanto appena visto segue $\nabla(f\nabla s) = df \wedge \nabla s + f\nabla^2 s$, ed allora per $\nabla^2 : C^\infty(M, E) \to C^\infty(M, \bigwedge^2 T^*M \otimes E)$, si ha

$$\begin{aligned}\nabla^2(fs) &= \nabla(df \otimes s + f\nabla s)\\ &= d^2 f \otimes s - df \wedge \nabla s + df \wedge \nabla s + f\nabla^2 s = f\nabla^2 s,\end{aligned}$$

poiché $d^2 f = 0$. Dunque ∇^2 si identifica con una sezione del fibrato $\bigwedge^2 T^*M \otimes \mathrm{End}(E)$, definisce cioè una 2-forma su M a valori endomorfismi di E.

Definizione 8. Siano E, ∇ come sopra. La sezione $\nabla^2 \in C^\infty(M, \bigwedge^2 T^*M \otimes \mathrm{End}(E))$ è detta la *curvatura* della connessione ∇.

Vediamo l'espressione della curvatura in coordinate locali. Sia $\{e_i\}$ una base locale di E, allora con le notazioni usuali:

$$\begin{aligned}\nabla^2(e_i) &= \nabla(\omega_i^j \otimes e_j)\\ &= d\omega_i^j \otimes e_j - \omega_i^j \wedge \omega_j^h \otimes e_h\\ &= (d\omega_i^h + \omega_j^h \wedge \omega_i^j) \otimes e_h = \Omega_i^h \otimes e_h.\end{aligned}$$

Dunque localmente la curvatura ∇^2 è determinata da una matrice di 2-forme, $\Omega = (\Omega_i^h)_{h,i=1,\dots,k}$, calcolabile a partire dalle 1-forme di connessione ω_i^j tramite le

$$\Omega_i^h = d\omega_i^h + \omega_j^h \wedge \omega_i^j, \qquad h, i = 1, \dots, k, \tag{21}$$

che si riscrivono anche, in forma matriciale,

$$\Omega = d\omega + \omega \wedge \omega,$$

dove il prodotto esterno a secondo membro è un prodotto righe per colonne di matrici di 1-forme. Poiché inoltre, come osservato sopra, la curvatura definisce una sezione globale di $\bigwedge^2 T^*M \otimes \mathrm{End}(E)$, si ha che se Ω_α (risp. Ω_β) è la matrice di curvatura in un aperto banalizzante U_α (risp. U_β), e se, come al solito, $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to GL(k, \mathbb{R})$ è la funzione di trasizione relativa, su $U_\alpha \cap U_\beta$ vale l'importante formula

$$\Omega_\beta = g_{\alpha\beta}^{-1} \Omega_\alpha g_{\alpha\beta}\,. \tag{22}$$

In alternativa, possiamo verificare (22) con un calcolo esplicito: ricordiamo che $\Omega_\alpha = d\omega_\alpha + \omega_\alpha \wedge \omega_\alpha$; se allora si pone, per semplificare le notazioni, $\Omega := \Omega_\alpha$, $\Omega' := \Omega_\beta$, $\omega := \omega_\alpha$, $\omega' := \omega_\beta$ e $G := g_{\alpha\beta}$, ne segue:

$$\begin{aligned}
\Omega' &= d\omega' + \omega' \wedge \omega' \\
&= d(G^{-1}dG + G^{-1}\omega G) + (G^{-1}dG + G^{-1}\omega G) \wedge (G^{-1}dG + G^{-1}\omega G) \\
&= dG^{-1} \wedge dG + dG^{-1} \wedge \omega G + G^{-1} d\omega G - G^{-1}\omega \wedge dG + G^{-1}dG \wedge G^{-1}dG \\
&\quad + G^{-1}dG \wedge G^{-1}\omega G + G^{-1}\omega G \wedge G^{-1}dG + G^{-1}\omega G \wedge G^{-1}\omega G \\
&= dG^{-1} \wedge dG + dG^{-1} \wedge \omega G + G^{-1} d\omega G - G^{-1}\omega \wedge dG - dG^{-1}G \wedge G^{-1}dG \\
&\quad - dG^{-1}G \wedge G^{-1}\omega G + G^{-1}\omega \wedge dG + G^{-1}\omega \wedge \omega G \\
&= G^{-1} d\omega G + G^{-1}\omega \wedge \omega G = G^{-1}\Omega G,
\end{aligned}$$

avendo usato $G^{-1}dG = -dG^{-1}G$. In definitiva, abbiamo ritrovato la (22).

Proposizione 2 (Identità di Bianchi)**.** *Con le notazioni di sopra:*

$$d\Omega = [\Omega, \omega] = \Omega \wedge \omega - \omega \wedge \Omega. \tag{23}$$

Proof. È un semplice calcolo:

$$\begin{aligned}
d\Omega &= d(d\omega + \omega \wedge \omega) \\
&= d\omega \wedge \omega - \omega \wedge d\omega \\
&= (d\omega + \omega \wedge \omega) \wedge \omega - \omega \wedge (d\omega + \omega \wedge \omega) = [\Omega, \omega]\,. \quad \square
\end{aligned}$$

Osservazione 2. Siano X, Y campi di vettori su M e $s \in C^\infty(M, E)$ una sezione di E. Consideriamo

$$R(X, Y)(s) := \left(\nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X,Y]}\right)(s). \tag{24}$$

Utilizzando la formula di Leibnitz e le proprietà di linearità della derivata covariante si verifica senza difficoltà che $R(X, Y)(fs) = fR(X, Y)(s)$ e che

$$R \in C^\infty(M, \Lambda^2 M \otimes \mathrm{End}(E)) \tag{25}$$

Passando a coordinate locali si verifica anche che

$$R = \nabla^2 \quad \text{in} \quad C^\infty(M, \Lambda^2 M \otimes \mathrm{End}(E)) \tag{26}$$

5.10. **Connessione di Levi-Civita.**

Specializziamoci ora al caso $E = TM$. Si verifica facilmente che, per ogni connessione ∇ su TM,

$$T(X,Y) := \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]\,, \qquad X,Y \in C^\infty(M,TM),$$

è un campo tensoriale, $T \in C^\infty(M, T^*M \otimes T^*M \otimes TM)$, detto *torsione* di ∇.

Definizione 9. Una connessione ∇ su TM è detta *simmetrica* se ha torsione nulla:

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X,Y]\,, \qquad X,Y \in C^\infty(M,TM).$$

Il risultato seguente è giustamente noto come il *teorema fondamentale della geometria riemanniana.*

Teorema 2. *Sia (M,g) una varietà riemanniana. Esiste un'unica connessione ∇ su TM simmetrica e compatibile con la metrica.*

La connessione di cui il teorema afferma l'esistenza è detta *connessione di Levi-Civita.*

Proof. Siano $X,Y,Z \in C^\infty(M,TM)$. Se ∇ esiste, dalla compatibilità con g segue:

$$X(g(Y,Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z).$$

Permutando ciclicamente X,Y e Z nella relazione precedente si ottengono altre due relazioni; sommando allora le prime due e sottraendo la terza si trova, tenendo conto della simmetria della connessione:

$$\begin{aligned}(27)\quad & X(g(Y,Z)) + Y(g(Z,X)) - Z(g(X,Y)) \\ &\qquad + g([X,Y],Z) - g([X,Z],Y) - g([Y,Z],X) = 2g(\nabla_X Y, Z).\end{aligned}$$

Da questa equazione e dalla non degeneratezza della metrica segue subito l'unicitá di ∇. Ma si ottiene subito anche l'esistenza: per X ed Y fissati il primo membro è un funzionale $C^\infty(M)$-lineare di Z, e dunque, per l'isomorfismo naturale tra T^*Me TM indotto dalla metrica, definisce un campo vettoriale $W_{X,Y}$ su M, che dipende $\mathbb{R}$-bilinearmente da X ed Y, e si verifica poi facilmente che $X \to W_{X,Y}$ è $C^\infty(M)$-lineare, e che $Y \to W_{X,Y}$ soddisfa la regola di Leibniz; pertanto $(X,Y) \to W_{X,Y}$ definisce una connessione su TM. □

5.11. **Descrizione locale della connessione di Levi-Civita.** Abiamo appena visto che la connessione di Levi-Civita è definita dalla formula

$$(28)\qquad \begin{aligned} 2g(\nabla_X Y, Z) = \;& X(g(X,Z)) + Y(g(Z,X)) + \\ & -2(g(X,Y)) + g([X,Y],Z) + \\ & -g([X,Z],Y) - g([X,Z],Y) - g([Y,Z],X) \end{aligned}$$

Diamo ora una descrizione locale della connessione di Levi-Civita. Consideriamo una carta locale $(U,(x^1,...,x^n))$ e scegliamo X,Y,Z in una base locale per TM:

$$X := \frac{\partial}{\partial x^h} \quad , \quad Y := \frac{\partial}{\partial x^l} \quad , \quad Z := \frac{\partial}{\partial x^m}.$$

Ricordiamo allora che

$$\left[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right] = 0$$

e che

$$\nabla \frac{\partial}{\partial x^\ell} = \omega^i_\ell \frac{\partial}{\partial x^i}$$

dove $\omega^i_\ell \in \Omega^1(U)$. Esplicitando i coefficienti $\omega^i_\ell = \Gamma^i_{m\ell}dx^m$, $\Gamma^i_{m\ell} \in C^\infty(U)$ otteniamo la relazione

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^\ell} = \Gamma^i_{j\ell}\frac{\partial}{\partial x^i}. \tag{29}$$

I coefficienti Γ^i_{lm} si dicono *simboli di Christoffel.* Per darne un'espressione esplicita introduciamo le seguenti notazioni per gli elementi di matrice del tensore metrico:

$$g_{ij} := g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) \quad , \quad g^{ij} = (g_{ij})^{-1};$$

effettuando i prodotti scalari membro a membro nella (28) e sostituendo otteniamo

$$2\Gamma^l_{ij} = g^{lk}\left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right)$$

A partire dalla connesssione di Levi-Civita possiamo considerare la curvatura ∇^2. Sappiamo che localmente ∇^2 si presenta come una matrice di 2-forme Ω. Sappiamo anche, si veda l'Osservazione 2, che $\nabla^2 = R$ con

$$R(X,Y)(Z) = \left(\nabla_X\nabla_Y - \nabla_Y\nabla_X - \nabla_{[X,Y]}\right)(Z).$$

Si pone:

$$R\left(\frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^l}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) := R^i_{jkl}\frac{\partial}{\partial x_i}. \tag{30}$$

Classicamente i termini R^i_{jkl} sono i coefficienti di un tensore R, detto *tensore di curvatura.* Viene spesso utilizzato anche il tensore $R_{ijkl} := g_{im}R^m_{jkl}$ che può essere definito in maniera invariante come

$$R_{ijkl} := g\left(R\left(\frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^l}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right), \frac{\partial}{\partial x_i}\right).$$

Diamo l'espressione locale del tensore di curvatura della connessione di Levi-Civita in termini della metrica:

$$R^l_{kij} = \frac{\partial}{\partial x_i}\Gamma^l_{jk} - \frac{\partial}{\partial x_j}\Gamma^l_{ik} + \Gamma^l_{im}\Gamma^m_{jk} - \Gamma^l_{jm}\Gamma^m_{ik}$$

Il tensore di curvatura della connessione di Levi-Civita gode delle seguenti proprità:

$$\begin{aligned} &R(X,Y) = -R(Y,X)\,, \quad g(R(W,X)Y,Z) + g(Y,R(W,X)Z) = 0 \\ &R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0 \\ &g(R(W,X)Y,Z) = g(R(Y,Z)W,X) \end{aligned} \tag{31}$$

Le prime due relazioni esprimono rispettivamente il fatto che R è una due forma a valori endomorfismi e che $R_p(W,X)$ è un endomorfismo antisimmetrico di T_pM. La terza è ottenuta permutando ciclicamente X, Y, Z nella definizione di R, sommando e utilizzando il fatto che la connessione è priva di torsione. La quarta è una conseguenza algebrica delle prime tre. È ovvio come le (31) si traducano in proprietà di simmetria per gli indici di R^i_{jkl} e R_{ijkl}.

6. **Capitolo 6. Classi caratteristiche. Omomorfismo di Chern-Weil.**

6.1. **Polinomi invarianti.**

Denotiamo con $M_k(\mathbb{C})$ l'algebra delle matrici $k \times k$ a coefficienti complessi.

Definizione 10. Sia $P : M_k(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ una funzione polinomiale. Diremo che P è un polinomio invariante se

$$P(gAg^{-1}) = P(A)\,, \quad \forall g \in GL(k,\mathbb{C})\,, \forall A \in M_k(\mathbb{C}) \tag{32}$$

L'insieme dei polinomi invarianti ha una struttura naturale di algebra; la notazione standard per quest' algebra è $\mathrm{I}(GL(k,\mathbb{C}))$.
Più in generale, se G è un gruppo di Lie allora ha senso considerare l'algebra $\mathrm{I}(G)$ delle funzioni polinomiali $P : \mathrm{Lie}(G) \to \mathbb{C}$ che sono invarianti rispetto alla rappresentazione aggiunta $\mathrm{Ad} : G \to \mathrm{End}(\mathrm{Lie}(G))$:

$$P(\mathrm{Ad}_g(A)) = P(A) \;\; \forall g \in G\,, \forall A \in \mathrm{Lie}(G)\,.$$

Noi saremo principalmente interessati alle algebre

$$\mathrm{I}(GL(k,\mathbb{C}))\,, \quad \mathrm{I}(U(k))\,, \quad \mathrm{I}(O(k))\,, \quad \mathrm{I}(SO(k))\,.$$

Vi ricordo che in questi quattro casi si ha:

$$\mathrm{Lie}(GL(k,\mathbb{C})) = M_k(\mathbb{C})\,, \quad \mathrm{Lie}(U(k)) = \{\text{matrici antihermitiane}\}$$

$$\mathrm{Lie}(O(k)) = \mathrm{Lie}(SO(k)) = \{\text{matrici antisimmetriche}\};$$

inoltre la rappresentazione aggiunta è proprio data $\mathrm{Ad}_g(A) = gAg^{-1}$.

Esempio 1. La traccia e il determinante di una matrice sono due esempi di polinomi invarianti.

Esempio 2. Consideriamo i polinomi $P_\ell(A)$ definiti dall'identità

$$\det(I + tA) = \sum_{\ell=0}^{k} P_\ell(A) t^\ell\,.$$

I polinomi $P_\ell(A)$ sono invarianti; si noti che $P_1(A) = \mathrm{Tr}(A)$, $P_k(A) = \det(A)$. Più in generale $P_\ell(A) = \mathrm{Tr}(\Lambda^\ell A)$. Per dimostrare quest'ultima identità notiamo che essa è facilmente dimostrabile sulle matrici diagonali; ne segue, per invarianza, che essa è vera sulle matrici diagonalizzabili e quindi, per densità, su tutte le matrici.

6.2. **L'omomorfismo di Chern-Weil.**

Sia ora E un fibrato complesso di rango k su una varietà differenziabile M munito di una connessione ∇^E. Consideriamo la curvatura

$$(\nabla^E)^2 \in \mathcal{C}^\infty(M, \Lambda^2(T^*M) \otimes \mathrm{End}(E))\,.$$

Localmente la curvatura di ∇^E è data da una matrice Ω di 2 forme; se U_α e U_β sono due aperti banalizzanti, allora per le relative matrici di curvatura Ω_α, Ω_β si ha (Lezione 3):

$$\Omega_\alpha = g\,\Omega_\beta\,g^{-1}\,, \tag{33}$$

con $g \equiv g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to GL(k,\mathbb{C})$ le funzioni di transizione.
Sia ora $P \in \mathrm{I}(GL(k,\mathbb{C}))$; dato che la curvatura è una matrice di *due* forme e dato che il prodotto wedge è commutativo sulle 2 forme, ha senso considerare $P(\Omega_\alpha) \in \mathcal{C}^\infty(U_\alpha, \Lambda^* T^* U_\alpha)$ e analogamente $P(\Omega_\beta)$. Per l'invarianza di P e per (33) abbiamo che

$$P(\Omega_\alpha) = P(\Omega_\beta)\,, \quad \text{su } \; U_\alpha \cap U_\beta\,;$$

Otteniamo quindi una forma differenziale di grado pari *globalmente definita* che denotiamo con $P(E,\nabla^E)$. Si noti che se P è un polinomio omogeneo di grado j allora $P(E,\nabla^E)\in\mathcal{C}^\infty(M,\Lambda^{2j}(T^*M))$.

Teorema 3. *Sia $P\in \mathrm{I}(GL(k,\mathbb{C}))$ e sia ∇^E una connessione su E. Si ha*

$$dP(E,\nabla^E)=0\,. \tag{34}$$

Inoltre, se ∇_0^E e ∇_1^E sono due connessioni su E allora esiste una forma differenziale $TP(\nabla_1^E,\nabla_0^E)\in\mathcal{C}^\infty(M,\Lambda^*(T^*M))$ tale che

$$P(E,\nabla_1^E)-P(E,\nabla_0^E)=d(TP(\nabla_1^E,\nabla_0^E)) \tag{35}$$

Corollario 3. *Per ogni fibrato complesso di rango k su M è definito un omomorfismo di algebre*

$$\mathrm{CW}^E\,:\,\mathrm{I}(GL(k,\mathbb{C}))\to H^{2*}_{\mathrm{dR}}(M,\mathbb{C}) \tag{36}$$
$$\mathrm{CW}^E(P)=[P(E,\nabla^E)]$$

che è detto omomorfismo di Chern-Weil. Scriveremo brevemente CW *invece di* CW^E.

Dimostrazione. Basta dimostrare il teorema per i polinomi omogenei. Sia P un polinomio omogeneo invariante di grado j. A partire da P possiamo definire un'applicazione multilineare $\widetilde{P}(A_1,\dots,A_j)$ tale che

(i) $\widetilde{P}(A,\dots,A)=P(A)$

(ii) $\widetilde{P}(A_1,\dots,A_j)=\widetilde{P}(A_{\sigma(1)},\dots,A_{\sigma(j)})\,,\quad\forall\sigma\in S_j$

(iii) $\widetilde{P}(gA_1g^{-1},\dots,gA_jg^{-1})=\widetilde{P}(A_1,\dots,A_j)$.

L'applicazione multilineare $\widetilde{P}$ è definita come segue

$$\widetilde{P}(A_1,\dots,A_j)=\frac{1}{j!}(\text{coefficiente di }t_1\cdots t_j\ \text{ in }\ P(t_1A_1+\cdots+t_jA_j))$$

Ad esempio, per il polinomio invariante $Q(A)=\mathrm{Tr}(A^2)$ si ha:

$$Q(t_1A_1+t_2A_2)=\mathrm{Tr}(t_1^2A_1^2+t_1t_2(A_1A_2+A_2A_1)+t_2^2A_2^2)\,;$$

ne segue che $\widetilde{Q}(A_1,A_2)=\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(A_1A_2+A_2A_1)=\mathrm{Tr}(A_1A_2)$.
Sia ora $X\in M_k(\mathbb{C})\equiv\mathrm{Lie}(GL(k,\mathbb{C}))$. Si ha

$$\sum_i\widetilde{P}(A_1,\dots,[A_i,X],\dots,A_j)=0 \tag{37}$$

Per dimostrare questa identità consideriamo $\exp(tX)\equiv\sum_j(tX)^j/j\,!$. Poniamo $\exp(-tX):=g_t\in GL(k,\mathbb{C})$. È facile verificare che

$$\frac{d}{dt}(g_tAg_t^{-1})|_{t=0}=[A,X]\,. \tag{38}$$

Per ipotesi

$$\widetilde{P}(g_tA_1g_t^{-1},\dots,g_tA_jg_t^{-1})=\widetilde{P}(A_1,\dots,A_j)\quad\forall t\in\mathbb{R}\,;$$

derivando rispetto a t questa uguaglianza, utilizzando la multilinearità di $\widetilde{P}$ e (38) otteniamo subito (37).
Supponiamo ora che $\mathcal{A}_m$ sia una matrice di j_m forme e che $\mathcal{X}$ sia una matrice di 1 forme. Sotto queste ipotesi:

$$\sum_i(-1)^{j_1+\cdots+j_i}\widetilde{P}(\mathcal{A}_1,\dots,[\mathcal{A}_i,\mathcal{X}],\dots,\mathcal{A}_j)=0 \tag{39}$$

In questa formula il commutatore è, per definizione, il commutatore graduato:

$$[\mathcal{A}_i, \mathcal{X}] := \mathcal{A}_i\mathcal{X} - (-1)^{j_i \cdot 1}\mathcal{X}\mathcal{A}_i \equiv \mathcal{A}_i\mathcal{X} - (-1)^{j_i}\mathcal{X}\mathcal{A}_i\,.$$

Per dimostrare (39) possiamo assumere che $\mathcal{A}_m = A_m\omega_m$, con $A_m \in \mathrm{Lie}(GL(k,\mathbb{C}))$ e $\omega_m \in \mathcal{C}^\infty(M, \Lambda^{j_m}(T^*M))$, e che $\mathcal{X}_i = X\alpha$, con $X \in \mathrm{Lie}GL(k,\mathbb{C})$ e α una 1-forma su M. Con calcoli elementari si dimostra allora che

$$\sum_i (-1)^{j_1+\cdots+j_i}\widetilde{P}(\mathcal{A}_1, \ldots, [\mathcal{A}_i, \mathcal{X}], \ldots, \mathcal{A}_j)$$

è uguale a

$$\sum_i \widetilde{P}(A_1, \ldots, [A_i, X], \ldots, A_j)(\alpha \wedge \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_j)$$

che è zero per (37). Siamo ora nella posizione di dimostrare (34). Sia ω la matrice di 1-forme associata a ∇^E in un aperto banalizzante $U \subset M$; sia Ω la relativa matrice di curvatura; vi ricordo l'identità di Bianchi:

$$d\Omega = [\Omega, \omega]\,. \tag{40}$$

Certamente $dP(\Omega) = d\widetilde{P}(\Omega, \ldots, \Omega)$; utilizzando la multilinearità di $\widetilde{P}$ ed il fatto che Ω è una matrice di 2-forme [13], possiamo eguagliare questa espressione a

$$\sum \widetilde{P}(\Omega, \ldots, d\Omega, \ldots, \Omega)$$

e utilizzando Bianchi e (39) otteniamo

$$\sum \widetilde{P}(\Omega, \ldots, d\Omega, \ldots, \Omega) = \sum \widetilde{P}(\Omega, \ldots, [\Omega, \omega], \ldots, \Omega) = 0;$$

quindi $dP(\Omega) = 0$ che è quello che dovevamo dimostrare.

Passiamo alla seconda parte dell'enunciato. Siano ∇^E_0 e ∇^E_1 due connessioni. Abbiamo visto (lezione 3) che

$$\nabla^E_1 - \nabla^E_0 \in \mathcal{C}^\infty(M, T^*M \otimes \mathrm{End}(E)).$$

Poniamo $\theta = \nabla^E_1 - \nabla^E_0$ e consideriamo $\nabla^E_t = (1-t)\nabla^E_0 + t\nabla^E_1 = \nabla^E_0 + t\theta$. Sia U un aperto banalizzante per E e denotiamo con ω_t e Ω_t le corrispondenti matrici di connessione e di curvatura. La formula precedente ci dà

$$\omega_t = \omega_0 + t\theta\,.$$

Da quest'equazione e dall'equazione di struttura ($\Omega_t = d\omega_t + \omega_t \wedge \omega_t$ otteniamo immediatamente

$$\frac{d\Omega_t}{dt} = d\theta + [\theta, \omega_t] \tag{41}$$

[13] gli eventuali segni dovuti alla regola di derivazione per prodotti esterni sono quindi tutti positivi

(Osservazione: $\theta \wedge \theta$ può benissimo essere non nullo, dato che θ non è omogeneo.) Facendo uso di (41), della multilinearità e simmetria di $\widetilde{P}$ e del fatto che Ω_t è una matrice di due forme otteniamo

$$\begin{aligned}
P(\Omega_1) - P(\Omega_0) &= \int_0^1 \frac{d}{dt} P(\Omega_t) dt \\
&= \int_0^1 \frac{d}{dt} \widetilde{P}(\Omega_t, \dots, \Omega_t) dt \\
&= j \int_0^1 \widetilde{P}(\frac{d\Omega_t}{dt}, \Omega_t, \dots, \Omega_t) dt \\
&= j \int_0^1 \widetilde{P}(d\theta + [\theta, \omega], \Omega_t, \dots, \Omega_t) dt \\
&= j \int_0^1 \widetilde{P}(d\theta, \Omega_t, \dots, \Omega_t) dt + j \int_0^1 \widetilde{P}([\theta, \omega_t], \Omega_t, \dots, \Omega_t) dt
\end{aligned}$$

Per (39) sappiamo che:

$$-\widetilde{P}([\theta, \omega_t], \Omega_t, \dots, \Omega_t) = \widetilde{P}(\theta, [\Omega_t, \omega_t], \dots, \Omega_t) + \cdots + \widetilde{P}(\theta, \Omega_t, \dots, \Omega_t, [\Omega_t, \omega_t])$$

Sostituendo e utilizzando Bianchi ancora una volta otteniamo

$$\begin{aligned}
P(\Omega_1) - P(\Omega_0) &= j \int_0^1 \widetilde{P}(d\theta, \Omega_t, \dots, \Omega_t) dt \\
&- j \int_0^1 \sum_{j \geq 2} \widetilde{P}(\theta, \Omega_t, \dots, d\Omega_t, \dots, \Omega_t) dt \\
&= d \left(j \int_0^1 \widetilde{P}(\theta, \Omega_t, \dots, \Omega_t) dt \right)
\end{aligned}$$

Ponendo

$$TP(\nabla_1^E, \nabla_0^E) = j \int_0^1 \widetilde{P}(\theta, \Omega_t, \dots, \Omega_t) dt$$

otteniamo la dimostrazione completa del teorema.

Corollario 4. *Per ogni fibrato complesso di rango k su M è definito un omomorfismo di algebre*

$$\mathrm{CW}^E : \mathrm{I}(GL(k, \mathbb{C})) \to H^{2*}_{\mathrm{dR}}(M, \mathbb{C}) \tag{42}$$

$$\mathrm{CW}^E(P) = [P(E, \nabla^E)]$$

che è detto omomorfismo di Chern-Weil. Scriveremo brevemente CW *invece di* CW^E.

L'omomorfismo di Chern-Weil dà una misura della non-banalità di un fibrato: se E è banale allora possiamo scegliere la connessione banale che ha curvatura nulla; in questo caso $\mathrm{CW}(P) = 0\ \forall P$. È anche chiaro che se E ed F sono isomorfi allora $P(E) = P(F)$ in $H^{2*}_{\mathrm{dR}}(M, \mathbb{C})$ per ogni $P \in \mathrm{I}(GL(k, \mathbb{C}))$. Per capire questo punto osserviamo che se $\phi : E \to F$ è un isomorpfismo allora possiamo scegliere intorni banalizzanti comuni, perché se $\psi_\alpha : \pi_F^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{C}^k$ è una banalizzazione per F, allora $\psi_\alpha \circ \phi|_{U_\alpha}$ è una banalizzazione per $\pi_E^{-1}(U_\alpha)$. Con queste scelte i due fibrati hanno le stesse funzioni di transizione. Ora, se ∇^F è una connessione su F allora esiste una connessione indotta ∇^ϕ su E: $\nabla^\phi_X(e)$ è la sezione che in $m \in M$ vale $\phi^{-1}((\nabla^F_X(\phi_* s)(m))$, con $(\phi_* s)(m) := \phi(s(m))$. Con questa scelta di connessione su E è immediato verificare che le due connessioni hanno le stesse matrici di connessione e quindi le stesse matrici di curvatura. Da ciò segue immediatamente che $P(E) = P(F)$.

6.3. **Riduzione del gruppo di struttura.**

Sia G un sottogruppo di Lie di $GL(k, \mathbb{C})$. Supponiamo che sia possibile scegliere le funzioni di transizione di E a valori in G (si dice in tal caso che il gruppo di struttura di E è riducibile a G). Fissiamo una volta per tutte una ricoprimento $\{U_\alpha\}$ che ammetta funzioni di transizione a valori in G. Possiamo allora introdurre una connessione ∇^E che abbia matrici di connessione ω_α a valori in $\mathrm{Lie}(G)$. Diremo che ∇^E è una G-connessione. Non è difficile dimostrare che se E ha gruppo di struttura riducibile a G, allora E ammette una G-connessione. In questo caso le matrici di curvatura sono anche a valori in $\mathrm{Lie}(G)$ e sono invarianti per la rappresentazione aggiunta di G. Dato $P \in \mathrm{I}(G)$ ha quindi senso considerare $P(E, \nabla^E) \in \mathcal{C}^\infty(M, \Lambda^{2*}T^*M)$. La dimostrazione del seguente teorema è analoga a quella del Teorema 3

Teorema 4. *Sia E un fibrato complesso di rango k con gruppo di struttura G, sottogruppo di Lie di $GL(k, \mathbb{C})$. Sia $P \in \mathrm{I}(G)$ e sia ∇^E una G-connessione su E. Si ha*

$$dP(E, \nabla^E) = 0\,. \tag{43}$$

Se ∇^E_0 e ∇^E_1 sono due G-connessioni su E allora esiste una forma differenziale $TP(\nabla^E_1, \nabla^E_0) \in \mathcal{C}^\infty(M, \Lambda^*(T^*M))$ tale che

$$P(E, \nabla^E_1) - P(E, \nabla^E_0) = d(TP(\nabla^E_1, \nabla^E_0)) \tag{44}$$

Rimane definito un omomorfismo di algebre

$$\mathrm{CW}_G : \mathrm{I}(G) \to H^{2*}_{\mathrm{dR}}(M, \mathbb{C}) \tag{45}$$

$$\mathrm{CW}_G(P) = [P(E, \nabla^E)]$$

Osservazione. Abbiamo fino ad ora considerato fibrati *complessi* di rango k con gruppo di struttura G, sottogruppo di Lie di $GL(k, \mathbb{C})$. Possiamo analogamente considerare fibrati *reali* di rango k con gruppo di struttura G, sottogruppo di Lie di $GL(k, \mathbb{R})$. Saremo principalmente interessati ai seguenti 3 gruppi di Lie:

$$U(k) \leq GL(k, \mathbb{C})\,, \quad O(k) \leq GL(k, \mathbb{R})\,, \quad SO(k) \leq GL(k, \mathbb{R}).$$

Di fatto, in questi tre casi possiamo fare a meno dell'enunciato generale dato dal Teorema 4 e possiamo procedere direttamente come segue.

Se E è un fibrato complesso di rango k, allora possiamo sempre dotarlo di una metrica hermitiana. Utilizzando basi locali ortonormali, sempre esistenti per Gram-Schmidt, vediamo che un tale fibrato ha gruppo di struttura riducibile a $U(k)$. Inoltre, possiamo sempre scegliere una connessione ∇ compatibile con la metrica hermitiana. Per vedere questo punto torniamo per un attimo alla dimostrazione dell'esistenza di una connessione. Sia $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ un ricoprimento banalizzante. Su ogni intorno U_α fissiamo una matrice di 1-forme η_α. Consideriamo ora in U_α la matrice di 1-forme data da

$$\omega_\alpha := \sum_\beta \phi_\beta (dg_{\alpha\beta}\, g^{-1}_{\alpha\beta} + g_{\alpha\beta}\, \eta_\beta\, g^{-1}_{\alpha\beta})$$

dove la somma è estesa a tutti gli indici $\beta \in A$ tali che $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$. Ad esempio, per $\eta_\alpha \equiv 0$, scelta del tutto legittima, otteniamo

$$\omega_\alpha = \sum_\beta \phi_\beta (dg_{\alpha\beta}\, g^{-1}_{\alpha\beta})$$

Non è difficile verificare che le ω_α si trasformano secondo la legge di trasformazione delle matrici di connessione, e cioè

$$\omega_\alpha = dg_{\alpha\beta}\, g_{\alpha\beta}^{-1} + g_{\alpha\beta}\, \omega_\beta\, g_{\alpha\beta}^{-1}\,.$$

È ovvio che se scegliamo le matrici di transizione $g_{\alpha\beta}$ in $U(k)$ allora i differenziali di queste sono in Lie$U(k)$; in altre parole, abbiamo dimostrato che esiste sempre su E una connessione con matrice di connessione, e quindi matrice di curvatura, in Lie$U(k)$ e $U(k)$-invariante .
Rimane allora definito un omomorfismo di algebre

$$\mathrm{CW}_{U(k)} : \mathrm{I}(U(k)) \to H^{2*}_{\mathrm{dR}}(M, \mathbb{C})$$

con

$$\mathrm{CW}_{U(k)}(P) = [P(E, \nabla^E)]$$

dove ∇^E è una connessione come quella appena descritta.

Se E è un fibrato reale allora lo possiamo dotare di una metrica riemanniana; il gruppo di struttura è allora riducibile a $O(k)$ ed esiste sempre una connessione ∇^E con matrice di curvatura in Lie$O(k)$ e $O(k)$-invariante. In tal caso otteniamo

$$\mathrm{CW}_{O(k)} : \mathrm{I}(O(k)) \to H^{2*}_{\mathrm{dR}}(M, \mathbb{C})$$

Infine, se E è un fibrato reale orientabile, allora possiamo sempre ridurre il gruppo di struttura a $SO(k)$ e scegliendo ∇^E con matrice di curvatura in Lie$SO(k)$ e $SO(k)$-invariante otteniamo $\mathrm{CW}_{SO(k)} : \mathrm{I}(SO(k)) \to H^{2*}_{\mathrm{dR}}(M, \mathbb{C})$

7. Classi di Chern. Classi di Pontrjagin. Classe di Eulero.

7.1. Le classi di Chern di un fibrato complesso.

Tramite l'identità

$$\det(\mathrm{Id} + tA) = \sum P_\ell(A) t^\ell$$

abbiamo definito i polinomi invarianti $P_\ell(\ )$; questi polinomi sono detti *polinomi simmetrici elementari* (per matrici diagonali sono infatti uguali alle funzioni simmetriche elementari). Notare che $P_j(\ )$ è un polinomio omogeneo di grado j. Definiamo

$$c_j(A) := P_j(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi} A)$$

Definizione 11. Sia E un fibrato complesso su M. La j-ma classe di Chern di E è per definizione la classe

$$c_j(E) := [c_j(E, \nabla^E)] \in H^{2j}_{dR}(M, \mathbb{C})$$

Teorema 5. *Si hanno isomorfismi di anelli:* $I(U(k)) = \mathbb{C}[c_1, \dots, c_k] = I(GL(k, \mathbb{C}))$

Questo importante teorema ci dice che data una classe di de Rham $P(E, \nabla^E)$ definita da un polinomio invariante $P \in I(GL(k, \mathbb{C}))$ tramite l'omomorfismo di Chern-Weil, essa è esprimibile come un polinomio nelle classi di Chern.

Dimostrazione. Sia $P \in I(U(k))$ allora

$$P : \mathrm{Lie}(U(k)) \to \mathbb{C}$$

con

$$P(gAg^{-1}) = P(A), \quad \forall A \in \mathrm{Lie}(U(k)),\ g \in U(k)$$

Poiché $A \in \mathrm{Lie}(U(k))$, A è anti-hermitiana. Ne segue che $\sqrt{-1}A$ è hermitiana e dunque esiste $g \in U(k)$ tale che

$$g \cdot \sqrt{-1}\ A \cdot g^{-1} = diag\{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_k\}$$

con gli η_i reali. Ma allora

$$gAg^{-1} = \sqrt{-1}\ diag\{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_k\} =: diag\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k\}$$

con i λ_i immaginari puri. Se poniamo

$$\check{P}(\lambda_1, \dots, \lambda_k) := P(diag\{\lambda_1, \dots, \lambda_k\})$$

abbiamo, per l'invarianza di P,

$$P(A) = P(gAg^{-1}) = \check{P}(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$$

Sia adesso $h_{ij} \in U(k)$ l'applicazione che scambia i vettori e_i ed e_j della base diagonalizzante. Poiché

$$h_{ij} \cdot diag\{\lambda_1, \dots, \lambda_i, \dots, \lambda_j, \dots, \lambda_k\} \cdot h_{ij}^{-1} = diag\{\lambda_1, \dots, \lambda_j, \dots, \lambda_i, \dots, \lambda_k\}$$

la $U(k)$ invarianza di P implica

$$\check{P}(\lambda_1, \dots, \lambda_i, \dots, \lambda_j, \dots, \lambda_k) = \check{P}(\lambda_1, \dots, \lambda_j, \dots, \lambda_i, \dots, \lambda_k)$$

ovvero il polinomio $\check{P}$ è S_k-invariante. A questo punto un ben noto teorema di algebra commutativa ci dice che $\check{P}$ è un polinomio nelle funzioni simmetriche elementari. Più precisamente esiste ed è unico un polinomio F tale che

$$\check{P}(\lambda_1, \dots, \lambda_k) = F(\sigma_1(\lambda_1, \dots, \lambda_k), \sigma_2(\lambda_1, \dots, \lambda_k), \dots, \sigma_k(\lambda_1, \dots, \lambda_k))$$

dove i polinomi $\sigma_i(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ sono definiti dall'equazione

$$\prod_i (1 + \lambda_i\ t) = \sum_i \sigma_i(\lambda_1, \ldots, \lambda_k) t^i$$

Osserviamo che si ha

$$\prod_i (1 + \lambda_i\ t) = \det(I + t \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_k \end{pmatrix}) = \det(I + tA)$$

da cui

$$\sigma_i(\lambda_1, \ldots, \lambda_k) = P_i(A)$$

In conclusione, abbiamo dimostrato

$$P(A) = \tilde{F}\left(c_1(A), \ldots, c_k(A)\right)$$

dove, al solito,

$$c_i(A) := P_i\left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi} A\right)$$

sono i polinomi di Chern. Il polinomio $\tilde{F}$ è ottenuto da F tendendo conto dei fattori $\sqrt{-1}/2\pi$. Abbiamo quindi dimostrato il primo isomorfismo.
Passiamo al secondo: la dimostrazione appena data dimostra che se A è diagonalizzabile allora per ogni polinomio invariante P esiste ed è unico il polinomio $\tilde{F}$ tale che

$$P(A) = \tilde{F}\left(c_1(A), \ldots, c_k(A)\right)$$

Questa identità vale su tutte le matrici diagonalizzabili; essendo queste dense in $M_k(\mathbb{C})$ si ha per continuità la tesi.

7.2. **Classe totale di Chern.**

Vediamo ora un primo esempio di classe caratteristica ottenibile come polinomio nelle classi di Chern di un fibrato hermitiano $E \to M$, *la classe di Chern totale.* Si tratta, per definizione, della classe

$$c(E) := 1 + c_1(E) + \cdots + c_k(E) = \left[\det\left(1 + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\Omega\right)\right]$$

Dalla definizione seguono immediatamente le proprietà seguenti:

$$c(E \oplus F) = c(E) \wedge c(F)$$
$$c(f^*E) = f^*c(E)$$
$$c(E^*) = 1 - c_1(E) + c_2(E) + \cdots + (-1)^k c_k(E)$$
$$\overline{c(E)} = c(E) \quad \text{(e quindi} \quad c_j(E) \in H^{2j}(M, \mathbb{R}))$$

dato che $\Omega^i_j = -\overline{\Omega}^j_i$. In particolare da $c(E \oplus F) = c(E) \wedge c(F)$ si ha

$$c(E \oplus 1) = c(E)$$

ovvero la classe di Chern totale è *stabile*. Dalla formula $c(E \oplus F) = c(E) \wedge c(F)$, prendendo la componente in grado i in ambo i membri dell'uguaglianza, si ottiene

$$c_i(E \oplus F) = \sum_{l=0}^{i} c_l(E) \wedge c_{i-l}(F)$$

Notiamo anche che $c_i(E^*) = (-1)^i c_i(E)$ e che $c_i(f^*E) = f^*c_i(E)$.

7.3. **Le classi di Pontryagin di un fibrato reale.**

Sia $E \to M$ un fibrato reale con metrica (diremo brevemente riemanniano) di rango k. Il suo gruppo di struttura è quindi riducibile al gruppo $O(k)$ delle matrici ortogonali $k \times k$. Siamo interessati ai polinomi su $\mathrm{Lie}(O(k))$ invarianti per l'azione di $O(k)$ per coniugio, che al solito indicheremo con $I(O(k))$.

Sia $A \in \mathrm{Lie}(O(k))$ e consideriamola come applicazione da $\mathbb{C}^k \to \mathbb{C}^k$, denotandola allora $A_{\mathbb{C}}$. Poniamo

$$p_i(A) := \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{2i} P_{2i}(A_{\mathbb{C}})$$

Il polinomio $p_i(A)$ prende il nome di i-esimo polinomio di Pontryagin di A. Per definizione la i-esima classe di Pontryagin di un fibrato riemanniano $E \to M$ è

$$p_i(E) := [p_i(\Omega)] \in H^{4i}_{dR}(M, \mathbb{C})$$

Dalla definizione risulta immediatamente che, se indichiamo con $E_{\mathbb{C}} := E \otimes \mathbb{C}$ il complessificato del fibrato reale E , si ha

$$p_i(E) = (-1)^i c_{2i}(E_{\mathbb{C}})$$

dove abbiamo esteso la connessione ∇ su E ad una connessione su $E_{\mathbb{C}}$ semplicemente estendendola per $\mathbb{C}$-linearità.
In particolare

$$p_i(E) := [p_i(\Omega)] \in H^{4i}_{dR}(M, \mathbb{R})\,.$$

Teorema 6. *Si ha un isomorfismo di anelli $I(O(k)) = \mathbb{C}[p_1, \ldots, p_{[k/2]}]$, dove $[x]$ indica la parte intera di x.*

Quindi una classe caratteristica $[P(E, \nabla^E)]$, con P polinomio $O(k)$-invariante, è esprimibile come un polinomio nella classi di Pontryagin di E.
Dimostrazione. Sia $P \in I(O(k))$ allora

$$P : \mathrm{Lie}(O(k)) \to \mathbb{C}$$

con

$$P(gAg^{-1}) = P(A), \quad \forall A \in \mathrm{Lie}(O(k)),\ g \in O(k)$$

Poiché $A \in \mathrm{Lie}(O(k))$, A è anti-simmetrica. Dunque A, vista come matrice complessa, è anti-hermitiana. Ne segue che $A_{\mathbb{C}}$ è diagonalizzabile sui complessi e che i suoi autovalori sono tutti immaginari puri. Poichè A è reale, il suo polinomio caratteristico lo è, e dunque i suoi autovalori complessi sono a due a due coniugati. Sia $\sqrt{-1}\lambda$ uno di questi autovalori, e sia $e \in \mathbb{C}^k$ un autovettore. Il vettore $\overline{e}$ è un autovettore di autovalore $-\sqrt{-1}\lambda$. Poniamo $e_1 = e, e_2 = \overline{e}$, e siano

$$\begin{cases} v_1 = \frac{(1-\sqrt{-1})}{2}(e_1 + \sqrt{-1}e_2) \\ v_2 = \frac{(1-\sqrt{-1})}{2}(e_2 + \sqrt{-1}e_1) \end{cases}$$

Si ha

$$\begin{gathered} Av_1 = \lambda v_2 \\ Av_2 = -\lambda v_1 \end{gathered}$$

Inoltre

$$\begin{aligned} \overline{v_1} &= \tfrac{(1+\sqrt{-1})}{2}(e_2 - \sqrt{-1}e_1) = \tfrac{(1-\sqrt{-1})}{2}(e_1 + \sqrt{-1}e_2) = v_1 \\ \overline{v_2} &= \tfrac{(1+\sqrt{-1})}{2}(e_1 - \sqrt{-1}e_2) = \tfrac{(1-\sqrt{-1})}{2}(e_2 + \sqrt{-1}e_1) = v_2 \end{aligned}$$

dunque i vettori $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^k$. Un rapido calcolo mostra che v_1 e v_2 sono ortonormali rispetto all'usuale prodotto scalare su $\mathbb{R}^k$. Effettuando questo procedimento per tutti gli autovalori di $A_{\mathbb{C}}$ troviamo una base ortonormale $\{v_i\}$ di $\mathbb{R}^k$ nella quale A ha la forma

$$\begin{pmatrix} 0 & \lambda_1 & & & & \\ -\lambda_1 & 0 & & & & \\ & & 0 & \lambda_2 & & \\ & & -\lambda_2 & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & * \end{pmatrix} \tag{46}$$

dove il blocco $(*)$ è (0) se k è dispari ed è assente se k è pari. Indicheremo la matrice a blocchi (46) con il simbolo $Bl(\lambda_1, \dots, \lambda_{[k/2]})$. Tutto quanto abbiamo fin qui dimostrato si riassume dicendo che, se $A \in Lie(O(k))$, esiste $g \in O(k)$ tale che

$$gAg^{-1} = Bl(\lambda_1, \dots, \lambda_{[k/2]})$$

con i λ_i reali. Se poniamo

$$\check{P}(\lambda_1, \dots, \lambda_{[k/2]}) := P(Bl(\lambda_1, \dots, \lambda_{[k/2]}))$$

abbiamo, per l'invarianza di P,

$$P(A) = P(gAg^{-1}) = \check{P}(\lambda_1, \dots, \lambda_{[k/2]})$$

Sia adesso $h_{12|34} \in O(k)$ l'applicazione definita da

$$\begin{aligned} v_1 &\leftrightarrow v_3 \\ v_2 &\leftrightarrow v_4 \end{aligned}$$

Il coniugio con $h_{12|34}$ permuta il primo e il secondo blocco della matrice $Bl(\lambda_1, \dots, \lambda_{[k/2]})$; ne segue la S_k-invarianza del polinomio $\check{P}$, ovvero $\check{P}$ è un polinomio simmetrico nelle λ_i. Sia ora $h_{1|2} \in O(k)$ l'applicazione definita da

$$v_1 \leftrightarrow v_2$$

Si ha

$$h_{1|2} \cdot Bl(\lambda_1, \dots, \lambda_{[k/2]}) \cdot h_{1|2}^{-1} = Bl(-\lambda_1, \dots, \lambda_k)$$

dunque la $O(k)$ invarianza di P implica che il polinomio $\check{P}$ è un polinomio pari nella variabile λ_1. Ripetendo questo ragionamento per le altre variabili, troviamo che $\check{P}$ è un *polinomio simmetrico pari* nelle variabili λ_i, ovvero che è un polinomio simmetrico nelle variabili λ_i^2. Ne segue che esiste ed è unico un polinomio F tale che

$$\check{P}(\lambda_1, \dots, \lambda_{[k/2]}) = F(\gamma_1(\lambda_1, \dots, \lambda_{[k/2]}), \gamma_2(\lambda_1, \dots, \lambda_{[k/2]}), \dots, \gamma_{[k/2]}(\lambda_1, \dots, \lambda_{[k/2]}))$$

dove i polinomi $\gamma_i(\lambda_1, \dots, \lambda_{[k/2]})$ sono definiti dall'equazione

$$\prod_i (1 + \lambda_i^2\, t^2) = \sum_i \gamma_i(\lambda_1, \dots, \lambda_{[k/2]}) t^{2i}$$

Osserviamo che si ha

$$\prod_i (1 + \lambda_i^2\, t^2) = \det(I + t \cdot Bl(\lambda_1, \dots, \lambda_{[k/2]}))$$

D'altra parte, possiamo anche scrivere

$$\prod_i (1 + \lambda_i^2\, t^2) = \det(I + t \cdot Bl(\lambda_1, \dots, \lambda_{[k/2]})) = \prod_i ((1 + \sqrt{-1}\lambda_i t)(1\sqrt{-1}\lambda_i t))$$

da cui

$$\gamma_i(\lambda_1,\ldots,\lambda_{[k/2]}) = \sigma_{2i}(\sqrt{-1}\lambda_1, -\sqrt{-1}\lambda_1,\ldots,\sqrt{-1}\lambda_{[k/2]}, -\sqrt{-1}\lambda_{[k/2]}) = P_{2i}(A_{\mathbb{C}})$$

Poniamo allora

$$p_i(A) := \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{2i} P_{2i}(A_{\mathbb{C}})$$

Il polinomio $p_i(A)$è l' i-esimo polinomio di Pontryagin di A, definito prima dell'enunciato del Teorema. In conclusione, abbiamo dimostrato che esiste ed è unico il polinomio $\tilde{F}$ tale che

$$P(A) = \tilde{F}\left(p_1(A),\ldots,p_{[k/2]}(A)\right)$$

il che conclude la dimostrazione.

Osservazione.
Sia E è un fibrato *complesso* di rango k; E è definito da funzioni di transizione $\{g_{\alpha\beta}\}$ a valori in $GL(k,\mathbb{C})$. Il fibrato con funzioni di transizione $\overline{g_{\alpha\beta}}$ è il fibrato coniugato di E ed è denotato con $\overline{E}$. Sia $E_{\mathbb{R}}$ il fibrato reale di rango $2k$ definito dalle funzioni di transizione $(g_{\alpha\beta})_{\mathbb{R}}$ a valori in $GL(2k,\mathbb{R})$. Facciamo una pausa per chiarire come associamo ad un elemento A in $GL(k,\mathbb{C})$ un elemento $A_{\mathbb{R}}$ in $GL(2k,\mathbb{R})$. $A_{\mathbb{R}}$ è definito dalla composizione

$$\mathbb{R}^{2k} \to \mathbb{C}^k \xrightarrow{A} \mathbb{C}^k \to \mathbb{R}^{2k}$$

con la prima e l'ultima mappa date dall'identificazione $z_\ell = x_{2\ell-1} + ix_{2\ell}$, quindi

$$\mathbb{R}^{2k} \ni (x_1, x_2,\ldots,x_{2k-1},x_{2k}) \to (z_1,\ldots,z_k) \in \mathbb{C}^k.$$

(Un ragionamento analogo può essere fatto per un qualsiasi spazio vettoriale complesso e per un operatore $T: E \to E$.) Non è difficile dimostrare che se consideriamo $A_{\mathbb{R}} \in GL(2k,\mathbb{R}) \subset GL(2k,\mathbb{C})$ allora esiste una matrice $B \in GL(2k,\mathbb{C})$ tale che

$$B^{-1}(A_{\mathbb{R}})\,B = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & \overline{A} \end{pmatrix} \tag{47}$$

B può essere espicitamente descritta: se B_j è la j-ma colonna allora

$$B_j = (0,\ldots,0,b_j^j,b_j^{j+1},0,\ldots,0)^T \;\text{ con }\; b_j^j = 1\,, b_j^{j+1} = -i \;\text{ se }\; j \le k$$

e analogamente $B_{j+k} = (0,\ldots,0,b_{j+k}^j,b_{j+k}^{j+1},0,\ldots,0)^T$ con $b_{j+k}^j = 1\,, b_{j+k}^{j+1} = i$.
Torniamo al nostro fibrato complesso E; abbiamo definito $E_{\mathbb{R}}$. Il complessificato di $E_{\mathbb{R}}$ è un fibrato complesso di rango $2k$ e risulta

$$E_{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C} \simeq E \oplus \overline{E} \simeq E \oplus E^*$$

dove $\overline{E}$ indica il fibrato coniugato di E, mentre E^* indica il fibrato duale. Il primo isomorfismo risulta dalla (47), il secondo dal fatto che le funzioni di transizione del duale sono $(g_{\alpha\beta}^{-1})^t$ (possiamo ovviamente sempre supporre che in E ci sia una metrica hermitiana e ridurre le funzioni di transizione a $U(k)$). Si ha pertanto

$$p_i(E_{\mathbb{R}}) = (-1)^i c_{2i}(E \oplus E^*) = \sum_{l=0}^{2i} (-1)^{l-i} c_l(E)\; c_{2i-l}(E)$$

7.4. **Classe di Pontryagin totale.**

In analogia a quanto fatto per i fibrati hermitiani, vediamo ora un primo esempio di classe caratteristica ottenibile come polinomio nelle classi di Pontryagin di un fibrato riemanniano $E \to M$. La *classe di Pontryagin totale* è, per definizione, la classe

$$p(E) := 1 + p_1(E) + \cdots + p_{[k/2]}(E) = \left[\det\left(1 + \frac{1}{2\pi}\Omega\right)\right]$$

Dalla definizione seguono immediatamente le proprietà seguenti:

$$p(E \oplus F) = p(E) \wedge p(F)$$

$$p(f^*E) = f^*p(E)$$

In particolare si ha

$$p(E \oplus 1) = p(E)$$

ovvero la classe di Pontryagin totale è stabile.

7.5. **Polinomi $SO(k)$-invarianti. Classe di Eulero.**

Si indichi con $I(SO(k))$ l'algebra dei polinomi invarianti per $SO(k)$. Lo studio di questi polinomi porta a due casi, a seconda della parità di k.

Primo caso, k dispari: $k = 2m + 1$.
Analogamente al caso visto per $I(O(k))$, data una matrice antisimmetrica A, ossia $A \in \mathrm{Lie}\,(SO(2m+1)) = \mathrm{Lie}\,(O(2m+1))$, esiste sempre una matrice $g \in SO(2m+1)$ la cui azione aggiunta trasforma A in una matrice diagonale a blocchi, con $m+1$ blocchi:

$$gAg^{-1} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \lambda_1 \\ -\lambda_1 & 0 \end{pmatrix} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \begin{pmatrix} 0 & \lambda_2 \\ -\lambda_2 & 0 \end{pmatrix} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \begin{pmatrix} 0 & \lambda_m \\ -\lambda_m & 0 \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & (\,0\,) \end{pmatrix}$$

Come per il caso di $I(O(k))$, si trovano polinomi $\check{P}$ che dipendono solo dagli autovalori λ_i:

$$P(A) \;=\; P(gAg^{-1}) \;=\; \check{P}(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$$

L'azione della matrice $h \in SO(2m+1)$ definita sulla base canonica come

$$h : \begin{cases} e_1 & \longrightarrow & e_3 \\ e_2 & \longrightarrow & e_4 \\ e_3 & \longrightarrow & e_1 \\ e_4 & \longrightarrow & e_2 \end{cases}$$

scambia il primo con il secondo blocco della matrice, lasciando invariati i polinomi $\check{P}$. Analogamente tramite $h \in SO(2m+1)$ opportuna si possono scambiare due blocchi qualsiasi, ottenendo

$$\check{P}(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \;=\; \check{P}(\lambda_{\sigma(1)}, \dots, \lambda_{\sigma(m)})\,, \quad \sigma \in S_m.$$

Nel caso $I(O(2m+1))$, per verificare che $\check{P}(\lambda_1,\ldots,\lambda_m) = \check{P}(-\lambda_1,\ldots,\lambda_m)$ si è utilizzata la trasformazione $h \in O(k)$, $h : \begin{cases} e_1 & \rightarrow & e_2 \\ e_2 & \rightarrow & e_1 \end{cases}$. Ma h ha matrice

$$h = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \notin SO(2m+1)\,.$$

Si considera allora la trasformazione $\widetilde{h}$ con matrice

$$\widetilde{h} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & (-1) \end{pmatrix} \in SO(2m+1)$$

che scambia λ_1 con $-\lambda_1$, ottenendo $\check{P}(\lambda_1,\ldots,\lambda_m) = \check{P}(-\lambda_1,\ldots,\lambda_m)$. Quindi vale:

$$\check{P}(\lambda_1,\ldots,\lambda_i,\ldots,\lambda_m) = \check{P}(\lambda_1,\ldots,-\lambda_i,\ldots,\lambda_m)\,,$$

ossia $\check{P}$ è un polinomio simmetrico nelle λ_i^2. Si ottiene quindi, come nel caso di $O(2m+1)$, che esiste un unico polinomio simmetrico F, tale che

$$\check{P}(\lambda_1,\ldots,\lambda_m) = F(\sigma_1(\lambda_1^2,\ldots,\lambda_m^2),\ldots,\,\sigma_m(\lambda_1^2,\ldots,\lambda_m^2))$$

e $P(A) = F(p_1(A),\ldots\, p_m(A))$ dove p_i sono i polinomi di Pontryagin, ottenendo

Teorema 7. *Si ha un isomorfismo di anelli*

$$I(SO(2m+1)) = \mathbb{C}[p_1,\ldots,p_m]$$

e non ci sono quindi nuove classi caratteristiche in questo primo caso.

Secondo caso, k pari: $k = 2m$. Non c'è più la possibilità di utilizzare (-1) nel blocco finale della matrice per definire $\widetilde{h}$ e quindi non è più possibile scambiare λ_i con $-\lambda_i$.

Si procede allora come segue: fissato $g_0 \in O(k)\backslash SO(k)$ si può scivere

$$P(A) = \frac{1}{2}(P(g_0 A g_0^{-1}) + P(A)) + \frac{1}{2}(P(A) - P(g_0 A g_0^{-1})) \stackrel{def}{=} P_0(A) + P_1(A)$$

Si verifica facilmente che

- $P_0(A)$ e $P_1(A)$ sono $SO(k)-$invarianti,
- $P_0(A)$ è $O(k)-$invariante
- $P_1(hAh^{-1}) = -P_1(A)$, per $h \in O(k)\backslash SO(k)$.

Scelto h come sopra che realizza lo scambio $e_1 \leftrightarrow e_2$, …, $e_{2m-1} \leftrightarrow e_{2m}$, si ottiene analogamente ai casi visti:

$$P_1(A) = \check{P}_1(\lambda_1,\ldots,\lambda_i,\ldots,\lambda_m) = -\check{P}_1(\lambda_1,\ldots,-\lambda_i,\ldots,\lambda_m)\,,\ i = 1,\ldots,m$$

ossia λ_i divide $\check{P}_1(\lambda_1,\ldots,\lambda_m)$ per ogni $i = 1,\ldots,m$, e allora vale

$$\check{P}_1(\lambda_1,\ldots,\lambda_m) = \lambda_1 \cdot \cdots \cdot \lambda_m \cdot \check{p}_2(\lambda_1,\ldots,\lambda_m)$$

dove $\check{p}_2$ è una funzione simmetrica delle λ_i^2. Quindi in questo caso $P(A)$ si scrive come

$$P(A) = \check{P}(\lambda_1,\ldots,\lambda_m) = \check{P}_0(\lambda_1,\ldots,\lambda_m) + H\check{p}_2(\lambda_1,\ldots,\lambda_m)$$

dove si è posto $H = \lambda_1 \cdot \cdots \cdot \lambda_m$. Notiamo che $\det A = H^2$.

Vogliamo definire un polinomio invariante $e(A)$ tale che $e(A) = e(Bl(\lambda_1,\ldots,\lambda_m)) = H$ (a meno di costanti normalizzanti). Sia V uno spazio vettoriale euclideo orientato, con base ortonormale

$\{v_1, \dots, v_k\}$ e con orientazione $v_1 \wedge \cdots \wedge v_k$.
L'integrale di Berezin è il funzionale lineare $T : \bigwedge^* V \to \mathbb{R}$ che vale 1 su $v_1 \wedge \cdots \wedge v_k$ e zero su $v_{i_1} \wedge \cdots \wedge v_{i_\ell}$ con $\ell < k$. Se $\{v_1, \dots, v_k\}$ e $\{w_1, \dots, w_k\}$ sono due basi ortonormali equiorientatate allora è chiaro che

$$T(v_1 \wedge \cdots \wedge v_k) = T(w_1 \wedge \cdots \wedge w_k) \tag{48}$$

Consideriamo la seguente forma esterna:

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{i<j} A_{ij}\, v_i \wedge v_j$$

dove $\mathcal{B} = \{v_i\}_{i=1,\dots,2m}$ è una base ortonormale di $\mathbb{R}^{2m}$ equiorientata alla base standard. È facile verificare che se B è coniugata a A tramite $g \in SO(k)$ e se $\mathcal{C} = \{w_i\}_{i=1,\dots,2m}$ è la base ortonormale di $\mathbb{R}^{2m}$ ottenuta da $\mathcal{B}$ tramite g allora vale la seguente identità in $\bigwedge^2 \mathbb{R}^{2m}$:

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{i<j} A_{ij}\, v_i \wedge v_j = \frac{1}{2\pi} \sum_{i<j} B_{ij}\, w_i \wedge w_j$$

Ne segue che in $\bigwedge^{2m} \mathbb{R}^{2m}$

$$\Big(\frac{1}{2\pi} \sum_{i<j} A_{ij}\, v_i \wedge v_j\Big)^m = \Big(\frac{1}{2\pi} \sum_{i<j} B_{ij}\, w_i \wedge w_j\Big)^m$$

da cui deduciamo, utilizzando la (48), che

$$T\Big(\Big(\frac{1}{2\pi} \sum_{i<j} A_{ij}\, v_i \wedge v_j\Big)^m\Big) = T\Big(\Big(\frac{1}{2\pi} \sum_{i<j} B_{ij}\, w_i \wedge w_j\Big)^m\Big) \in \mathbb{R}$$

Definiamo $e(A)$, **il polinomio di Eulero**, come segue:

$$e(A) := \frac{1}{(m)!} T\Big(\frac{1}{2\pi} \sum_{i<j} A_{ij}\, v_i \wedge v_j\Big)^m$$

Possiamo concludere da quanto spiegato sopra che $e(A)$ è $SO(k)$-invariante. Scelta una base diagonalizzante a blocchi per A, ossia tale che:

$$\begin{array}{rcl} Av_1 &=& \lambda_1 v_2 \\ Av_2 &=& -\lambda_1 v_1 \\ Av_3 &=& \lambda_2 v_4 \\ Av_4 &=& -\lambda_2 v_3 \\ \vdots && \end{array}$$

possiamo scrivere la due forma associata ad A e alla base diagonalizzante come

$$-\frac{\lambda_1}{2\pi} v_1 \wedge v_2 - \frac{\lambda_2}{2\pi} v_3 \wedge v_4 - \dots$$

da cui deduciamo che

$$e(A) = -\frac{\lambda_1}{2\pi} \cdot \dots \cdot -\frac{\lambda_m}{2\pi} = \frac{1}{(2\pi)^m} (-1)^m \lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_m.$$

Si noti che, in particolare,

$$e(A)^2 = \frac{1}{(2\pi)^k} \lambda_1^2 \cdot \dots \cdot \lambda_m^2 = \frac{1}{(2\pi)^k} \det(A) = p_m(A)$$

ossia il quadrato del polinomio di Eulero è uguale all'ultimo polinomio di Pontryagin $p_m(A)$. Concludendo, abbiamo dimostrato il seguente importante risultato:

Teorema 8. *Si ha un isomorfismo di anelli:*

$$I(SO(2m)) = \mathbb{C}[p_1, \ldots, p_{m-1}, p_m, e]/ < e^2 - p_m >$$

Si può allora dare la seguente

Definizione 12. Dato un fibrato reale orientabile E di rango $m = 2k$ sulla varietà M si indica con $e(E, \nabla^E) \in \Omega^{2m}(M)$ la **forma di Eulero** e si definisce la **classe di Eulero di** E come $[e(E, \nabla^E)] = e(E) \in H^{2m}_{\mathrm{dR}}(M, \mathbb{R})$.

La sua espressione in coordinate locali si deduce dalla definizione stessa, ed è data dall'espressione

$$e(\Omega) = \frac{(-1)^m}{2^m(2\pi)^m}\frac{1}{m!}\sum_{\sigma\in S_{2m}} \mathrm{segno}(\sigma)\Omega_{\sigma(1)\sigma(2)}\cdots\Omega_{\sigma(2m-1)\sigma(2m)}.$$

Osservazione 1. Sia E un fibrato complesso e $E_{\mathbb{R}}$ la sua realizzazione; abbiamo visto che se E ha rango$_{\mathbb{C}} = m$ allora $E_{\mathbb{R}}$ ha rango$_{\mathbb{R}} = 2m$. Si osservi che poichè E è complesso segue che $E_{\mathbb{R}}$ è orientabile: infatti se $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to U(m)$ sono le funzioni di transizione di E, allora $(g_{\alpha\beta})_{\mathbb{R}} : U_\alpha \cap U_\beta \to SO(2m)$ sono per definizione le funzioni di transizione di $E_{\mathbb{R}}$ e sappiamo dalla formula (47) che

$$det(g_{\alpha\beta})_{\mathbb{R}} = det(g_{\alpha\beta}) \cdot \overline{det(g_{\alpha\beta})} = |det(g_{\alpha\beta})|^2$$

Vale allora la seguente

Proposizione 3. *Risulta*

$$e(E_{\mathbb{R}}) = c_m(E) \qquad in \quad H^{2m}_{dR}(M, \mathbb{R}).$$

Dimostrazione: Basta ragionare su uno spazio vettoriale complesso E. Se $\langle\ ,\ \rangle_E$ indica la metrica hermitiana su E, la sua parte reale $\langle\ ,\ \rangle_{E_{\mathbb{R}}}$ è una metrica su $E_{\mathbb{R}}$; inoltre se $v_1, \ldots, v_m$ è una base ortonormale di E allora $w_1 = v_1, w_2 = iv_1, w_3 = v_2, \ldots, w_{2m} = iv_m$ è una base ortonormale di $E_{\mathbb{R}}$. Notiamo anche che una matrice antihermitiana A definisce un operatore antihermitiano su E una volta fissata una base ortonormale, e questo induce un operatore antisimmetrico su $E_{\mathbb{R}}$ con metrica $\langle\ ,\ \rangle_{E_{\mathbb{R}}}$; questo operatore ha matrice $A_{\mathbb{R}}$ rispetto alla base $\{w_1, \ldots, w_{2m}\}$ e questa matrice è antisimmetrica. L'enunciato $e(A_{\mathbb{R}}) = c_m(A)$ ha quindi senso. Allora se $v_1, \ldots, v_m$ è una base che diagonalizza A, ossia

$$\begin{array}{lcl} Av_1 & = & i\lambda_1 v_1 \\ \vdots & & \\ Av_m & = & i\lambda_m v_m \end{array} \quad , \qquad \lambda_i \in \mathbb{R}$$

si ottiene per la m-esima classe di Chern:

$$c_m(A) = \left(\frac{i}{2\pi}\right)^m (i\lambda_1)\cdot\cdots\cdot(i\lambda_m) = \left(\frac{-1}{2\pi}\right)^m \lambda_1\cdot\cdots\cdot\lambda_m.$$

D'altro canto

$$A_{\mathbb{R}}w_1 = Av_1 = i\lambda_1 v_1 = \lambda_1(iv_1) = \lambda_1 w_2\,, \qquad A_{\mathbb{R}}w_2 = -\lambda_1 w_1$$

quindi in questa base $A_{\mathbb{R}}$ si scrive in maniera diagonale a blocchi, ottenendo come visto

$$e(A_{\mathbb{R}}) = \left(\frac{-1}{2\pi}\right)^m \lambda_1\cdot\cdots\cdot\lambda_m$$

e quindi il risultato.

8. **Carattere di Chern. Classi di Todd, Hirzebruch e $\hat{A}$. Esempi**

Abbiamo definito le classi caratteristiche di un fibrato complesso o di un fibrato reale in termini di polinomi invarianti. Dato che le forme differenziali di grado $\ell > \dim M$ sono nulle, possiamo anche considerare serie di potenze formali (e invarianti), e calcolarle sulla matrice di curvatura; dalla nilpotenza della matrice di curvatura seguirà che lo sviluppo è di fatto finito. Alcune classi caratteristiche notevoli si definiscono appunto considerando funzioni analitiche G-invarianti in un intorno della matrice nulla di $\mathrm{Lie}(G)$, con G uguale ad uno dei gruppi di Lie matriciali considerati in precedenza.

8.1. **Carattere di Chern di un fibrato complesso con metrica hermitiana.**

Si tratta della classe caratteristica definita dalla serie $\mathrm{Tr}(e^A)$. Quindi,

$$\mathrm{Ch}(E) := \left[\mathrm{Tr}\exp\left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\Omega\right)\right] = \left[\sum_j \frac{\mathrm{Tr}\left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\Omega\right)^j}{j!}\right]$$

Dalla definizione di $\mathrm{Ch}(E)$ segue immediatamente che

$$\mathrm{Ch}(E \oplus F) = \mathrm{Ch}(E) + \mathrm{Ch}(F)$$

$$\mathrm{Ch}(E \otimes F) = \mathrm{Ch}(E) \wedge \mathrm{Ch}(F)$$

$$\overline{\mathrm{Ch}(E)} = \mathrm{Ch}(E) \quad \text{(e quindi} \quad \mathrm{Ch}(E) \in H^*(M, \mathbb{R}))$$

I primi termini della serie $\mathrm{Ch}(E)$ sono

$$\mathrm{Ch}(E) = k + c_1(E) + \frac{1}{2}\left(c_1(E)^2 - 2c_2(E)\right) + \dots$$

8.2. **La classe di Todd di un fibrato complesso con metrica hermitiana.**

Definiamo la serie di Todd come

$$\mathrm{Td}(A) := \det\left(\frac{A}{1 - e^{-A}}\right)$$

dove A è una matrice antihermitiana. In altri termini, $\mathrm{Td}(A) = \det\left(f(A)\right)$ con $f(A)$ la matrice definita per calcolo funzionale dalla funzione analitica $f(z) = z/(1 - e^{-z})$. Con queste notazioni, la classe di Todd di E è, per definizione,

$$\mathrm{Td}(E) := \left[\mathrm{Td}\left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\Omega\right)\right]$$

I primi termini della serie $\mathrm{Td}(E)$ sono

$$\mathrm{Td}(E) = 1 + \frac{1}{2}c_1(E) + \frac{1}{12}\left(c_1(E)^2 + c_2(E)\right) + \dots$$

Vale inoltre la seguente importante equazione

$$\mathrm{Td}(E \oplus F) = \mathrm{Td}(E) \wedge \mathrm{Td}(F)$$

In particolare, la classe di Todd è stabile: $\mathrm{Td}(E \oplus 1) = \mathrm{Td}(E)$. Per concludere, se M è una varietà complessa compatta e senza bordo, si pone

$$\mathrm{Td}(M) := \int_M \mathrm{Td}(T^{1,0}M)$$

dove $T^{1,0}M$ indica il fibrato tangente olomorfo di M. Il numero $\mathrm{Td}(M)$ prende il nome di *genere di Todd* della varietà. Vedremo come conseguenza del teorema dell'indice che $\mathrm{Td}(M)$ è un intero.

8.3. **La classe di Hirzebruch $L(E)$ di un fibrato reale riemanniano.**

Definiamo la serie di Hirzebruch come

$$L(A) := \left(\det\left(\frac{A}{\tanh\ A}\right)\right)^{1/2}$$

dove A è una matrice antisimmetrica. Questa risulta essere una serie di potenze $O(k)$-invariante in un intorno della matrice nulla di $\mathrm{Lie}\,O(k)$. Con queste notazioni, la classe di Hirzebruch di E è, per definizione,

$$L(E) := \left[L\left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\Omega\right)\right]$$

I primi termini della serie $L(E)$ sono

$$L(E) = 1 + \frac{1}{3}p_1(E) + \frac{1}{45}\left(-p_1(E)^2 + 7p_2(E)\right) + \dots$$

Vale inoltre

$$L(E \oplus F) = L(E) \wedge L(F)$$

e dunque, in particolare, la classe di Hirzebruch è stabile. Infine, la classe $L(TM)$ prende il nome di classe di Hirzebruch della varietà M mentre il numero

$$L(M) = \int_M L(TM)$$

è il genere-L della varietà.

8.4. **La classe $\hat{A}$ di un fibrato reale riemanniano.**

Definiamo la serie $\hat{A}$

$$\hat{A}(B) := \left(\det\left(\frac{B}{\sinh\ B}\right)\right)^{1/2}$$

dove B è una matrice antisimmetrica. Anche questa risulta essere una serie di potenze $O(k)$-invariante in un intorno della matrice nulla di $\mathrm{Lie}\,O(k)$. Con queste notazioni, la classe $\hat{A}$ di E è, per definizione,

$$\hat{A}(E) := \left[\hat{A}\left(\frac{\sqrt{-1}}{4\pi}\Omega\right)\right]$$

I primi termini della serie $\hat{A}(E)$ sono

$$\hat{A}(E) = 1 - \frac{1}{24}p_1(E) + \frac{1}{5760}\left(7p_1(E)^2 - 4p_2(E)\right) + \dots$$

Vale inoltre

$$\hat{A}(E \oplus F) = \hat{A}(E) \wedge \hat{A}(F)$$

e dunque, in particolare, la classe $\hat{A}$ è stabile. Al solito, la classe $\hat{A}(TM)$ prende il nome di classe $\hat{A}$ della varietà M. Il numero

$$\hat{A}(M) := \int_M \hat{A}(TM)$$

prende il nome di *genere* $\hat{A}$ della varietà.

8.5. **Fibrati olomorfi. Connessione complessa hermitiana.**

Sia M una varietà complessa e sia $E \to M$ un fibrato complesso olomorfo su M. Si osservi innanzitutto che risulta ben definito l'operatore

$$\bar{\partial} : C^\infty(M, \bigwedge^{p,q}(M) \otimes E) \longrightarrow C^\infty(M, \bigwedge^{p,q+1}(M) \otimes E).$$

Più precisamente, se $\{e_j\}$ è una base locale olomorfa di E, allora, per definizione:

$$\bar{\partial} : (\omega \otimes e_j) \longmapsto \bar{\partial}\omega \otimes e_j$$

dove $\omega \otimes e_j \in C^\infty(M, \bigwedge^{p,q}(M) \otimes E)$, se $\omega \in \bigwedge^{p,q}(M)$ (è facile vedere che la definizione non dipende dalla base olomorfa scelta).

In particolare esiste l'operatore $\bar{\partial} : C^\infty(M, E) \to C^\infty(M, \bigwedge^{0,1}(M) \otimes E)$. Si può dare allora la seguente

Definizione 13. Sia ∇ una connessione su E. Si dirà che ∇ è una **connessione complessa** se risulta:

$$\prod^{0,1} \nabla s = \bar{\partial} s, \qquad s \in C^\infty(M, E)$$

dove $\prod^{0,1} \nabla : C^\infty(M, \bigwedge^1(M) \otimes E) \to C^\infty(M, \bigwedge^{0,1}(M) \otimes E)$ è la proiezione della connessione ∇ sulla parte antiolomorfa di grado 1 delle sezioni a valori nel fibrato $\bigwedge^1(M) \otimes E$.

Osservazione. Rispetto ad una base olomorfa una connessione complessa ha forma di connessione di tipo $(1,0)$.

Vale il seguente risultato, analogo al teorema di Levi - Civita:

Proposizione 4. *Sia E un fibrato olomorfo. Data una metrica hermitiana su E esiste ed è unica la connessione complessa con essa compatibile (detta quindi connessione complessa hermitiana).*

Dimostrazione Mostriamo inizialmente l'unicità. Sia $\{e_i\}$ è una base locale olomorfa di E per l'aperto U ed $h = h_{ij} = h(e_i, e_j)$ una metrica su E. Allora vale per compatibilità:

$$d\, h_{ij} = (\omega_i^l e_l, e_j) + (e_i, \omega_j^k e_k) = \omega_i^l\, h_{lj} + \bar{\omega}_j^k h_{ik}. \tag{49}$$

Poichè si ha $\omega_i^l \in \bigwedge^{1,0}(U)$ dalla (49) segue:

$$d\, h_{ij} = \partial\, h_{ij} + \bar{\partial}\, h_{ij} = \omega_i^l\, h_{lj} + \bar{\omega}_j^k h_{ik} \tag{50}$$

dove il primo addendo nel termine a destra è una forma di tipo $(1,0)$ e il secondo di tipo $(0,1)$. Quindi dalla (50) si ottiene $\partial h_{ij} = \omega_i^l\, h_{lj}$, e la sua complessa coniugata , che si che si può riscrivere come:

$$\omega = \partial\, h\, h^{-1}. \tag{51}$$

Quindi la matrice di connessione è univocamente determinata. Infine, per ottenere l'esistenza, si verifica che la (51) definisce effettivamente una connessione come nell'enunciato. Basta utillizzare il fatto che le funzioni di transizione, che sono a valori unitari, sono olomorfe, i.e. $\overline{\partial} g_{\alpha\beta} = 0$ e quindi $dg_{\alpha\beta} = \partial g_{\alpha\beta}$; più precisamente, derivando rispetto a ∂ le condizioni di compatibilità per la metrica, $h_\alpha = g_{\alpha\beta} h_\beta \overline{g}_{\alpha\beta}$ e utilizzando $dg_{\alpha\beta} = \partial g_{\alpha\beta}$ si ottiene subito che

$$\partial h_\alpha h_\alpha^{-1} = dg_{\alpha\beta} g_{\alpha\beta}^{-1} + g_{\alpha\beta}(\partial h_\beta h_\beta^{-1}) g_{\alpha\beta}^{-1}$$

da cui la tesi.

Corollario 5. *Risulta in questo caso:*

$$\Omega = \bar{\partial}\omega$$

Dimostrazione Per quanto visto vale:

$$\partial\omega = \partial\,(\partial h h^{-1}) = \partial\, h\, \partial(h^{-1}) = -\partial h\, h^{-1} \wedge \partial h\, h^{-1} = -\omega \wedge \omega.$$

D'altro canto $\Omega = d\omega + \omega \wedge \omega = \partial\omega + \bar{\partial}\omega + \omega \wedge \omega$ quindi il risultato.

Osservazione. Ω è una forma di tipo $(1,1)$.

Esempio: fibrati in rette olomorfi. Si consideri in generale $L \to M$ un fibrato complesso olomorfo di rango 1. Su ogni aperto U_α la metrica è definita attraverso una singola funzione reale $h_\alpha > 0$, con $h_\alpha \in C^\infty(U_\alpha)$. Indicando con $g_{\alpha\beta}$ le funzioni di transizione su $U_\alpha \cap U_\beta$, vale $h_\alpha = |g_{\alpha\beta}|^2\, h_\beta$. Per quanto visto, si ha allora $\omega_\alpha = \partial h_\alpha\, h_\alpha^{-1} = \partial\, log\, h_\alpha$ da cui:

$$\Omega_\alpha \;=\; \bar{\partial}\,\partial\, log\, h_\alpha \;=\; -\,\partial\,\bar{\partial}\, log\, h_\alpha\,.$$

Esempio: le superfici di Riemann. Sia ora M una superficie di Riemann (ossia una varietà complessa di dimensione 1), allora $T^{1,0}M$ è un fibrato complesso olomorfo di rango 1, isomorfo sui reali a TM. Sia h una metrica hermitiana su $T^{1,0}M$. Sappiamo che la h definisce una metrica riemanniana su TM. Sia ∇ l'unica connessione complessa compatibile con la metrica. Per quanto visto, si ha per la prima classe di Chern:

$$\begin{aligned} c_1(T^{1,0}M, \nabla) \;&= \tfrac{1}{2\pi i}\,\partial\,\bar{\partial}\, log\, h = \tfrac{1}{2\pi i}\,\tfrac{\partial}{\partial\, z}\,\tfrac{\partial}{\partial\, \bar{z}}\, log\, h\, dz \wedge d\bar{z} = \\ &= \tfrac{1}{2\pi i}\,\tfrac{1}{4}\,\Delta\, log\, h\, dz \wedge d\bar{z} = \tfrac{1}{2\pi}\,(-\tfrac{1}{2h}\,\Delta\, log\, h)\,\tfrac{ih}{2}\, dz \wedge d\bar{z} = \\ &= \tfrac{1}{2\pi}\, K\, d\, vol_M \end{aligned}$$

dove K e $d\,vol_M$ sono la curvatura gaussiana e la forma di volume associate alla metrica riemanniana definita da h (per la formula sulla curvatura gaussiana si consulti ad esempio *Modern Geometry* di Doubrovine, Novikov, Fomenko; per la forma di volume si veda la (9)). Quindi vale:

$$c_1(T_{1,0}M) \;=\; \frac{1}{2\pi} K\, d\, vol_M$$

e, in particolare,

$$\int_M c_1(T_{1,0}M) \;=\; \frac{1}{2\pi} \int_M K\, d\, vol_M$$

e quindi, per il teorema di Gauss-Bonnet,

$$\int_M c_1(T_{1,0}M) \;=\; \chi(M) \;= 2 - 2g$$

dove g è il genere di M. In particolare $c_1(T_{1,0}M)$ non è esatta se $g \neq 1$. Dato che $(T^{1,0}M)_{\mathbb{R}} = TM$ otteniamo anche $e(TM) = c_1(T_{1,0}M)$. In particolare,

$$\int_M e(TM) \;=\; \int_M c_1(T_{1,0}M)$$

Esempio: la classe di Chern del fibrato universale Se $L \to \mathbb{C}P^1$ è il fibrato universale dello spazio proiettivo unidimensionale, vale:

$$\int_{\mathbb{C}P^1} c_1(L) \;=\; -1\,.$$

Per la verifica del risultato, si scriva $\mathbb{C}P^1 = \{[z_0, z_1] \in \mathbb{C}^2 \setminus 0\}$ e $U \cup V = \mathbb{C}P^1$ un suo ricoprimento tramite i due aperti $U = \{z_0 \neq 0\}$ e $V = \{z_1 \neq 0\}$. Su U e V si individuano due carte locali:

$$\begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ [z_0, z_1] & \longmapsto & z = \frac{z_1}{z_0} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ [v_0, v_1] & \longmapsto & v = \frac{v_0}{v_1} \end{array} .$$

Si ricordi che il fibrato $L \to \mathbb{C}P^1$ è definito come $L = \{([x], v) \in \mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}^2 : v = \lambda[x]\}$; una base locale è data per le due carte da:

$$s_U : \begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & L|_U \\ [z_0, z_1] & \longmapsto & ([z_0, z_1], (1, z)) , \end{array} \qquad s_V : \begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & L|_V \\ [v_0, v_1] & \longmapsto & ([v_0, v_1], (v, 1)) \end{array}$$

ossia in breve, $s_U : z \mapsto (z, (1, z))$ e $s_V : v \mapsto (v, (v, 1))$ rispettivamente. È facile verificare che queste due basi locali sono compatibili sull'intersezione; s_U e s_V costituiscono due basi locali olomorfe. La metrica indotta su L da $\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}^2$ è nei due casi:

$$\|s_U(z)\|^2 \;=\; 1 + z^2 \;=\; h(z) , \qquad \|s_V(v)\|^2 \;=\; 1 + v^2 \;=\; h(v) .$$

Sia ora ∇ l'unica connessione complessa compatibile con la metrica; allora

$$\omega_U = \partial h \cdot h^{-1} = \frac{\bar{z}}{(1 + |z|^2)}\, dz ,$$

da cui

$$\Omega_U \;=\; \bar{\partial}\omega \;=\; \frac{d\bar{z} \wedge dz}{(1 + |z|^2)^2} \;=\; \frac{2i dx \wedge dy}{(1 + |x|^2 + |y|^2)^2} .$$

Analogamente $\Omega_V = \frac{d\bar{v} \wedge dv}{(1+|v|^2)^2}$. Da queste si ha:

$$\begin{aligned} \textstyle\int_{\mathbb{C}P^1} c_1(L) \;&=\; \textstyle\int_{\mathbb{C}P^1} c_1(L, \nabla) = \int_U \frac{i}{2\pi}\, \Omega_U \;=\; \int_U \frac{-1}{\pi}\, \frac{dx \wedge dy}{(1+|x|^2+|y|^2)^2} \;= \\ &=\; -\frac{1}{\pi} \textstyle\int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{\rho\, d\rho d\, \theta}{(1+\rho^2)^2} \;=\; \frac{-1}{\pi} \cdot \pi \;=\; -1 \end{aligned}$$

quindi il risultato, che indica come $c_1(L)$ è chiusa ma non esatta, ossia come il fibrato L sia non banale.

9. **Coomologia a valori in un fascio.**

9.1. **Fasci e Prefasci.** Referenze: Warner [13], Sezioni 5.1 → 5.8

- Definizione di fascio $\mathcal{S} \xrightarrow{\pi} M$ di K-moduli, K un dominio a ideali principali.
- Definizione di sezione s su un aperto $U \subset M$. Notazione: $s \in \Gamma(U, \mathcal{S})$. Struttura di K-modulo di $\Gamma(U, \mathcal{S})$.
- Esempio: il fascio dei germi delle funzioni C^∞ di una varietà differenziabile. Notazione: $\mathcal{C}^\infty(M)$.
- Esempio: il fascio dei germi di funzioni olomorfe su una varietà complessa M. Notazione: $\mathcal{O}(M)$.
- Un fascio $\mathcal{S}$ non è necessariamente uno spazio di Hausdorff.
- Morfismi di fasci. Nucleo, immagine, quoziente. Successioni esatte corte.
- Prefasci.
- Prefascio $\alpha(\mathcal{S})$ delle sezioni di un fascio.
- Fascio $\beta(P)$ associato ad un prefascio.
- Prefasci completi. $\alpha(\beta(P))$. $\beta(\alpha(\mathcal{S}))$.

9.2. **Complessi di cocatene.** Referenze: [13], 5.16 e 5.17.

- Complessi di cocatene.
- Cocicli, cobordi. Coomologia di un complesso.
- Morfismi di complessi.
- Morfismi di complessi che sono omotopi inducono lo stesso morfismo in coomologia.
- Successioni esatte corte di complessi.
- Successione esatta lunga in coomologia associata ad una successione esatta corta di complessi. Omomorfismo di collegamento. Naturalità.

9.3. **Esempio: la successione di Mayer-Vietoris in coomologia di de Rham.** Referenze: Bott-Tu, Chapter I, Sez. 2, da p. 22 a p. 25.

9.4. **Coomologia a valori in un fascio.** Referenze: [13] p 200 e seguenti oppure Griffiths-Harris [3] p. 38 e seguenti.

- Motivazioni: Griffiths-Harris [3] p. 38.
- Definizione di coomologia valori in un fascio: $H^*(M, \mathcal{S})$ è il limite diretto di $H^*(\mathcal{U}, \mathcal{S})$.
- Teorema di Leray (per l'enunciato vedi [3] p. 40).
- Successione esatta lunga. Vedi [13] p. 203/204.
- Fasci fini. Esempi : germi di funzioni C^∞, germi di forme differenziali. [13] p. 170
- Fasci fini sono aciclici. [13] p. 202, intorno alla formula 14. In alternativa [3] p. 42.
- Risoluzioni. Wells [14] p. 58.
- Teorema delle risoluzioni acicliche. Morfismi di risoluzioni acicliche; naturalità. Wells [14] p. 59, 60.

9.5. **Esempi di risoluzioni acicliche.**

- risoluzione di de Rham ([13] p. 189, 190, 191). Se $\underline{\mathbb{R}}$ è il fascio costante allora la risoluzione di de Rham è
$$0 \to \underline{\mathbb{R}} \to \mathcal{C}^\infty(M, \Lambda^0(M)) \to \mathcal{C}^\infty(M, \Lambda^1(M)) \to \dots$$
(assumendo che ogni forma chiusa in $\mathbb{R}^n$, o nella palla unitaria in $\mathbb{R}^n$, è anche esatta (Lemma di Poincaré)). Denotiamo il fascio dei germi delle forme differenziali $\mathcal{C}^\infty(M, \Lambda^q(M))$ tramite

$\underline{\Omega}^q(M)$ e riscriviamo brevemente la risoluzione di de Rham come:

$$0 \to \underline{\mathbb{R}} \to \underline{\Omega}^*(M)$$

- risoluzione di Dolbeault; è una risoluzione del fascio dei germi delle funzioni olomorfe, $\mathcal{O}(M)$:
$$0 \to \mathcal{O}(M) \to \mathcal{C}^\infty(M, \Lambda^{0,0}(M)) \to \mathcal{C}^\infty(M, \Lambda^{0,1}(M)) \to \dots$$
(assumendo il Lemma di Poincaré per l'operatore $\overline{\partial}$). [3] p. 45. Denotiamo il fascio dei germi delle forme differenziali $\mathcal{C}^\infty(M, \Lambda^{p,q}(M))$ tramite $\underline{\Omega}^{p,q}(M)$. Quindi la risoluzione di Dolbeault può essere scritta brevemente come:
$$0 \to \mathcal{O}(M) \to \underline{\Omega}^{0,*}(M)$$
- risoluzione di Dolbeault del fascio delle p-forme olomorfe $\underline{\Omega}^p_{\mathcal{O}}(M)$
$$0 \to \underline{\Omega}^p_{\mathcal{O}}(M) \to \underline{\Omega}^{p,*}(M)$$
(assumendo il Lemma di Poincaré per l'operatore $\overline{\partial}$). [3] p. 45.
- il prefascio delle cocatene singolari ed il suo fascio associato $\mathcal{S}^*(M, \mathbb{R})$. $\mathcal{S}^*(M, \mathbb{R})$ è un fascio fine. [13] p. 191, 192, 193.
- definizione di coomologia singolare. [13] p. 196
- la risoluzione data dal fascio delle cocatene singolari
$$0 \to \underline{\mathbb{R}} \to \mathcal{S}^0(M, \mathbb{R}) \to \mathcal{S}^1(M, \mathbb{R}) \to \dots$$
[13] p. 194, 195
- la risoluzione data dal fascio delle cocatene singolari C^∞
$$0 \to \underline{\mathbb{R}} \to \mathcal{S}^0_\infty(M, \mathbb{R}) \to \mathcal{S}^1_\infty(M, \mathbb{R}) \to \dots$$
[13] p. 194, 195
- Teorema di de Rham: l'integrazione di forme sulle catene induce un morfismo di risoluzioni, da $0 \to \underline{\mathbb{R}} \to \underline{\Omega}^*(M)$ a $0 \to \underline{\mathbb{R}} \to \mathcal{S}^*_\infty(M, \mathbb{R})$, che induce a sua volta un isomorfismo
$$H^q(\Gamma(M, \underline{\Omega}^*(M)) = H^q(\Gamma(M, \mathcal{S}^*_\infty(M, \mathbb{R})).$$
Wells [14].
- Il membro a sinistra è isomorfo in maniera naturale a $H^q_{\mathrm{dR}}(M)$. [13] p. 190, 191.
- Il membro a destra è isomorfo $H^q(\Gamma(M, \mathcal{S}^*(M, \mathbb{R}))$ sempre perché c'è un morfismo naturale di risoluzioni.
- La coomologia $H^q(\Gamma(M, \mathcal{S}^*(M, \mathbb{R}))$ è isomorfa naturalmente alla coomologia singolare: infatti, c'è una morfismo naturale $S^*(M, \mathbb{R}) \xrightarrow{\gamma} \Gamma(M, \mathcal{S}^*_\infty(M, \mathbb{R}))$, $\gamma(\phi)(m) = \rho^M_m(\phi)$ e quindi una successione esatta
$$0 \to \mathrm{Ker}\gamma \to S^*(M, \mathbb{R}) \xrightarrow{\gamma} \Gamma(M, \mathcal{S}^*_\infty(M, \mathbb{R}))$$
Si dimostra che γ è suriettiva e che esiste quindi una successione esatta corta
$$0 \to \mathrm{Ker}\gamma \to S^*(M, \mathbb{R}) \xrightarrow{\gamma} \Gamma(M, \mathcal{S}^*_\infty(M, \mathbb{R})) \to 0$$
Infine, si dimostra che $\mathrm{Ker}\gamma$ è aciclico e che c'è quindi un isomorfismo
$$H^q(\Gamma(M, \mathcal{S}^*_\infty(M, \mathbb{R})) = H^q(S^*(M, \mathbb{R})) \equiv H^*(M, \mathbb{R})$$
(basta applicare la successione esatta lunga). Tutto ciò lo trovate in Warner [13] p. 196 $\to$ 200.
- Lemma di Poincare'. Invarianza omotopica della coomomologia di de Rham. Retratti di deformazione. Bott-Tu, p. 34 $\to$ 36.

- Preliminari al Lemma di Poincaré per l'operatore $\overline{\partial}$: formula di Cauchy e applicazioni. Griffiths-Harris [3] p. 2, 3.
- $\overline{\partial}$-Poincaré Lemma in dimensione 1: Griffiths-Harris [3] p. 5.
- $\overline{\partial}$-Poincaré Lemma: Griffiths-Harris [3] p. 25, 26, 27.
- Isomorfismo di Dolbeault: se M è una varietà complessa allora $H^q(M, \underline{\Omega}^p_{\mathcal{O}}) \simeq H^{p,q}_{\overline{\partial}}(M)$ (per noi è conseguenza diretta del $\overline{\partial}$-Poincaré Lemma, perché quest'ultimo ci dice che la risoluzione di Dolbeault $0 \to \underline{\Omega}^p_{\mathcal{O}}(M) \to \underline{\Omega}^{p,*}(M)$ è aciclica.

9.6. **Operatore $*$ di Hodge.**
- Su varietà reali: Warner p. 200
- Su varietà complesse: Griffiths-Harris [3] p. 82

9.7. **Ancora sulle varietà di Kahler.**
- Metrica di Fubini-Study: Griffiths-Harris [3] 30
- Sottovarietà complesse di varietà di Kahler sono di Kahler: Griffiths-Harris [3] p. 29.
- Varietà proiettive : sono quindi di Kahler.
- Teorema di Wirtinger: Griffiths-Harris [3] p. 31

10. Operatori Pseudodifferenziali.

10.1. Trasformata di Fourier. (Lawson-Michelson [6], p. 171).

Denotiamo con $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ un multi-indice. Poniamo

$$|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n\,, \quad \alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_n! \quad \text{e} \quad x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}.$$

Utilizzeremo la notazione

$$D^\alpha = (\frac{1}{\sqrt{-1}})^{|\alpha|} \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}\,.$$

Sia $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset C^\infty(\mathbb{R}^n)$ lo spazio delle funzioni a decrescenza rapida; è un'algebra commutativa rispetto al prodotto dato dalla convoluzione di due funzioni

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy = (g * f)(x).$$

Vi ricordo anche che $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ è uno spazio di Fréchet con seminorme definite da

$$p_{\alpha,\beta}(f) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\beta D^\alpha f|$$

e che $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ è denso in $L^2(\mathbb{R}^n)$.
Sia $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$; la sua trasformata di Fourier, $\mathcal{F}(f) \equiv \hat{f}$, è la funzione

$$\hat{f}(\xi) := \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i<x,\xi>} f(x)dx \tag{52}$$

È immediato verificare che $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$; otteniamo in questo modo un'applicazione lineare

$$\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Teorema 9. *La trasformata di Fourier $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ è un isomorfismo di spazi di Fréchet con inversa data da*

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i<x,\xi>} \hat{f}(\xi)d\xi \tag{53}$$

Per ogni multi-indice α

$$\xi^\alpha \hat{f} = \widehat{(D_x^\alpha f)}. \tag{54}$$

Inoltre

$$\widehat{f * g} = \hat{f}\hat{g}\,, \quad \widehat{fg} = \hat{f} * \hat{g} \tag{55}$$

Vale, infine, la formula di Plancharel:

$$(f, g)_{L^2} = (\hat{f}, \hat{g})_{L^2} \tag{56}$$

$\mathcal{F}$ si estende quindi ad un isomorfismo di $L^2(\mathbb{R}^n)$ che è una isometria.

10.2. **Spazi di Sobolev.** (Lawson-Michelson [6], p. 171, 172, 173, 174)

Sia $s \in \mathbb{R}$; la norma di Sobolev di ordine s di una funzione $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ è data da

$$\|f\|_s^2 := \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|)^{2s} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \ .$$

Si ottiene una norma equivalente sostituendo al posto di $(1+|\xi|)^{2s}$ l' espressione $(1+|\xi|^2)^s$. Se $s = k \in \mathbb{N}$ allora possiamo ulteriormente sostituire a $(1+|\xi|^2)^s$ l'espressione $\sum_{|\alpha|\le k} |\xi^\alpha|^2$. Utilizzando quest'ultima espressione e le proprietà della trasformata di Fourier scopriamo che una norma equivalente a quella data, sempre nel caso $s = k \in \mathbb{N}$, è

$$\|f\|_k^2 = \sum_{|\alpha|\le k} \int_{\mathbb{R}^n} |D_x^\alpha f|^2 dx \,.$$

La norma C^k di una funzione $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ è data da

$$\|f\|_{C^k}^2 = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \sum_{|\alpha|\le k} |D^\alpha f|^2 \,.$$

Definizione 14. Lo spazio di Sobolev di ordine s è il completamento di $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ rispetto alla norma $\| \, \|_s$.

Gli spazi di Sobolev sono spazi L^2 ma con una misura diversa da quella di Lebesgue. Notazioni equivalenti per questi spazi di Hilbert sono le seguenti: $L_s^2(\mathbb{R}^n)$ oppure $W^{s,2}(\mathbb{R}^n)$.
I seguenti risultati, dimostrati in dettaglio a lezione, riassumono alcune proprietà fondamentali degli spazi di Sobolev.

Lemma 4. (Lemma di Sobolev.) Sia $k \in \mathbb{N}$ e sia $s > k + n/2$. Se $f \in H_s(\mathbb{R}^n)$ allora $f \in C^k(\mathbb{R}^n)$ e $\|f\|_{C^k} \le C\|f\|_s$.

Se $s > t$ allora $(1+|\xi|^2)^s \ge (1+|\xi|^t)^2$ e quindi $\|f\|_s \ge \|f\|_t$. Ne segue che $H_s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H_t(\mathbb{R}^n)$.

Lemma 5. (Lemma di Rellich.) Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ con supporto contenuto in un compatto $K \subset \mathbb{R}^n$. Sia $s > t$ e supponiamo che $\exists C \mid \ \|f_n\|_s \le C \ \forall n$. Allora esiste una sottosuccessione $\{f_{n_k}\}$ che converge in $H_t(\mathbb{R}^n)$.

Consideriamo, infine, l'applicazione $\mathcal{S} \times \mathcal{S} \longrightarrow \mathbb{C}$ definita da

$$f, g \longrightarrow |(f,g)_{L^2}|.$$

Quest'applicazione si estende ad un'applicazione bilineare

$$H_s(\mathbb{R}^n) \times H_{-s}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{C}$$

che identifica $H_{-s}(\mathbb{R}^n)$ con il duale di $H_s(\mathbb{R}^n)$.

10.3. **Operatori pseudodifferenziali (teoria locale).** (Lawson-Michelson [6], p. 177 → 182, senza dim. Theorem 3.5 e fino ad Oss. 3.6 compresa.)

Sia $P = \sum_{|\alpha|\leq k} a_\alpha(x) D_x^\alpha$, $a_\alpha \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, un operatore differenziale di ordine k. Il *simbolo* di P è la funzione $\sigma(P) \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ definita da

$$\sigma(P)(x,\xi) = \sum_{|\alpha|\leq k} a_\alpha(x)\xi^\alpha$$

Per semplificare la notazione spesso scriveremo semplicemente $p(x,\xi)$ al posto di $\sigma(P)(x,\xi)$. Il *simbolo principale* di P è la funzione

$$\sigma_{\mathrm{pr}}(P)(x,\xi) = \sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(x)\xi^\alpha.$$

Possiamo fare uso delle proprietà della trasformata di Fourier viste nella lezione precedente e scrivere $\forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$(Pf)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i<x,\xi>} p(x,\xi)\hat{f}(\xi) \frac{d\xi}{(2\pi)^{n/2}}\,. \tag{57}$$

Sappiamo dal teorema fondamentale del calcolo che l'inverso di un operatore differenziale (invertibile) non è più un operatore differenziale; la nozione di *operatore pseudodifferenziale* permette di definire un'algebra di operatori che contiene gli operatori differenziali e, se definiti, i loro inversi, le loro potenze complesse etc. L'idea, molto semplice, è quella di sostituire al posto delle funzione $p(x,\xi)$ che compare in (57), e che è ovviamente una funzione polinomiale in ξ, una funzione più generale ma con specifiche proprietà asintotiche in ξ; per analogia con il caso differenziale una tale funzione è detta un *simbolo*. La trattazione che segue tende a minimizzare l'uso delle distribuzioni ed è particolarmente adatta all'estensione che ne daremo alle varietà *compatte*.

10.4. **Spazio dei simboli. Definizione di operatore pseudodifferenziale di ordine m.**

Definizione 15. Lo spazio dei simboli di ordine m, $S^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ è definito come lo spazio vettoriale delle funzioni $p(x,\xi) \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ verificanti la seguente proprietà: $\forall \alpha, \beta\ \exists\, C_{\alpha,\beta}$ tale che

$$|D_x^\alpha D_\xi^\beta p(x,\xi)| \leq C_{\alpha,\beta}(1+|\xi|)^{m-|\beta|} \tag{58}$$

Notazione. Poniamo

$$S^{-\infty}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n) := \cap_m S^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n) \quad \text{e} \quad S^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n) := \cup_m S^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n).$$

Scriveremo spesso S^m al posto di $S^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$.

Definizione 16. L'operatore pseudodifferenziale associato al simbolo $p(x,\xi) \in S^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ è l'operatore $p(x,D)$ definito dalla formula

$$(p(x,D)f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i<x,\xi>} p(x,\xi)\hat{f}(\xi) \frac{d\xi}{(2\pi)^{n/2}}\,;\ f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \tag{59}$$

Non è difficile verificare che $p(x,D)$ manda $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Denotiamo con $\Psi^m(\mathbb{R}^n)$, o più semplicemente con Ψ^m, lo spazio vettoriale di tutti gli operatori pseudodifferenziali di ordine m. Se $P \in \Psi^m$ denoteremo il simbolo di P con $\sigma(P)$ oppure con p. Abbiamo il seguente importante risultato:

Teorema 10. *Se $P \in \Psi^m(\mathbb{R}^n)$ e se il simbolo di P ha supporto compatto in x, allora $\forall s \in \mathbb{R}$ l'operatore P si estende ad un operatore continuo $P : H_s(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H_{s-m}(\mathbb{R}^n)$.*

Per una dimostrazione vi rimando a [6].

Da ora in poi, se non specificato diversamente, i nostri simboli hanno supporto compatto in x. Se necessario denoteremo con P_s l'estensione di P a H_s. Se $P \in \Psi^{-m}$, $m > 0$ allora $P : H_s(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H_{s+m}(\mathbb{R}^n)$. Tenendo presente il Lemma di Sobolev, questo vuol dire che operatori di ordine negativo regolarizzano. In particolare se $P = p(x, D)$ con $p(x, \xi) \in S^{-\infty}$, allora $P : H_s \to H_t$ $\forall s, t$. Per il Lemma di Sobolev $P : H_s \to C^\infty$ $\forall s$. Un tale operatore è detto **infinitamente regolarizzante** o anche semplicemente regolarizzante.

Diremo che due simboli p e q sono *equivalenti*, e scriveremo $p \sim q$, se $p - q \in S^{-\infty}$. Diremo che due operatori P e Q sono *equivalenti*, e scriveremo $P \sim Q$, se $P - Q$ è un operatore regolarizzante. Se $P - Q = R$ con $R = r(x, D)$ e $r \in S^{-\infty}$ allora abbiamo visto che $P \sim Q$.

Definizione 17. Sia $p \in S^\infty$. Diremo che p ha sviluppo asintotico uguale a $\sum p_j$ e scriveremo $p \sim \sum p_j$ se $\forall d \in \mathbb{N}$ $\exists k(d)$ tale che $\forall k \geq k(d)$

$$p - \sum_{j \leq k} p_j \in S^{-d}.$$

In parole, a patto di prendere k abbastanza grande, la differenza $p - \sum_{j \leq k} p_j$ definisce un operatore di ordine arbitrariamente negativo e quindi un operatore arbitrariamente regolarizzante.

Il seguente importante lemma ci permetterà di costruire operatori pseudodifferenziali con specifiche proprietà

Lemma 6. (Completezza Asintotica). Sia $p_j \in S^{d_j}$, $d_j \to -\infty$. Allora esiste $p \in S^\infty$ tale che $p \sim \sum p_j$.

10.5. **Lemma di Kuranishi.**

Il seguente lemma tecnico riveste un'importanza fondamentale nello sviluppo del calcolo pseudodifferenziale. Gli elementi di volume negli integrali sono intesi normalizzati, e cioè divisi per il fattore $(2\pi)^{n/2}$ come in (57).

Lemma 7. (Lemma di Kuranishi) Sia $d \in \mathbb{R}$ e sia $a(x, y, \xi) \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ un simbolo in 2+1=3 variabili. Supponiamo che $a(x, y, \xi)$ abbia supporto compatto nella variabili x e y; per ipotesi $\forall \alpha, \beta, \gamma$ $\exists C_{\alpha,\beta,\gamma}$ tale che

$$|D_x^\alpha D_y^\beta D_\xi^\gamma a(x, y, \xi)| \leq C_{\alpha,\beta,\gamma}(1 + |\xi|)^{d-|\gamma|}.$$

Consideriamo l'operatore lineare $A : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ definito dall'integrale iterato

$$(Af)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i<x-y,\xi>} a(x, y, \xi) f(y) dy d\xi.$$

Allora $A \in \Psi^d(\mathbb{R}^n)$ ed il simbolo $\sigma(A)$ di A ha uno sviluppo asintotico

$$\sigma(A)(x, \xi) \sim \sum_\alpha \frac{i^{|\alpha|}}{\alpha!} (D_\xi^\alpha D_y^\alpha a)(x, y, \xi)_{|x=y} \tag{60}$$

Abbiamo i seguenti corollari del Lemma di Kuranishi:

1. Innanzitutto, se $a(x, y, \xi) \equiv 0$ in un intorno U della diagonale $\Delta \subset \mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_y^n$ allora $A \in \Psi^{-\infty}$ (perché è definito da un simbolo in $S^{-\infty}$).

2. Se $K(x, y) \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ ha supporto compatto allora l'operatore

$$P_K(f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x, y) u(y) dy$$

definisce un operatore $P_K \in \Psi^{-\infty}$. Gli operatori integrali con nucleo C^∞ sono quindi operatori pseudodifferenziali infinitamente regolarizzanti.

3. Se nell'enunciato del Lemma $d < -n - k$ allora l'integrale

$$K(x,y) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i<x-y,\xi>} a(x,y,\xi) d\xi$$

definisce una funzione $C^k(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ (esercizio) e si ha

$$Af(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x,y) f(y) dy.$$

K è detto nucleo di Schwartz di A. Se in particolare $d = -\infty$ allora il nucleo di Schwartz è C^∞ e $A \in \Psi^{-\infty}$. (Per d arbitrario il nucleo di Schwartz è ancora definito come *distribuzione*.)

4. Un operatore è detto ϵ-locale se $\forall u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ $\mathrm{supp}(Au) \subset \{x \mid d(x, \mathrm{supp} u) < \epsilon\}$. Se $P \in \Psi^d$ allora $P \sim P_\epsilon$ con P_ϵ un operatore in Ψ^d che è ϵ-locale. Osserviamo che un operatore ϵ-locale manda C_c^∞ in C_c^∞.

5. Se $\chi_1, \chi_2 \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $P \in \Psi^d$ allora anche l'operatore $\widetilde{P}$ definito da $\widetilde{P}(f) := \chi_1 P(\chi_2 f)$ è un operatore in Ψ^d.

6. (Pseudolocalità.)

A differenza degli operatori differenziali gli operatori pseudodifferenziali non conservano il supporto di una funzione. Basta pensare al caso di un operatore integrale con nucleo C^∞. Si dice anche che gli operatori pseudodifferenziali non sono *locali*: essi godono però di una proprietà più debole, detta pseudolocalità. Vediamo di cosa si tratta. Sia $P \in \Psi^d$ e sia $u \in H_s$, $s \geq 0$. Supponiamo che in un aperto $V \subset \mathbb{R}^n$ si abbia $u_{|V} \in C^\infty$; *allora* $Pu_{|V} \in C^\infty$. Nel linguaggio delle distribuzioni questo vuol dire che P conserva il supporto singolare.

10.6. **Composizione. Aggiunto formale.**

Sia $P \in \Psi^d$. Diremo che P ha supporto contenuto nel compatto $K \subset \mathbb{R}^n$ se
(i) $\mathrm{supp} Pf \subset K$ $\forall f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$
(ii) $\mathrm{supp} u \cap K = \emptyset \Longrightarrow Pu = 0$.

Denotiamo con Ψ_K^d il sottospazio degli operatori a supporto in K. Il Lemma di Kuranishi viene anche e soprattutto utilizzato per dimostrare i suguenti due teoremi fondamentali. Il primo afferma che lo spazio vettoriale $\Psi_K^* := \cup_d \Psi_K^d$ ha una struttura di algebra.

Teorema 11. *Sia $P = p(x,D) \in \Psi_K^d$ e $Q = q(x,D) \in \Psi_K^{d'}$. Allora $P \circ Q \in \Psi_K^{d+d'}$ e*

$$\sigma(P \circ Q) \sim \sum_\alpha \frac{i^{|\alpha|}}{\alpha!} (D_\xi^\alpha p)(D_x^\alpha q)\,. \tag{61}$$

Il secondo risultato afferma che esiste una naturale involuzione in Ψ_K^d:

Teorema 12. *Sia $P = p(x,D) \in \Psi_K^d$. Allora esiste un unico operatore P^*, detto aggiunto formale di P, tale che*

$$(Pf, g)_{L^2} = (f, P^* g)_{L^2}\,, \quad \forall f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \text{ e con supporto in } K\,.$$

Si ha inoltre

$$P^* \in \Psi_K^d \quad e \quad \sigma(P^*) \sim \sum_\alpha \frac{i^{|\alpha|}}{\alpha!} (D_\xi^\alpha D_x^\alpha \overline{p})\,. \tag{62}$$

Osservazione.
Fino ad ora abbiamo lavorato in $\mathbb{R}^n$; se $U \subset \mathbb{R}^n$ è un aperto di $\mathbb{R}^n$allora è chiaro che è ancora ben definito lo spazio dei simboli $S^d(U \times \mathbb{R}^n)$ e lo spazio vettoriale $\Psi^d(U)$. Tenendo presente la teoria globale che stiamo per sviluppare, possiamo denotare lo spazio dei simboli tramite $S^d(T^*U)$ con $T^*U = U \times \mathbb{R}^n$ lo spazio cotangente. Possiamo anche definire $\Psi^*_K(U)$ con K sottoinsieme compatto di U. I due teoremi appena enunciati si estendono senza difficoltà.

Più in generale, sia $U \subset \mathbb{R}^n$ aperto e consideriamo l'insieme $\tilde{S}^m(U \times \mathbb{R}^n)$ costituito da tutte le funzioni $p(x, \xi) \in C^\infty(U \times \mathbb{R}^n)$ tali che per ogni compatto $K \subset U$, $\forall \alpha, \forall \beta, \exists\, C_{K,\alpha,\beta}$ tale che

$$|D^\alpha_x D^\beta_\xi p(x, \xi)| \leq C_{K,\alpha,\beta}(1 + |\xi|)^{m-|\beta|} \quad x \in K, \xi \in \mathbb{R}^n \tag{63}$$

In altre parole, non richiediamo che p abbia x-supporto compatto ma richiediamo una stima su ogni compatto di U. Sia $u \in C^\infty_c(U)$; definiamo

$$Pu(x) := \int_{\mathbb{R}^n} p(x, \xi)\hat{u}(\xi)e^{i<x,\xi>}d\xi$$

Un tale operatore P definisce un operatore lineare

$$P : C^\infty_c(U) \to C^\infty(U)$$

(sarà un esercizio per casa). Se P è ϵ-locale allora $P : C^\infty_c(U) \to C^\infty_c(U)$. Vale in questo caso un risultato leggermente più generale per la composizione (non introduciamo nuove notazioni per questi operatori):

Teorema 13. *Se $P = p(x, D) \in \Psi^d$ è ϵ-locale e $Q = q(x, D) \in \Psi^{d'}$ è ϵ'-locale allora $P \circ Q$ è un operatore in $\Psi^{d+d'}$ ed è $(\epsilon + \epsilon')$-locale.*

Definizione 18. Il simbolo principale di un operatore pseudodifferenziale di ordine m, $P = p(x, D) \in \Psi^d(U)$ è la classe $[p] \in S^m/S^{m-1}$. Denotiamo il simbolo principale con $\sigma_{\mathrm{pr}}(P)$.

Supponiamo ora che $\phi : U \to V$ sia un diffeomorfismo fra due aperti di $\mathbb{R}^n$. Sia $P \in \Psi^d_K(U)$. Definiamo un operatore $\phi_*P : C^\infty_c(V) \to C^\infty_c(V)$ come segue:

$$((\phi_*P)f)(y) = (P(f \circ \phi)(\phi^{-1}(y)) \,.$$

Il seguente teorema ci permetterà di globalizzare i risultati locali alle varietà differenziabili.

Teorema 14. *$\phi_*P \in \Psi^d_{\phi(K)}(V)$ e per il simbolo principale $\sigma_{\mathrm{pr}}(\phi_*P)$ si ha*

$$\sigma_{\mathrm{pr}}(\phi_*P)(y, \eta) = \sigma_{\mathrm{pr}}(P)(\phi_1(y), J(y)\eta) \tag{64}$$

con $\phi_1 = \phi^{-1}$ e $J(y) = ((\phi_1'(y))^{-1})^t$.

Riassumendo: se denotiamo con $(\ )^*$ il passaggio all'aggiunto formale e se $\phi : U \to V$ è un diffeomorfismo allora

$$\Psi^d_K(U) \circ \Psi^{d'}_K(U) \subset \Psi^{d+d'}_K(U)\,; \quad (\ )^* : \Psi^d_K(U) \to \Psi^d_K(U)\,; \quad \phi_* : \Psi^d_K(U) \to \Psi^d_{\phi(K)}(V) \tag{65}$$

e dalle formule (61), (62), (14) deduciamo che per i simboli principali valgono le seguenti notevoli formule:

$$\sigma_{\mathrm{pr}}(P \circ Q) = \sigma_{\mathrm{pr}}(P)\,\sigma_{\mathrm{pr}}(Q) \qquad \sigma_{\mathrm{pr}}(P^*) = \overline{\sigma_{\mathrm{pr}}(P)}\,, \tag{66}$$

$$\sigma_{\mathrm{pr}}(\phi_*P)(y, \eta) = \sigma_{\mathrm{pr}}(P)(\phi_1(y), J(y)\eta) \tag{67}$$

con $\phi_1 = \phi^{-1}$ e $J(y) = ((\phi_1'(y))^{-1})^t$.

Quanto appena visto può essere generalizzato senza difficoltà ad operatori che agiscono su funzioni a valori vettoriali. Tenendo presente che dovremo fra poco generalizzare ad operatori che agiscono su sezioni di fibrati vettoriali su varietà differenziabili, adottiamo qui una notazione un pò artificiale.
Sia quindi U un aperto di $\mathbb{R}^n$ e sia $\mathbf{I}^k \to U$ il fibrato banale $\mathbf{I}^k \equiv U \times \mathbb{C}^k \to U$. Le sezioni di $\mathbf{I}^k \to U$ sono le funzioni a valori in $\mathbb{C}^k$. Analogamente le funzioni a valori matrici in $\mathcal{M}_{k\times\ell}(\mathbb{C})$ sono le sezioni del fibrato banale $\mathrm{Hom}(\mathbf{I}^k, \mathbf{I}^\ell)$. $C^\infty(U, \mathbf{I}^k)$ sono le funzioni vettoriali che sono C^∞.
Un operatore pseudodifferenziale di ordine d, $P : C_c^\infty(U, \mathbf{I}^k) \longrightarrow C^\infty(U, \mathbf{I}^\ell)$, è definito da un simbolo $p(x, \xi)$ con $p(\, , \,) \in C^\infty(T^*U, \mathrm{Hom}(\pi^*\mathbf{I}^k, \pi^*\mathbf{I}^\ell))$, $\pi : T^*U \to U$, $p(\, , \,) = (p_{ij}(\, , \,))$ ed almeno un elemento della matrice ha ordine d. Per definizione $P = (p_{ij}(x, D))$. Denotiamo questo spazio di operatori con $\Psi^*(U, \mathbf{I}^k, \mathbf{I}^\ell)$. I risultati appena dimostrati valgono ancora per questi operatori. Per quel che concerne P^*; esso è definito tramite i prodotti scalari L^2

$$\int_U < f(x), g(x) > dx \, , \qquad f, g \in C_c^\infty(U, \mathbf{I}^j)$$

con $< \, , >$ uguale al prodotto hermitiano canonico in $\mathbb{C}^j$. Si ha ancora

$$\sigma(P^*) \sim \sum_\alpha \frac{i^{|\alpha|}}{\alpha!} (D_\xi^\alpha D_x^\alpha (\overline{p})^t) \tag{68}$$

con $(\,)^t$ che denota la trasposta della matrice.

11. Teoria globale. Proprietà di Fredholm. Indice

11.1. Operatori su varietà. Fibrati vettoriali.

Sia M una varietà differenziabile di dimensione n. Per semplicità supporremo direttamente M compatta e orientabile, anche se molte definizioni si estendono senza difficoltà al caso generale. Fissiamo una metrica riemanniana g su M e denotiamo con dg la forma di volume associata.

Abbiamo definito gli spazi di Sobolev $H_s(\mathbb{R}^n)$. Possiamo definire in maniera analoga spazi di Sobolev per funzioni a valori in $\mathbb{C}^k$, una volta fissata la metrica hermitiana standard di $\mathbb{C}^n$; denotiamo questi spazi di Hilbert con $H_s(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^k)$. Sia ora M una varietà differenziabile compatta e sia $\{\phi_j\}$ una partizione dell'unità subordinata ad un ricoprimento di M tramite carte locali $(\mathcal{O}_j, \kappa_j : \mathcal{O}_j \to U_j)$. La norma di Sobolev di $f \in C^\infty(M)$ è per definizione

$$\|f\|_s : \sum_j \|\kappa_1^*(f\phi_j)\|_s \quad \text{dove} \quad \kappa_1 = \kappa^{-1} \, .$$

Questa norma dipende dalle scelte fatte; tuttavia scelte diverse danno norme equivalenti. $H_s(M)$ è per definizione il completamento di $C^\infty(M)$ rispetto a questa norma.

Sia ora $P : C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M)$ un operatore lineare. Diremo che P è regolarizzante se P si estende ad un operatore limitato $H_s(M) \to H_t(M)$ per ogni s ed ogni t. Sia $P : C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M)$ un operatore lineare. Sia $(\mathcal{O}, \kappa : \mathcal{O} \longrightarrow U \subset \mathbb{R}^n)$ una carta locale e sia $\kappa_1 = \kappa^{-1}$. Abbiamo due applicazioni naturali, di inclusione e di restrizione:

$$i_\mathcal{O} : C_c^\infty(\mathcal{O}) \longrightarrow C^\infty(M) \, , \qquad r_\mathcal{O} : C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(\mathcal{O}) \, .$$

L'inclusione è data estendendo una funzione uguale a zero fuori dal suo supporto. Sia

$$P_\mathcal{O} = r_\mathcal{O} \circ A \circ i_\mathcal{O} \, , \qquad P_\mathcal{O} : C_c^\infty(\mathcal{O}) \longrightarrow C^\infty(\mathcal{O})$$

e sia $P_U : C_c^\infty(U) \to C^\infty(U)$ l'operatore lineare definito dalla seguente composizione

$$C_c^\infty(U) \xrightarrow{\kappa^*} C_c^\infty(\mathcal{O}) \xrightarrow{P_\mathcal{O}} C^\infty(\mathcal{O}) \xrightarrow{\kappa_1^*} C^\infty(U)$$

Definizione 19. Diremo che l'operatore lineare $P : C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M)$ appartiene a $\Psi^d(M)$, lo spazio degli operatori pseudodifferenziali di ordine d, se per ogni carta locale $(\mathcal{O}, \kappa : \mathcal{O} \longrightarrow U \subset \mathbb{R}^n)$ l'operatore indotto P_U è in $\Psi^d(U)$. La definizione è ben posta grazie al teorema (14).

Osservazione. Analogamente, passando a carte locali, possiamo definire lo spazio vettoriale degli operatori differenziali di ordine d $\mathrm{Diff}^d(M)$ su M; è ovvio che

$$\mathrm{Diff}^d(M) \subset \Psi^d(M) \, .$$

Sia $P \in \Psi^d(M)$ e sia $x \in \mathcal{O} \subset M$; definiamo il simbolo principale di P calcolato in $\sum \xi^j d\kappa_j(x) \in T_x^*M$ come il simbolo pricipale di A_U calcolato in $(\kappa(x), \xi) \in T^*U$. Uno degli esercizi per casa consiste nel verificare che il simbolo principale di P è globalmente definito come funzione C^∞ su T^*M: $\sigma_{\mathrm{pr}}(P) \in C^\infty(T^*M)$.

Siano ora $E \to M$ e $F \to M$ due fibrati vettoriali su M, di rango k ed ℓ rispettivamente. Passando a banalizzazioni locali su carte locali e tenendo presente quanto detto alla fine della lezione precedente, possiamo definire in maniera analoga lo spazio $\Psi^d(M; E, F)$ degli operatori lineari

$$P : C^\infty(M, E) \longrightarrow C^\infty(M, F)$$

che sono pseudodifferenziali di ordine d. Occorrerà richiedere che per ogni banalizzazione locale di E e di F su $\mathcal{O}$ l'operatore indotto P_U sia in $\Psi^d(U; \mathbf{I}^k, \mathbf{I}^\ell)$. Non è difficile dimostrare (ma è un minimo laborioso) che se $P \in \Psi^d(M; E, F)$ allora è ben definito il simbolo principale di P che è una sezione del fibrato $\mathrm{Hom}(\pi^* E, \pi^* F) \longrightarrow T^*M$ con $\pi : T^*M \to M$:

$$\sigma_{\mathrm{pr}}(P) \in C^\infty(T^*M, \mathrm{Hom}(\pi^*E, \pi^*F))\,. \tag{69}$$

La stessa definizione ci permette di definire lo spazio $\mathrm{Diff}^d(M; E, F)$. Classici esempi di operatori differenziali su varietà differenziabili sono l'operatore di differenziazione esterna $d : \Omega^k(M) \equiv C^\infty(M, \Lambda^k(T^M)) \longrightarrow \Omega^{k+1}(M) = C^\infty(M, \Lambda^{k+1}(T^*M))$ oppure l'operatore di derivazione covariante lungo un campo vettoriale X: $\nabla_X : C^\infty(M, TM) \longrightarrow C^\infty(M, TM)$. Vedremo altri notevoli esempi fra un paio di lezioni. L'esercizio è semplice ed utilizza (67).

11.2. **Operatori pseudodifferenziali classici. Spazi di Sobolev.**

Per le applicazioni alla geometria è comodo restringersi ad una sottoclasse di operatori pseudodifferenziali, gli operatori pseudodifferenziali *classici.*

Sia $U \subset \mathbb{R}^n$ un aperto; lo spazio dei *simboli classici* di ordine d, $S^d_{\mathrm{cl}}(U \times \mathbb{R}^n)$ è definito come il sottospazio vettoriale di $S^d(U \times \mathbb{R}^n)$ costituito dai simboli che hanno un'espansione asintotica

$$p \sim \sum_{j\geq 0} p_j \qquad \text{con } p_j \text{ omogenea di grado } d - j \text{ per } |\xi| \geq C$$

Lo spazio $\Psi^d_{\mathrm{cl}}(U)$ è definito usando questi particolari simboli.
Utilizzando carte locali possiamo anche definire $\Psi^d_{\mathrm{cl}}(M)$ per M una varietà riemanniana M ed è chiaro che se $P \in \Psi^d_{\mathrm{cl}}(M)$ allora $\sigma_{\mathrm{pr}}(P)$ è una funzione che è omogenea di grado d nelle fibre di T^*M (per $|\xi| \geq C$). Infine, se E ed F sono due fibrati vettoriali allora è ben definito $\Psi^d_{\mathrm{cl}}(M; E, F)$ e se $\omega \in T^*_x M$, $|\omega| > C$, e $\lambda > 0$ allora

$$\sigma_{\mathrm{pr}}(P)(\lambda\omega) = \lambda^d\, \sigma_{\mathrm{pr}}(P)(\omega) \quad \text{in} \quad \mathrm{Hom}(E_x, F_x) \tag{70}$$

È ovvio che

$$\mathrm{Diff}^d(M; E, F) \subset \Psi^d_{\mathrm{cl}}(M; E, F) \subset \Psi^d(M; E, F).$$

Se $E \to M$ è un fibrato vettoriale con metrica hermitiana allora possiamo analogamente definire $H_s(M, E)$. Per gli spazi di Sobolev $H_s(M, E)$ valgono il Lemma di Sobolev ed il Lemma di Rellich (senza ipotesi sul supporto dato che M è compatta). Il Lemma di Rellich può essere rienunciato come segue: *se $s > t$ l'inclusione $H_s(M, E) \hookrightarrow H_t(M, E)$ è un* **operatore compatto**. [14]

Passando a carte locali non è difficile dimostrare, a partire dal risultato locale, che $P \in \Psi^d_{\mathrm{cl}}(M; E, F)$ si estende ad un operatore **continuo** $P : H_s(M, E) \longrightarrow H_{s-d}(M, F)$ $\forall s \in \mathbb{R}$.

È chiaro infine che se E, F e G sono fibrati vettoriali su M allora

$$\Psi^d_{\mathrm{cl}}(M; E, F) \circ \Psi^{d'}_{\mathrm{cl}}(M; F, G) \subset \Psi^{d+d'}_{\mathrm{cl}}(M; E, G) \tag{71}$$

Se E ed F sono due fibrati hermitiani allora per $P \in \Psi^d_{\mathrm{cl}}(M; E, F)$ è ben definito $P^* \in \Psi^d_{\mathrm{cl}}(M; F, E)$ tale che

$$\int_M < Pe, f >_F dg = \int_M < e, P^* f >_E dg$$

e si ha $\sigma_{\mathrm{pr}}(P^*) = \sigma_{\mathrm{pr}}(P)^*$.

Osservazione. Le stesse proprietà di composizione, continuità etc... valgono per gli operatori in $\Psi^*(M; E, F)$, non necessariamente classici.

[14] Un operatore lineare C è compatto se l'immagine tramite C di una successione limitata ammette una sottosuccessione convergente.

11.3. **Operatori ellittici. Esistenza della parametrice.**

Definizione 20. Sia M compatta. Sia $P \in \Psi^d_{\mathrm{cl}}(M; E, F)$. P è un operatore ellittico se esiste $c > 0$ tale che $\sigma_{\mathrm{pr}}(P)$ è invertibile su ogni vettore cotangente ξ di norma $\geq c$.

Si noti che, in particolare, E ef F devono avere lo stesso rango. Gli operatori differenziali ellittici sono ovviamente ellittici secondo questa definizione.

Teorema 15. *Sia $P \in \Psi^d_{\mathrm{cl}}(M; E, F)$ ellittico. Allora esiste $Q \in \Psi^{-d}_{\mathrm{cl}}(M; F, E)$ tale che*

$$P \circ Q \sim \mathrm{Id}\,, \qquad Q \circ P \sim \mathrm{Id} \tag{72}$$

e cioè, esplicitamente, tale che

$$P \circ Q = \mathrm{Id} + R_r\,, \quad Q \circ P = \mathrm{Id} + R_l\,, \qquad R_r \in {\Psi_{\mathrm{cl}}}^{-\infty}(M; F, F)\,, R_l \in {\Psi_{\mathrm{cl}}}^{-\infty}(M; E, E) \tag{73}$$

L'applicazione lineare Q è detta una *parametrice* per P o anche un' *inversa modulo operatori infinitamenti regolarizzanti* o anche, brevemente, una *pseudoinversa* di P.

Il teorema fondamentale sugli operatori ellittici si dimostra con un uso intelligente di una partizione dell'unità ed utilizzando il seguente teorema locale sugli operatori ellittici in $\mathbb{R}^n$.

11.4. **Teoria locale degli operatori pseudodifferenziali ellittici.**

Sia $P \in \Psi^d(\mathbb{R}^n; \mathbf{I}^\ell, \mathbf{I}^\ell)$, $P = p(x, D)$. Sia U un aperto di $\mathbb{R}^n$ a supporto compatto. Diremo che P è ellittico in U se $\exists\ c > 0$ tale che $\forall |\xi| > c$ la matrice inversa di $p(x, \xi)$, $x \in U$, esiste e soddisfa

$$|p(x, \xi)^{-1}| \leq C(1 + |\xi|)^{-d}\,.$$

Non è difficile dimostrare che se $p' \in S^{d-j}$, con $j > 0$, allora p è un simbolo ellittico in U se e solo se $p + p'$ è un simbolo ellittico in U. In parole, l' ellitticità di un operatore di ordine d dipende solo dalla classe del suo simbolo nel quoziente S^d / S^{d-1}.

Teorema 16. *Sia U un aperto di $\mathbb{R}^n$ con chiusura compatta. Supponiamo che $P \in \Psi^d(\mathbb{R}^n; \mathbf{I}^\ell, \mathbf{I}^\ell)$, $P = p(x, D)$, sia ellittico in U. Allora esiste $Q \in \Psi^{-d}(U; \mathbf{I}^\ell, \mathbf{I}^\ell)$ tale che*

$$PQ - \mathrm{Id} \sim 0\,, \quad QP - \mathrm{Id} \sim 0 \quad \textit{in} \quad U\,.$$

Proof. Possiamo sostituire P con la sua versione ϵ-locale P_ϵ (perché $P = P_\epsilon + R$ e la composizione di un operatore regolarizzante R con un qualsiasi operatore pseudodifferenziale è ancora regolarizzante). Sia $\chi : [0, \infty) \to [0, 1]$ una funzione differenziabile, uguale a 0 per $t \in [0, c]$ e uguale ad 1 per $t \geq 2c$. Consideriamo, in U, $q_0(x, \xi) := \chi(\xi) p(x, \xi)^{-1}$. Non è difficile verificare che $q_0 \in S^{-d}$. Cerchiamo un simbolo $q \sim \sum q_j$ tale che $q \star p \sim 1$ dove a sinistra c'e' il prodotto che compare nella formula per il simbolo di un prodotto. Consideriamo i simboli $q_k \in S^{-d-k}$, $k \geq 1$, induttivamente definiti da

$$q_k := -\sum_{j=0}^{k-1} \left(\sum_{|\alpha|+j=k} \frac{i^{|\alpha|}}{\alpha!} (D^\alpha_\xi q_j)(D^\alpha_x p) \right) q_0\,.$$

Per il teorema sulla completezza asintotica esiste un simbolo $q \in S^{-d}$ tale che $q \sim \sum q_k$ ed esiste quindi un operatore pseudodifferenziale Q, in U, associato a tale simbolo. Possiamo assumere Q ϵ-locale. Se ora calcoliamo il simbolo di $QP - \mathrm{Id}$, utilizzando ovviamente la formula per il simbolo del prodotto di due operatori ϵ-locali, ci rendiamo conto che il simbolo di $QP - \mathrm{Id}$ è regolarizzante in U. Analogamente dimostriamo l'esistenza di Q' tale che $PQ' - \mathrm{Id}$ è regolarizzante. Tuttavia $Q \sim Q(PQ') = (QP)Q' \sim Q'$, quindi Q e Q' sono equivalenti. $\square$

11.5. **Teorema di regolarità.**

Il Teorema (15) ha alcune fondamentali conseguenze.

Teorema 17. *(Regolorità ellittica.) Sia* $P \in {\Psi_{\rm cl}}^d(M;E,F)$ *ellittico e sia* $f \in H_s(M,E)$*. Sia* $V \subset M$ *un aperto e supponiamo che* $Pf_{|V} \in C^\infty$ *allora* $f_{|V} \in C^\infty$*. In particolare, se* $f \in H_s(M,E)$ *e* $Pf = 0$ *allora* $f \in C^\infty(M,E)$*.*

Dimostrazione. Per il teorema (15) possiamo scrivere $f = QPf - R_l f$ con $R_l \in {\Psi_{\rm cl}}^{-\infty}$. Già sappiamo che $R_l f \in C^\infty(M,E)$. D'altra parte $Q \in {\Psi_{\rm cl}}^{-d}$ e quindi vale per Q la proprietà di pseudolocalità; ne segue che $QPf_{|V} \in C^\infty$ e quindi la tesi.

11.6. **Operatori di Fredholm.**

Sia H uno spazio di Hilbert complesso separabile [15]. Denotiamo con $\mathcal{L}(H)$ l'algebra di Banach delle applicazioni lineari continue con la norma operatoriale. Gli elementi invertibili in quest'algebra formano un insieme aperto $\mathcal{L}^\times(H)$ in $\mathcal{L}(H)$ che è, ovviamente, un gruppo. Il teorema dell'applicazione aperta implica che se $T \in \mathcal{L}(H)$ è una biezione allora $T^{-1} \in \mathcal{L}(H)$ e quindi $T \in \mathcal{L}^\times(H)$.
Analogamente possiamo definire $\mathcal{L}(H_1,H_2)$ per una coppia di spazi di Hilbert e $\mathcal{L}^\times(H_1,H_2)$ che risulta, anche in questa caso, aperto.

Definizione 21. Un operatore $T \in \mathcal{L}(H)$ è di Fredholm se $\operatorname{Ker} T$ e $\operatorname{coker} T := H/\operatorname{Im} T$ sono di dimensione finita. In tal caso si defisce l'indice di T come

$$\operatorname{ind} T = \dim \operatorname{Ker} T - \dim \operatorname{coker} T\,.$$

Denotiamo con $\mathcal{F}(H) \equiv \mathcal{F}$ l'insieme degli operatori di Fredholm in $\mathcal{L}(H)$. Dato che $\dim \ker(ST) \leq \dim \operatorname{Ker} S + \dim \operatorname{Ker} T$ e dato che $\dim \operatorname{coker}(ST) \leq \dim \operatorname{coker} S + \dim \operatorname{coker} T$, vediamo che $\mathcal{F}$ è un semigruppo, con elemento neutro uguale all'identità.

11.7. **Proprietà degli operatori di Fredholm.**

1. $\operatorname{Im} T$ è chiuso.
Essendo $(\operatorname{Im} T)^\perp = \operatorname{Ker} T^*$ ne segue che $\operatorname{Im} T = (\operatorname{Ker} T^*)^\perp$ e quindi

$$\operatorname{ind} T = \dim \operatorname{Ker} T - \dim \operatorname{Ker} T^* \tag{74}$$

In particolare, un operatore autoaggiunto di Fredholm ha indice uguale a zero.

2. $\operatorname{ind}(ST) = \operatorname{ind}(S) + \operatorname{ind}(T)$

3. Sia $\mathcal{K}(H)$ l'ideale degli operatori compatti. Se $C \in \mathcal{K}(H)$ allora $\mathrm{Id}_H + C$ è di Fredholm e $\operatorname{ind}(\mathrm{Id}_H + C) = 0$.

4. $T \in \mathcal{F} \Leftrightarrow T$ è invertibile modulo $\mathcal{K}$ (e cioè esiste $S \in \mathcal{L}(H)$ tale che $(TS - \mathrm{Id}_H) \in \mathcal{K}$ e $(ST - \mathrm{Id}_H) \in \mathcal{K}$). [16]

5. Se $C \in \mathcal{K}$ e $T \in \mathcal{F}$ allora $T + C \in \mathcal{F}$ e $\operatorname{ind}(T+C) = \operatorname{ind}(T)$

6. $\mathcal{F}$ è aperto in $\mathcal{H}$; $\operatorname{ind} : \mathcal{F} \to \mathbb{Z}$ è localmente costante ed induce una biezione

$$\operatorname{ind} : \pi_0(\mathcal{F}) \to \mathbb{Z}\,.$$

---

[15] Per nozioni standard di Analisi Funzionali potete consultare, ad esempio il Reed-Simon, Vol 1.

[16] Questa proprietà è anche nota come teorema di Atkinson. Ci dice che $\mathcal{F} = \pi^{-1}\left((\mathcal{L}(H)/\mathcal{K}(H))^\times\right)$ con π: $\mathcal{L}(H) \to (\mathcal{L}(H)/\mathcal{K}(H))$ la proiezione canonica. L'algebra $\mathcal{L}(H)/\mathcal{K}(H)$ è detta algebra di Calkin e la conclusione è che gli operatori di Fredholm sono l'immagine inversa, tramite la proiezione canonica, degli invertibili dell'algebra di Calkin.

In particolare $\operatorname{ind} T_0 = \operatorname{ind} T_1$ se e solo se esiste un cammino continuo $(T(t))_{t\in[0,1]} \in \mathcal{F}$, tale che $T(0) = T_0$ e $T(1) = T_1$
Il fatto che $T_0 \sim T_1$ (T_0 omotopo a T_1 in $\mathcal{F}$) implichi che $\operatorname{ind} T_0 = \operatorname{ind} T_1$ è noto come *invarianza pe omotopia dell'indice.*

7. Possiamo dare un'analoga definizione per operatori fra due spazi di Banach E_1 ed E_2. È ancora vero che l'immagine è chiusa e che $\operatorname{ind} T = \dim \operatorname{Ker} T - \dim \operatorname{Ker} T^*$ dove ora $T^* : E_2^* \to E_1^*$ denota il trasposto di T. Gli operatori di Fredholm sono precisamente quelli che sono invertibili modulo i compatti.

Per la dimostrazione di queste classiche proprietà vi rimando allo Shubin [11].

11.8. **Indice di un operatore ellittico.**

Teorema 18. *(Proprietà di Fredholm.) Sia $P \in {\Psi_{\mathrm{cl}}}^d(M; E, F$ ellittico. Allora $\forall s \in \mathbb{R}$ l'estensione*

$$P_s : H_s(M, E) \to H_{s-d}(M, F)$$

è un operatore di Fredholm e l'indice di P_s è indipendente da s.

Dimostrazione. Basta dimostrare che P_s ammette un'inversa modulo operatori compatti. Sia $Q \in \Psi_{\mathrm{cl}}^{-d}(M; F, E)$ una pseudoinversa di P e sia Q_{s-d} la sua estensione a $H_{s-d}(M, F)$. Allora $Q_{s-d}P_s = \mathrm{Id} + (R_l)_s$. Ma R_l è infinitamente regolarizzante e quindi $(R_l)_s : H_s(M, E) \longrightarrow H_t(M, E)$ $\forall t \in \mathbb{R}$. In particolare $(R_l)_s : H_s(M, E) \to H_{s+1}(M, E)$. Dal Lemma di Rellich sappiamo che l'inclusione $H_{s+1}(M, E) \to H_s(M, E)$ è compatta; dato che gli operatori compatti sono un ideale ne concludiamo che $(R_l)_s$ è un operatore compatto. Analogamente si verifica che Q dà un'inversa destra di P_s modulo compatti. Ne segue che P_s è di Fredholm ed è quindi ben definito

$$\operatorname{ind} P_s := \dim \operatorname{Ker} P_s - \dim \operatorname{coker} P_s = \dim \operatorname{Ker} P_s - \dim \operatorname{Ker}(P_s)^*$$

dove abbiamo utilizzato la proprietà 7 degli operatori di Fredholm. Per il teorema di dualità fra Spazi di Sobolev sappiamo che $(H_{s-d})^*$ è isomorfo tramite un isomorfismo ϕ a H_{d-s} e $(H_s)^*$ è isomorfo tramite un isomorfismo ψ a H_{-s}. Inoltre, un semplice argomento di densità dimostra che l'operatore

$$\psi \circ (P_s)^* \circ \phi^{-1} : H_{d-s} \to H_{-s} \equiv H_{(d-s)-d}$$

altri non è che l'operatore $(P^*)_{d-s}$, con P^* uguale ora all'aggiunto formale. Riassumendo

$$\operatorname{ind} P_s := \dim \operatorname{Ker} P_s - \dim \operatorname{coker} P_s = \dim \operatorname{Ker} P_s - \dim \operatorname{Ker}(P^*)_{d-s}$$

Per il teorema di regolarità ellittica sappiamo che $\operatorname{Ker} P_t = \operatorname{Ker} P$ per ogni t ed analogamente per l'aggiunto formale che è anch'esso, ovviamente, ellittico. La dimostrazione è ora completa.

11.9. **Disuguaglianza di Gärding.**

Teorema 19. *(Disuguaglianza di Gärding.) Sia $P \in {\Psi_{\mathrm{cl}}}^d(M; E, F)$ ellittico. $\forall s \in \mathbb{R}$ $\exists C_s$ tale che*

$$\|f\|_s \leq C_s(\|Pf\|_{s-d} + \|f\|_{s-d}) \tag{75}$$

Dimostrazione. Possiamo scrivere $f = QPf - R_l f$. Ne segue che $\|f\|_s \leq (\|QPf\|_s + \|R_l f\|_s)$. Ma $Q \in {\Psi_{\mathrm{cl}}}^{-d}$ e quindi continuo da $H_{s-d}(M, F) \to H_d(M, E)$ e dato che $R_l \in {\Psi_{\mathrm{cl}}}^{-\infty}$ otteniamo immediatamente la tesi.

Osservazione. La disuguaglianza di Gärding gioca un ruolo fondamentale nello studio delle proprietà spettrali degli operatori ellittici.

12. **Teoria di Hodge**

12.1. **Operatori ellittici formalmente autoaggiunti.**

Sia $P \in {\Psi_{\rm cl}}^d(M; E, E)$ un operatore pseudodifferenziale ellittico di ordine d. P è detto formalmente autoaggiunto se $P = P^*$.

Teorema 20. *Sia $P \in {\Psi_{\rm cl}}^d(M; E, E)$, $P : C^\infty(M, E) \longrightarrow C^\infty(M, E)$, ellittico formalmente autoaggiunto. Allora esiste una decomposizione L^2-ortogonale*

$$C^\infty(M, E) = \mathrm{Ker}P \oplus \mathrm{Im}P \tag{76}$$

Sketch della dimostrazione. Sicuramente esiste una decomposizione ortogonale $L^2(M, E) = \mathrm{Ker}P \oplus (\mathrm{Ker}P)^\perp$. Notiamo che, per definizione, $H_0(M, E) = L^2(M, E)$. Sia $u \in C^\infty(M, E) \subset L^2(M, E)$; allora

$$u = u_0 + u_1\ ,\quad u_0 \in \mathrm{Ker}P\ ,\quad u_1 \in (\mathrm{Ker}P)^\perp\ ;$$

ma $u_0 \in C^\infty(M, E)$ per regolarità ellittica e quindi $u_1 \in C^\infty(M, E)$. Basta dimostrare che $u_1 = Pw_1$ con $w_1 \in C^\infty(M, E)$.
Consideriamo $P_0 : L^2(M, E) \to H_{-d}(M, E)$ e identifichiamo $(H_{-d}(M, E))^* \equiv H_d(M, E)$; per l'ipotesi $P = P^*$ e usando questa identificazione scopriamo che il trasposto di P_0, che va quindi da $H_d(M, E)$ a $L^2(M, E)$ è uguale all'estensione P_d di P stesso. Ma allora un semplice ragionamento, già utilizzato per la Proposizione sull'indice di un operatore ellittico, dimostra che

$$(\mathrm{Ker}P_0)^\perp = \mathrm{Im}P_d\,,$$

. Ne segue che $u_1 = Pw_1$ con $w_1 \in H_d(M, E)$. Abbiamo visto che $u_1 \in C^\infty(M, E)$; per regolarità ellittica segue che $w_1 \in C^\infty(M, E)$ e la dimostrazione è completa.

12.2. **Complessi ellittici.**

Definizione 22. Siano $V_1, \dots, V_\ell$ fibrati vettoriali su M e supponiamo di avere $\forall j$ un operatore $P_j \in \mathrm{Diff}^d(M; V_j, V_{j+1})$. La successione

$$\cdots \longrightarrow C^\infty(M, V_j) \xrightarrow{P_j} C^\infty(M, V_{j+1}) \longrightarrow \cdots \tag{77}$$

è un *complesso di operatori differenziali di ordine* d se $P_{j+1} \circ P_j = 0$. Il complesso è detto *ellittico* se $\forall x \in M$ e $\forall \omega \in T^*_x M \setminus 0$ la successione dei simboli

$$\cdots \longrightarrow (V_j)_x \xrightarrow{\sigma_{\rm pr}(P_j)(\omega)} (V_{j+1})_x \longrightarrow \cdots \tag{78}$$

è *esatta*

Denotiamo un tale complesso con $\{V_*, P_*\}$. Definiamo il k-mo *gruppo di coomologia* $\mathbb{H}^k(\{V_*, P_*\})$ del complesso $\{V_*, P_*\}$ come lo spazio vettoriale quoziente

$$\mathbb{H}^k(\{V_*, P_*\}) := \mathrm{Ker}P_k/\mathrm{Im}P_{k-1}\,.$$

Supponiamo che ogni fibrato V_j sia dotato di una metrica hermitiana. È allora ben definito P_j^* che è ancora un operatore differenziale di ordine d. L'operatore $\Delta_j := P_j^* P_j + P_{j-1}P_{j-1}^*$ è allora un operatore differenziale di ordine $2d$ che è formalmente autoaggiunto e manda $C^\infty(M, V_j)$ in se stesso.

La seguente Proposizione è di facile dimostrazione:

Proposizione 5. *Il complesso $\{V_j, P_j\}$ è ellittico se e solo se l' operatore Δ_j è ellittico $\forall j$.*

12.3. **Teorema di Hodge generalizzato. Esempi. Indice di un complesso ellittico.**

Teorema 21. *(Decomposizione di Hodge). Sia* $\{V_j, P_j\}$ *un complesso ellittico. Allora* $\forall j$ *il sottospazio* $\mathrm{Ker}\Delta_j$ *ha dimensione finita e vale la seguente decomposizione* L^2*-ortogonale:*

$$C^\infty(M, V_j) = \mathrm{Ker}\Delta_j \oplus \mathrm{Im}P_{j-1} \oplus \mathrm{Im}P_j^* \,. \tag{79}$$

Dimostrazione. Sappiamo che Δ_j è ellittico formalmente autoaggiunto. Per il Teorema abbiamo la decomposizione ortogonale $C^\infty(M, V_j) = \mathrm{Ker}\Delta_j \oplus \mathrm{Im}\Delta_j$. Dalla definizione di Δ_j segue che $\mathrm{Im}\Delta_j \subset \mathrm{Im}P_j^* + \mathrm{Im}P_{j-1}$. Osserviamo che dalla definizione di aggiunto e dal fatto che $P_j \circ P_{j-1} = 0$ segue che $\mathrm{Im}P_j^* \perp \mathrm{Im}P_{j-1}$. Inoltre $\mathrm{Ker}\Delta_j = \mathrm{Ker}P_j \cap \mathrm{Ker}P_{j-1}^*$; infatti un'inclusione è ovvia e l'altra segue dal fatto che se $u \in \mathrm{Ker}\Delta_j$ allora $(\Delta_j u, u) = \|P_j u\|^2 + \|P_{j-1}^* u\|^2 = 0$. Da queste due osservazioni segue che $\mathrm{Im}P_j^* + \mathrm{Im}P_{j-1} \subset \Delta_j$ da cui l'uguaglianza $\mathrm{Im}P_j^* + \mathrm{Im}P_{j-1} = \Delta_j$ e, nuovamente per la prima osservazione, la tesi.

Teorema 22. *(Isomorfismo di Hodge) Per ogni* j *esiste un isomorfismo di spazi vettoriali:*

$$\mathrm{Ker}\Delta_j \simeq \mathbb{H}^j(\{V_*, P_*\}) := \mathrm{Ker}P_j / \mathrm{Im}P_{j-1} \tag{80}$$

Dimostrazione. Abbiamo verificato che $\Delta_j = \mathrm{Ker}P_j \cap \mathrm{Ker}P_{j-1}^*$. Consideriamo la mappa

$$\phi : \mathrm{Ker}\Delta_j \longrightarrow \mathrm{Ker}P_j / \mathrm{Im}P_{j-1}$$

che associa a $v \in \mathrm{Ker}\Delta_j$ la sua classe $[v]$ nel quoziente. Quest'applicazione è iniettiva, perché se $\phi(v) = 0$ allora $v \in \mathrm{Im}P_{j-1}$ e quindi $v = 0$ dato che $\mathrm{Im}P_{j-1} \cap \mathrm{Ker}\Delta_j = 0$. Dimostriamo che ϕ è anche suriettiva. Sia $[v] \in \mathrm{Ker}P_j/\mathrm{Im}P_{j-1}$. Possiamo decomporre $v = v_0 + \Delta_j v_1$ con $v_0 \in \mathrm{Ker}\Delta_j$. Si ha $\phi(v_0) = [v]$ (da cui la tesi). Infatti: dato che $v \in \mathrm{Ker}P_j$ ne segue che $P_j v_0 + P_j \Delta_j v_1 = 0$; ma $P_j v_0 = 0$ e quindi ne deduciamo che $P_j P_j^* P_j v_1 = 0$ (vi ricordo che $P_j P_{j-1} = 0$). Facendo il prodotto scalare di $P_j P_j^* P_j v_1$ con $P_j v_1$ ed utilizzando la definizione di aggiunto (e cioè integrando per parti) otteniamo $\|P_j^* P_j v_1\|^2 = 0$ da cui $\Delta_j v_1 = P_{j-1} P_{j-1}^* v_1$. Ma allora $[v] = [v_0] = \phi(v_0)$ come si voleva.

Definizione 23. Sia $\{V_j, P_j\}$ un complesso ellittico; l'indice del complesso è definito come

$$\mathrm{ind}\,(\{V_*, P_*\}) := \sum_j (-1)^j \dim \mathbb{H}^j(\{V_*, P_*\}) \in \mathbb{Z} \,.$$

Osservazione. La nozione di indice di un complesso ellittico è una semplice generalizzazione dell'indice di un singolo operatore ellittico. Se $P : C^\infty(M, E) \to C^\infty(M, F)$ è un operatore ellittico, allora $0 \to C^\infty(M, E) \xrightarrow{P} C^\infty(M, F) \to 0$ è un complesso ellittico e l'indice dell'operatore P è uguale all'indice del complesso.

12.4. **Esempi notevoli: de Rham, Dolbeault.**

Esempio 1. (Complesso di *de Rham.*)
Sia M una varietà riemanniana compatta e sia $\Lambda^k M := \Lambda^k(T^*M)$. Le sezioni di questo fibrato sono le forme differenziali di grado k: $C^\infty(M, \Lambda^k M) \equiv \Omega^k(M)$. L'operatore di differenziazione esterna $d_j : \Omega^j(M) \to \Omega^{j+1}(M)$ definisce un complesso $\{\Lambda^* M, d_*\}$, detto il *complesso di de Rham*:

$$\ldots \longrightarrow C^\infty(M, \Lambda^k M) \xrightarrow{d_k} C^\infty(M, \Lambda^{k+1} M) \longrightarrow \cdots$$

Non è difficile verificare (ed era un esercizio del terzo compito a casa) che se $\omega_x \in T_x^* M$ e $\alpha \in \Lambda_x^k M$ allora

$$(\sigma_{\mathrm{pr}}(d_k)(\omega_x))(\alpha) = \sqrt{-1}\omega_x \wedge \alpha \,.$$

È allora un semplice esercizio di algebra lineare verificare che *il complesso di de Rham è ellittico.* La comologia di questo complesso non è altro che la coomologia di de Rham $H^j_{\mathrm{dR}}(M)$. L'operatore Δ_j è detto operatore di Laplace-Beltrami sulle forme di grado j. Le forme differenziali in $\mathrm{Ker}\Delta_j$ sono dette *forme differenziali armoniche* di grado j. Il teorema di Hodge ci dice in questo caso che

$$\Omega^j(M) = \mathrm{Ker}\Delta_j \oplus d\Omega^{j-1} \oplus d^*\Omega^{j+1}$$

e che

$$\mathrm{Ker}\Delta_j \simeq H^j_{\mathrm{dR}}(M).$$

Notiamo infine che per il teorema di de Rham (che identifica $H^j_{\mathrm{dR}}(M)$ alla coomologia singolare di M):

$$\mathrm{ind}\,(\{\Lambda^* M, d_*\}) = \chi(M)\,. \tag{81}$$

In parole, *l'indice del complesso di de Rham è uguale alla caratteristica di Eulero-Poincaré di M.*

Osservazione. Consideriamo

$$d + d^* : \Omega^{\mathrm{pari}}(M) \to \Omega^{\mathrm{dispari}}(M).$$

Non è difficile dimostrare che questo operatore è ellittico. È anche semplice dimostrare, utilizzando il teorema di Hodge, che

$$\mathrm{ind}\,(\{\Lambda^* M, d_*\}) = \mathrm{ind}\,(d + d^*_{|_{\Omega^{\mathrm{pari}}}}).$$

Quindi, in particolare, vediamo che

$$\mathrm{ind}\,(d + d^*_{|_{\Omega^{\mathrm{pari}}}}) = \chi(M).$$

Dualità di Poincaré.

Vi ricordo che possiamo dare un'espressione esplicita, in termini di d e dell'operatore di Hodge $*$, per l'operatore d^*, aggiunto formale di $d : C^\infty(M, \Lambda^k M) \to C^\infty(M, \Lambda^{k+1} M)$ rispetto al prodotto scalare $(\cdot,\cdot)_{L^2}$:

$$d^* = (-1)^{nk+n+1} * d * \,. \tag{82}$$

Dalla formula

$$*^2 = (-1)^{k(n-k)} \tag{83}$$

e da (82) segue che $*\Delta_k = \Delta_{n-k}*$ e quindi che $\mathrm{Ker}\Delta_k \simeq \mathrm{Ker}\Delta_{n-k}$. Ricordando il teorema di Hodge e ancora una volta l'isomorfismo di de Rham $H^*_{\mathrm{dR}}(M) \simeq H^*(M, \mathbb{R})$ otteniamo infine il seguente notevole

Corollario 6. *(Dualità di Poincaré). Sia M una varietà compatta orientabile di dimensione n. Allora $\forall k \in 0, \dots, n$ esiste un isomorfismo*

$$H^k(M, \mathbb{R}) \simeq H^{n-k}(M, \mathbb{R}).$$

Esempio 2. (Complesso di *Dolbeault.*)

Sia M complessa. Abbiamo visto la decomposizione

$$\Lambda^k(T^*M \otimes \mathbb{C}) = \oplus_{p+q=k} \Lambda^{p,q}(M)$$

con $\Lambda^{p,q}(M)$ generato localmente da forme del tipo

$$dz_{i_1} \wedge \cdots \wedge dz_{i_p} \wedge d\overline{z}_{j_1} \wedge \cdots \wedge d\overline{z}_{j_q}\,.$$

Le sezioni C^∞ di $\Lambda^{p,q}M$ sono le forme differenziali di tipo (p,q); questo spazio di sezioni è solitamente denotato con $\Omega^{p,q}(M)$. Vi ricordo

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}_j} := \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x_j} + \sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial y_j}), \quad \frac{\partial}{\partial z_j} := \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x_j} - \sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial y_j}).$$

Siano $I=(i_1,\dots,i_p)$ e $J=(j_1,\dots,j_q)$ due multi-indici; possiamo definire l'operatore

$$\overline{\partial} : C^\infty(M,\Lambda^{p,q}(M)) \longrightarrow C^\infty(M,\Lambda^{p,q+1}(M))$$

in maniera analoga all'operatore di derivazione esterna: localmente poniamo con ovvia notazione

$$\overline{\partial}(\sum_{I,J}\omega_{I,J}dz^I\wedge d\overline{z}^J) = \sum_{I,J}\sum_{\ell=1}^n(\frac{\partial}{\partial \overline{z}_\ell}\omega_{I,J})d\overline{z}_\ell\wedge dz^I\wedge d\overline{z}^J$$

È facile verificare che $\overline{\partial}^2=0$. Se necessario denoteremo quest'operatore con $\overline{\partial}_{p,q}$
Fissiamo p e consideriamo la successione

$$\cdots \longrightarrow C^\infty(M,\Lambda^{p,q}(M)) \xrightarrow{\overline{\partial}} C^\infty(M,\Lambda^{p,q+1}(M)) \longrightarrow \cdots \tag{84}$$

Per costruzione questo è un complesso di operatori differenziali di ordine 1 detto *complesso di Dolbeault.* Si verifica senza difficoltà che

$$(\sigma_{\rm pr}(\overline{\partial})(\omega_x))(\,\cdot\,) = \sqrt{-1}\omega_x^{0,1}\wedge(\,\cdot\,)$$

con $T^*_xM \ni \omega_x = \omega_x^{1,0}+\omega_x^{0,1}$ rispetto alla decomposizione di un covettore reale in termini di covettori complessi di tipo $(1,0)$ e $(0,1)$. Ne segue che *il complesso di Dolbeault è ellittico.* Fissiamo una metrica hermitiana su $\Lambda^{1,0}M$; questa induce una metrica hermitiana su $\Lambda^{p,q}M$ e quindi un prodotto L^2. Il Teorema di Hodge generalizzato implica la seguente decomposizione, detta di Hodge-Dolbeault,

$$\Omega^{p,q}(M) = {\rm Ker}\Box_{p,q}\oplus\overline{\partial}\Omega^{p,q-1}(M)\oplus\overline{\partial}^*\,\Omega^{p,q+1}$$

con $\Box_{p,q} = \overline{\partial}^*_{p,q}\overline{\partial}_{p,q}+\overline{\partial}_{p,q-1}\overline{\partial}^*_{p,q-1}$. Inoltre

$${\rm Ker}\Box_{p,q}\simeq {\rm Ker}\overline{\partial}_{p,q}/{\rm Im}\overline{\partial}_{p,q-1}$$

A destra c'è la coomologia di Dolbeault di tipo (p,q) che per il Teorema di Dolbeault è isomorfa alla coomologia a valori nel fascio delle p-forme olomorfe. In particolare se $p=0$ allora la coomologia di Dolbeault è isomorfa alla coomologia a valori nel fascio $\mathcal{O}$ delle funzioni olomorfe. Riassumendo

$${\rm Ker}\Box_{0,q}\simeq {\rm Ker}\overline{\partial}_{0,q}/{\rm Im}\overline{\partial}_{0,q-1}\simeq H^q(M,\mathcal{O}). \tag{85}$$

Per l'indice analitico del complesso di Dolbeault $\{\Lambda^{0,*},\overline{\partial}_{0,*}\}$ troviamo allora

$${\rm ind}\,(\{\Lambda^{0,*},\overline{\partial}_{0,*}\}) = \sum_j(-1)^j\dim H^j(M,\mathcal{O})\,.$$

Il membro a destra di questa uguaglianza è un invariante geometrico della varietà M, particolarmente importante in geometria algebrica; esso prende il nome di *genere aritmetico* e viene denotato con $\chi(M,\mathcal{O})$. Riassumendo:

$${\rm ind}\,(\{\Lambda^{0,*},\overline{\partial}_{0,*}\}) = \chi(M,\mathcal{O}). \tag{86}$$

Osservazione. Come nel caso del complesso di de Rham, l'indice del complesso di Dolbeault è uguale all'indice dell'operatore

$$\overline{\partial}+\overline{\partial}^*_{|_{\Omega^{0,{\rm pari}}}}$$

Questa è, come nel caso di de Rham, una conseguenza del teorema di Hodge. Quindi, come preannunciato,

$$\operatorname{ind}(\overline{\partial} + \overline{\partial}^*_{|_{\Omega^{0,\mathrm{pari}}}}) = \chi(M, \mathcal{O}).$$

12.5. **Dualità di Kodaira-Serre.**
Vedere Griffiths-Harris, pp 101–103.

12.6. **Proprietà spettrali.** Consideriamo un operatore differenziale ellittico P di ordine m su una varietà compatta M di dimensione n. Supponiamo che P sia formalmente autoaggiunto. Consideriamo l'operatore illimitato $\overline{P} : L^2(M,E) \to L^2(M,E)$ con dominio uguale a $H_m(M,E)$; in altre parole $\overline{P}$ è il nostro operatore P_m ma visto da L^2 in L^2. Con un piccolo abuso di notazione continuiamo a denotare con P questo operatore. Vale il seguente importante

Teorema 23. *Esiste una base ortonormale di L^2 costituita da autovettori per P. Ogni autospazio K_λ di P è finito dimensionale e contenuto in $C^\infty(M,E)$. Se λ è un autovalore di P, allora $\lambda \in \mathbb{R}$.*

Dimostrazione. Vediamo che esiste una base ortonormale di L^2 costituita da autovettori per P. Sappiamo che $C^\infty(M,E) = \mathrm{Ker}P \oplus \mathrm{Im}P$. Consideriamo $P : \mathrm{Im}\,P \to \mathrm{Im}\,P$ che è quindi un'applicazione lineare bigettiva. Sia P^{-1} la sua inversa e sia G l'operatore uguale a P^{-1} su $\mathrm{Im}P$ ed uguale al vettore nullo su $\mathrm{Ker}P$. G è detto l'operatore di Green. Dalla disuguaglianza di Garding si ha che G si estende ad un operatore limitato $G : L^2(M,E) \to H_m(M,E)$. Dato che l'inclusione di H_m in L^2 è compatta, segue che $G : L^2(M,E) \to: L^2(M,E)$ è un operatore limitato compatto ed autoaggiunto. Per il teorema spettrale relativo a tali operatori esiste una base ortonormale di $L^2(M,E)$ costituita da autovettori di G; più precisamente esiste una base $\{\phi_j\}$ con $G\phi_j = \mu_j\phi_j$ e $\mu_j \to 0$ quando $j \to \infty$. Ora, per definizione, $\mathrm{Ker}G = \mathrm{Ker}P$ e se $u \in \mathrm{Ker}(G - \mu_j)$, $\mu_j \neq 0$, allora u appartiene al dominio di P e $Pu = \frac{1}{\mu_j}u$ (infatti $u = PGu = P(\mu_j u) = \mu_j P(u)$). Ponendo $\lambda_j = 1/\mu_j$ si ha la tesi. Il fatto che l' autospazio associato a λ sia di dimensione finita e contenuto in $C^\infty(M,E)$ è chiaro dall'ellitticità di $(P - \lambda)$. Gli autovalori sono reali perché P è formalmente autoaggiunto.

12.7. **Formula di Kunneth.**
Vedere Griffiths-Harris, pp 103-106

12.8. **Teoria di Hodge su varietà di Kahler. Diamante di Hodge.** Vedere Griffiths-Harris, pp 106-118

13. **Teorema di Atiyah-Singer (via l'equazione del calore).**

13.1. **Equazione del calore. Traccia.** Supponiamo ora di avere un operatore formalmente autoaggiunto e positivo. Ad esempio possiamo considerare $P = D^*D$ con D un qualsiasi operatore ellittico su un fibrato hermitiano $E \to M$ di rango k. L'equazione del calore associata all'operatore P è per definizione l'equazione

$$\frac{\partial}{\partial t}s + Ps = 0 \tag{87}$$

in $C^\infty(\mathbb{R}^+ \times M; E)$. Sappiamo che esiste una base ortonormale $\{\phi_j\}$ di autosezioni di P per lo spazio di Hilbert $L^2(M, E)$; sappiamo che queste autosezioni sono C^∞, che gli autovalori λ_j sono reali e positivi. Si può anche dimostare che gli autovalori crescono come j^δ con $\delta > 0$.

Consideriamo nuovamente $E \boxtimes E^*$, il fibrato su $M \times M$ che ha come fibra su (m_1, m_2) il fibrato $E_{m_1} \otimes E^*_{m_2} \equiv \mathrm{Hom}(E_{m_2}, E_{m_1})$. L'operatore del calore $\exp(-tP)$ è l' operatore

$$(e^{-tP}s)(m_1) = \int_M K_t(m_1, m_2)s(m_2)dvol_M(m_2) \tag{88}$$

dove K_t è la sezione di $E \boxtimes E^* \to M \times M$ data da

$$K_t := \sum_j e^{-t\lambda_j}\phi_j \boxtimes \phi_j^*\,.$$

K_t è detto il nucleo del calore. Utilizzando la stima sulla crescita degli autovalori si può dimostrare (e non è difficile) che la serie che definisce il nucleo del calore converge uniformemente e definisce un elemento in $C^\infty(\mathbb{R}^+_t \times M \times M; E \boxtimes E^*)$; in particolare, $K_t \in C^\infty(M \times M; E \boxtimes E^*)$; l'operatore del calore è quindi un operatore regolarizzante. È anche chiaro che se $s_0 \in L^2(M, E)$ allora $s(t, \cdot) := \exp(-tP)s_0$ è una soluzione dell'equazione del calore con dato iniziale $s(0, \cdot) = s_0$.

Esempio. Il nucleo del calore del Laplaciano in $\mathbb{R}^n$ è $K_t(x, y) = (4\pi t)^{-\frac{n}{2}}e^{-t||x-y||^2}$.

L'operatore del calore risulta essere tracciabile e la traccia è data da:

$$\mathrm{Tr}(e^{-tP}) := \int_M \mathrm{tr}_{E_m} K_t(m, m)dvol_M(m) = \sum_j e^{-t\lambda_j}$$

dove osserviamo che $K_t(m, m) \in \mathrm{End}(E_m)$ (ed ha quindi senso prenderne la traccia tr_{E_m}).

13.2. **Formula di McKean-Singer.** Ricordiamo innanzitutto che se $V = V^+ \oplus V^-$ è uno spazio vettoriale $\mathbb{Z}_2$-graduato e $A \in \mathrm{End}(V)$, allora

$$A = \begin{pmatrix} A_{++} & A_{+-} \\ A_{-+} & A_{--} \end{pmatrix}$$

e, per definizione,

$$\mathrm{str}(A) := \mathrm{tr}(A_{++}) - \mathrm{tr}(A_{--}).$$

(Mentre, ovviamente, $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(A_{++}) + \mathrm{tr}(A_{--})$.)

Sia M una varietà riemanniana di dimensione pari e sia $D = \begin{pmatrix} 0 & D^- \\ D^+ & 0 \end{pmatrix}$ un qualsiasi operatore ellittico formalmente autoaggiunto e dispari su un fibrato hermitiano graduato $E^+ \oplus E^-$. In particolare $D^- = (D^+)^*$. Consideriamo

$$D^2 = \begin{pmatrix} D^-D^+ & 0 \\ 0 & D^+D^- \end{pmatrix}, \quad \text{e} \quad e^{-tD^2} = \begin{pmatrix} e^{-tD^-D^+} & 0 \\ 0 & e^{-tD^+D^-} \end{pmatrix}.$$

Teorema 24. *(Formula di McKean-Singer) Si ha*

$$\operatorname{ind}(D^+) = \operatorname{Str}(e^{-tD^2}) = \int_M \operatorname{str}_{E_m} K_t(m,m)\, dvol. \tag{89}$$

Dimostrazione Sia $K_\lambda = K_\lambda^+ \oplus K_\lambda^-$ un autospazio di D^2 associato a λ e sia $n_\lambda^\pm = \dim(K_\lambda^\pm)$. Per quanto visto $\operatorname{Tr}(e^{-tD^-D^+}) = \sum_{\lambda \geqslant 0} e^{-t\lambda} n_\lambda^+ = n_0^+ + \sum_{\lambda>0} e^{-t\lambda} n_\lambda^+$ e $\operatorname{Tr}(e^{-tD+D^-}) = \sum_{\lambda\geqslant 0} e^{-t\lambda} n_\lambda^- = n_0^- + \sum_{\lambda>0} e^{-t\lambda} n_\lambda^-$. Inoltre,

$$\operatorname{ind}(D^+) = \dim \operatorname{Ker}(D^+) - \dim \operatorname{Ker}(D^-) = \dim \operatorname{Ker}(D^-D^+) - \dim \operatorname{Ker}(D^+D^-) = n_0^+ - n_0^-.$$

Basta quindi provare che $\sum_{\lambda>0} e^{-t\lambda} n_\lambda^- = \sum_{\lambda>0} e^{-t\lambda} n_\lambda^+$. Se $\varphi^+ \in K_\lambda^+$ per $\lambda > 0$ allora $D^+\varphi^+ \in K_\lambda^-$ per $\lambda > 0$: infatti $D^+D^-(D^+\varphi^+) = D^+(D^-D^+\varphi^+) = \lambda D^+\varphi^+$. Analogamente se $\varphi^- \in K_\lambda^-$ per $\lambda > 0$ allora $D^-\varphi^- \in K_\lambda^+$ cioè $K_\lambda^+ \xrightarrow{D^+} K_\lambda^- \xrightarrow{\frac{1}{\lambda}D^-} K$ è l'identità. Ne segue che $K_\lambda^+ \simeq K_\lambda^-$ per $\lambda > 0$ e quindi $n_\lambda^+ = n_\lambda^-$ come si voleva.

13.3. **La formula dell'indice.** Sia M una varietà riemanniana compatta, E un fibrato hermitiano $\mathbb{Z}_2$ graduato con connessione ∇^E. Consideriamo una sottoclasse di operatori differenziali del primo ordine, i cosidetti operatori di tipo Dirac. Un operatore di tipo Dirac, qualsiasi cosa esso sia, è un operatore formalmente autoaggiunto e dispari:

$$\not{D} = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \not{D}^- \\ \hline \not{D}^+ & 0 \end{array}\right) : C^\infty(M, E^+) \oplus C^\infty(M, E^-) \longrightarrow C^\infty(M, E^+) \oplus C^\infty(M, E^-),$$

con $\not{D}^- = (\not{D}^+)^*$.

Teorema 25 (Atiyah–Singer per operatori di tipo Dirac)**.** *Vale la seguente formula:*

$$\operatorname{ind}(\not{D}^+) = \int_M \hat{\mathrm{A}}(M, \nabla^{TM})\ \mathrm{Ch}'(E, \nabla^E).$$

dove $\mathrm{Ch}'(E, \nabla^E)$ è una sorta di carattere di Chern che a questo livello di imprecisione lascero' non-definito.

13.4. **Idea della dimostrazione.** Sia AS la forma differenziale che compare nel membro a destra della formula di Atiyah-Singer. Denotiamo la componente di grado massimo di questa forma differenziale con $[\mathrm{AS}]_n$, con n uguale alla dimensione di M. La formula di Atiyah-Singer per operatori di Dirac si ottiene mandando a zero t nella formula di McKean-Singer. Per operatori qualsiasi il limite della supertraccia del nucleo del calore moltiplicato per la forma di volume, non esiste. Per operatori di tipo Dirac, e solo per questi (!), si ha, miracolosamente, il limite puntuale

$$\operatorname{str}_{E_p} K_t(p,p)\, dvol_M(p) \longrightarrow [\mathrm{AS}]_n(p)\,. \tag{90}$$

Dato che il limite è puntuale, possiamo ragionare in un intorno di $p \in M$. Il limite si calcola con un procedimento di riscalamento che è dovuto ad Ezra Getzler. Lo trovate spiegato nel libro di Berline-Getzler-Vergne oppure in quello di Roe (seconda edizione, la prima conteneva errori). L'idea è quella di approssimare il nucleo del calore del nostro operatore intorno ad un punto con quello di un oscillatore armonico generalizzato; per quest'ultimo il nucleo del calore può essere scritto esplicitamente e dà la formula di Atiyah-Singer.

14. **Teorema di Atiyah-Singer tramite la K-Teoria: indice analitico ed indice topologico.**

Vogliamo spiegare un secondo approccio alla formula dell'indice di Atiyah-Singer, quello tramite la K-teoria. Storicamente, questo approccio è anteriore alla dimostrazione tramite l'equazione del calore [17].

14.1. **Il gruppo di K-teoria.**

Abbiamo visto all'inizio del corso che la corrispondenza $X \to \mathrm{Vect}(X)$ definisce un *funtore omotopico controvariante* dalla categoria degli spazi topologici compatti + applicazioni continue alla categoria dei semigruppi abeliani + morfismi di semigruppi. Ad una mappa fra spazi compatti, e cioè ad un'applicazione continua, corrisponde il morfismo di semigruppi indotto dal pull-back. Questo funtore è omotopico proprio per il teorema di omotopia, teorema 1.

Dato un semigruppo A è possibile definire in maniera naturale un gruppo $K(A)$ ed un omomorfismo di semigruppi

$$\alpha : A \to K(A)$$

in modo tale che se G è un gruppo e $\gamma : A \to G$ è un morfismo di semigruppi *allora* esiste un'unico morfismo di gruppi

$$\kappa : K(A) \to G$$

tale che $\kappa \circ \alpha = \gamma$. Il gruppo $K(A)$ è detto gruppo di Grothendieck associato al semigruppo.

Essendo la soluzione di un problema universale, se un tale gruppo esiste allora deve essere unico. Per quel che concerne l'esistenza consideriamo $A \times A$ ed introduciamo la seguente relazione di equivalenza:

$$(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow \exists u \in A \,|\, a + d + u = b + c + u \tag{91}$$

È facile verificare che trattasi effettivamente di una relazione di equivalenza.
$A \times A/\sim$ è un gruppo abeliano con l' operazione di somma indotta da quella di A; l'elemento neutro è uguale alla classe di equivalenza di (a, a), denotata $[a, a]$, e l'inverso di $[a, b]$ è semplicemente $[b, a]$. Definiamo

$$K(A) := A \times A/\sim \quad \text{e} \quad \alpha : A \to K(A)\ ,\ \alpha(a) = [a, 0].$$

Se G è un gruppo e $\gamma : A \to G$ un morfismo di semigruppi allora definiamo $\kappa : K(A) \to G$ tramite $\kappa[a, b] = \gamma(a) - \gamma(b)$. κ è ben definito ed è l'unico omomorfismo di gruppi tale che $\kappa \circ \alpha = \gamma$

Notiamo che la corrispondenza appena definita è funtoriale covariante: se B è un semigruppo, $K(B)$ il suo gruppo di Grothendieck con morfismo $\beta : B \to K(B)$ e se $h : A \to B$ è un morfismo di semigruppi allora possiamo definire un'applicazione $k(h) : K(A) \to K(B)$ tramite $k(h)[a, b] = [h(a), h(b)]$. Questo è un morfismo di gruppi ed è tale che $\beta \circ h = k(h) \circ \alpha$.

Definizione 24. Sia X uno spazio topologico compatto. Il gruppo di K-teoria associato a X è il gruppo abeliano $K(X) := K(\mathrm{Vect}(X))$.

[17] In ordine temporale le tre più celebri dimostrazioni della formula di Atiyah-Singer sono: (1) dimostrazione tramite cobordismo; è la prima dimostrazione. (2) dimostrazione tramite K-teoria (ora la spieghiamo). (3) dimostrazione tramite la formula di McKean-Singer.
Esistono oggi altre dimostrazioni.

Abbiamo definito un **funtore omotopico controvariante** *dalla categoria degli spazi topologici compatti + applicazioni continue alla categoria dei gruppi abeliani + morfismi di gruppi.*

Denotiamo la classe di equivalenza $[E, F]$ di una coppia (di classi di isomorfismo) di fibrati tramite la differenza formale $[E] - [F]$.

Osservazioni.
0. È chiaro che se X è un punto p allora $K(p) = \mathbb{Z}$ (infatti $\mathrm{Vect}(p) = \mathbb{N}$ e $K(\mathbb{N}) = \mathbb{Z}$).
1. $K(X)$ è di fatto un anello commutativo unitario, con operazione indotta dal prodotto tensoriale di due fibrati e unità uguale a $[X \times \mathbb{C}]$.

Definizione 25. Sia ora X uno spazio con punto base p e sia $i : p \hookrightarrow X$ l'inclusione: definiamo $\widetilde{K}(X) = \mathrm{Ker}(i^* : K(X) \to K(p))$. Il sottogruppo $\widetilde{K}(X)$ è per definizione il gruppo di K-teoria *ridotta* di X.

Se X è localmente compatto, si pone $K(X) := \widetilde{K}(X^+)$, con X^+ la compattificazione ad un punto.
In particolare, se X è una varietà compatta, possiamo considerare

$$K(X \times \mathbb{R}^2) \quad \text{o più in generale} \quad K(E)$$

con E un fibrato *complesso.*
Il seguente teorema è noto come *Teorema di periodicità di Bott in K-Teoria*; è uno dei risultati cruciali in K-Teoria.

Teorema 26. *Esiste un esplicito omorfismo, l'omomorfismo di Bott* $\beta : K(X) \longrightarrow K(\mathbb{R}^2 \times X)$ *che è un* **isomorfismo**.

Più in generale, vale

Teorema 27. *Esiste un esplicito omomorfismo* $\phi : K(X) \longrightarrow K(E)$, *detto l' omomorfismo di Thom, che è un* **isomorfismo**.

14.2. L'indice topologico.

Sia Y una varietà differenziabile compatta e sia $X \overset{i}{\hookrightarrow} Y$ una sottovarietà regolare. Definiremo ora un morfismo

$$i_! : K(TX) \longrightarrow K(TY) \tag{92}$$

che è fondamentale nella definizione dell'indice topologico. Si noti che questo è un morfismo covariante.

Sia $n - k = \mathrm{codim} X$. Fissiamo una metrica riemanniana su TY e sia $N \to X$ il fibrato normale a X: N è uguale per definizione all'ortogonale di TX in $TY_{|X}$. Per il teorema dell'intorno tubulare sappiamo che esiste un intorno $\mathcal{U}$ di X in Y ed un diffeomorfismo $\mathcal{U} \leftrightarrow N$. Il differenziale dell'immersione i induce un'immersione regolare $TX \hookrightarrow TY$ ed è chiaro che $T\mathcal{U} \equiv TN$ è un intorno tubulare di TX in TY. D'altra parte $TN = \pi^*(N \oplus N)$, con $\pi : TX \to X$ la proiezione naturale. Ne segue che TN ha una naturale struttura complessa data dall'endomorfismo

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Per il Teorema di Thom esiste un isomorfismo di gruppi abeliani

$$\phi : K(TX) \longrightarrow K(TN) .$$

D'altra parte $TN \overset{j}{\hookrightarrow} TY$ è un intorno aperto di TX in TY.
In generale se Z è uno spazio localmente compatto ed $U \overset{\psi}{\hookrightarrow} Z$ è un aperto di Z allora è ben definito un morfismo

$$\psi_* : K(U) \longrightarrow K(Z)\,;$$

questo morfismo è semplicemente indotto dalla proiezione naturale

$$Z^+ \longrightarrow Z^+/(Z^+ \setminus U) = U^+\,.$$

Applicando questa osservazione a $TN \overset{j}{\hookrightarrow} TY$ otteniamo un morfismo $j_* : K(TN) \longrightarrow K(TY)$.

Il morfismo $i_! : K(TX) \longrightarrow K(TY)$ indotto dall'immersione $i : X \hookrightarrow Y$ è per definizione uguale alla composizione di ϕ e j_*, esplicitamente

$$K(TX) \xrightarrow{\phi} K(TN) \xrightarrow{j_*} K(TY)\,,\ i_! := j_* \circ \phi\,.$$

Sia ora X una qualsiasi varietà differenziabile compatta; per il teorema d'immersione di Whitney sappiamo che esiste $n \in \mathbb{N}$ ed un'immersione regolare $i : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Sia $j : \underline{0} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ l'inclusione naturale. Abbiamo due morfismi indotti

$$i_! : K(TX) \longrightarrow K(T\mathbb{R}^n) = K(\mathbb{C}^n)\,, \quad j_! : K(\text{punto}) \longrightarrow K(T\mathbb{R}^n) = K(\mathbb{C}^n)$$

con il secondo morfimo uguale semplicemente all'isomorfimo di Thom (o meglio di Bott). Vi ricordo che $K(\text{punto}) = \mathbb{Z}$.

Definizione 26. Sia X una varietà differenziabile compatta. L'indice topologico è per definizione l'omomorfimo

$$\operatorname{ind}_t : K(TX) \longrightarrow \mathbb{Z}$$

ottenuto dalla composizione

$$K(TX) \xrightarrow{i_!} K(\mathbb{C}^n) \xrightarrow{j_!^{-1}} K(\text{punto}) = \mathbb{Z}\ ; \quad \operatorname{ind}_t = j_!^{-1} \circ i_!$$

14.3. **Proprietà di stabilità dell'indice di Fredholm.**

Definizione 27. Sia $P \in {\Psi_{\text{cl}}}^d(M; E, F)$ e sia S^*M il fibrato sferico definito dalla metrica riemanniana in T^*M. Sia $\pi_S : S^*M \longrightarrow M$. Il simbolo principale asintotico è la sezione $\widehat{\sigma}_{\text{pr}}(P) \in C^\infty(S^*M, \text{Hom}(\pi_S^*E, \pi_S^*F)$ definita da

$$\widehat{\sigma}_{\text{pr}}(P)(\omega) = \lim_{t\to+\infty} \frac{\sigma_{\text{pr}}(P)(t\omega)}{t^d}\,, \quad \omega \in S^*M \tag{93}$$

Il simbolo principale asintotico definisce per omogeneità un sezione di $C^\infty(T^*M\backslash 0, \text{Hom}(\pi^*E, \pi^*F))$. Denotiamo $C^\infty(T^*M \setminus 0, \text{Hom}^d(\pi^*E, \pi^*F))$ lo spazio delle sezioni che sono omogenee di grado d fuori dalla sezione nulla. Una tale sezione definisce un operatore in ${\Psi_{\text{cl}}}^d(M; E, F)$; basta utilizzare una partizione dell'unità $\{\psi_j\}$ subordinata ad un ricoprimento di carte locali (per ogni carta sarà anche necessario utilizzare delle funzioni cut-off in $|\omega|$, $\omega \in T^*M$, per estendere il simbolo in maniera C^∞ da $T^*M \setminus 0$ a T^*M).

La seguente Proposizione è di facile dimostrazione:

Proposizione 6. *$\forall m \in \mathbb{R}$ la seguente successione è esatta:*

$$0 \longrightarrow {\Psi_{\text{cl}}}^{m-1}(M; E, F) \hookrightarrow {\Psi_{\text{cl}}}^m(M; E, F) \xrightarrow{\widehat{\sigma}_{\text{pr}}(\,)} C^\infty(T^*M \setminus 0, \text{Hom}^m(\pi^*E, \pi^*F)) \longrightarrow 0 \tag{94}$$

Rimane definita un'applicazione

$$\mathrm{Op} : C^\infty(T^*M \setminus 0, \mathrm{Hom}^m(\pi^*E, \pi^*F)) \to \Psi_{\mathrm{cl}}{}^m(M; E, F)\,,$$

che associa ad un simbolo il corrispondente operatore pseudodifferenziale. Quest'applicazione, un'inversa destra di $\widehat{\sigma}_{\mathrm{pr}}(\ )$, non è unica perché dipende ovviamente dalle scelte fatte (partizione dell'unità, funzioni cut-off etc..); tuttavia scelte diverse producono operatori che differiscono per un operatore di ordine strettamente minore di d. Notiamo infine che esiste una biezione

$$C^\infty(S^*M, \mathrm{Hom}(\pi_s^*E, \pi_S^*F)) \leftrightarrow C^\infty(T^*M \setminus 0, \mathrm{Hom}^m(\pi^*E, \pi^*F))$$

con la quale possiamo introdurre in maniera naturale una topologia in $C^\infty(T^*M \setminus 0, \mathrm{Hom}^m(\pi^*E, \pi^*F))$.

Supponiamo ora che P_1 e P_2 siano due operatori ellittici in $\Psi^d(M; E, F)$. Se $\widehat{\sigma}_{\mathrm{pr}}(P_1) = \widehat{\sigma}_{\mathrm{pr}}(P_2)$ allora $P_1 = P_2 + K$ con $K \in \Psi_{\mathrm{cl}}^{d-1}(M; E, F)$. Otteniamo allora

$$\mathrm{ind}\, P_1 = \mathrm{ind}\,(P_1)_s = \mathrm{ind}\,((P_2)_s + K_s) = \mathrm{ind}\,(P_2)_s = \mathrm{ind}\, P_2 \tag{95}$$

dove abbiamo utilizzato il fatto che $K_s : H_s(M, E) \to H_{s-d}(M, F)$ è compatto [18]. Vi ricordo che l'indice di un operatore di Fredhom è invariante per l'aggiunzione di un operatore compatto.

Siano P_1 e P_2 in $\Psi_{\mathrm{cl}}{}^d(M; E, F)$ ellittici e supponiamo che i simboli principali asintotici siano omotopi attraverso simboli invertibili in $T^*M \setminus 0$: $\widehat{\sigma}_{\mathrm{pr}}(P_1) \sim \widehat{\sigma}_{\mathrm{pr}}(P_2)$. Sotto queste ipotesi segue che $\mathrm{ind}\,(P_1) = \mathrm{ind}\,(P_2)$; per dimostrare questa proprietà basterà utilizzare l'invarianza per omotopia dell'indice di un operatore di Fredholm e la continuità della mappa

$$\mathrm{Op} : C^\infty(T^*M \setminus 0, \mathrm{Hom}^d(\pi^*E, \pi^*F)) \to \mathcal{L}(H_s, H_{s-d})\,.$$

Quest'ultimà proprietà segue dalla dimostrazione della continuità degli operatori pseudodifferenziali fra spazi di Sobolev.

Riassumendo

$$P_1, P_2 \in \Psi_{\mathrm{cl}}{}^d \text{ ellittici}, \quad \widehat{\sigma}_{\mathrm{pr}}(P_1) \sim \widehat{\sigma}_{\mathrm{pr}}(P_2) \ \Rightarrow \mathrm{ind}\,(P_1) = \mathrm{ind}\,(P_2) \tag{96}$$

In parole: l'indice di un operatore ellittico dipende solo dalla classe di omotopia del simbolo principale dell'operatore. Storicamente è stata proprio questa proprietà a far congetturare da parte di Gelfand la possibilità di esprimere l'indice in termini coomologici. [19]

Osservazione. L'ordine d non gioca di fatto alcun ruolo; dimostriamo anzi che possiamo sempre ridurci al caso $d = 0$. Facciamo prima vedere che $\forall d \in \mathbb{R}$ esiste un operatore $\Lambda_E^d \in \Psi_{\mathrm{cl}}{}^d(M; E, E)$ che induce un isomorfismo $H_s(M, E) \leftrightarrow H_{s-d}(M, E)$; a tal fine consideriamo un simbolo $\sigma = \sigma^* \in C^\infty(T^*M \setminus 0, \mathrm{Hom}^d(\pi^*E, \pi^*E))$, ad esempio $\sigma(\omega_x) := \|\omega_x\|^d \mathrm{Id}_{E_x}$, con $\omega_x \in T_x^*M$. Sia $Q := \mathrm{Op}(\sigma)$. Dato che $\sigma = \sigma^*$ ne segue che $\mathrm{ind}\,(Q) = \mathrm{ind}\,(Q^*) = -\mathrm{ind}\,(Q)$, quindi $\mathrm{ind}\,(Q) = 0$. Ma allora (si dimostra che) esiste $K \in \Psi_{\mathrm{cl}}{}^{-\infty}$ tale che $\Lambda_E^d := Q + K$ induce un isomorfismo $H_s \to H_{s-d}\ \forall s \in \mathbb{R}$. Sia ora P un operatore ellittico di ordine d . Consideriamo l'operatore $\Lambda_F^{s-d} \circ P \circ \Lambda^{-s}$; è chiaro che

$$\Lambda_F^{s-d} \circ P \circ \Lambda^{-s} \in \Psi^0(M, E, F)\,, \quad \text{e} \quad \mathrm{ind}\,(P) = \mathrm{ind}\,(\Lambda_F^{s-d} \circ P \circ \Lambda^{-s})$$

come si voleva.

---

[18] essendo K di ordine $d-1$ ne segue che K_s fattorizza tramite l'inclusione compatta $H_{s-d+1}(M, F) \hookrightarrow H_{s-d}(M, F)$

[19] Che questa congettura di Gelfand sia all'origine del teorema di Atiyah-Singer mi è stato però smentito personalmente da Singer stesso; storicamente la vera ispirazione di Atiyah e Singer è stata l'integralità del genere $\widehat{A}$ per varietà spin. Atiyah e Singer erano convinti (giustamente !) che quest'integralità fosse dovuta al fatto che il genere $\widehat{A}$ fosse l' indice di un operatore ellittico.

14.4. **Operatori pseudodifferenziali ellittici e K-Teoria.**

Sia X localmente compatto. Vi ricordo che

$$K(X) := \widetilde{K}(X^+)$$

con $X^+ = (X \sqcup +)$ uguale alla compattificazione ad un punto di X. Si può dimostrare [20] che $K(X)$ è uguale al gruppo abeliano ottenuto quozientando il semigruppo $C_n(X)$ costituito dalle *classi di omotopia di complessi di fibrati vettoriali di lunghezza n a supporto compatto* per il sottosemigruppo $C_{n,\emptyset}(X)$ costituito dalle *classi di omotopia di complessi con supporto vuoto* (e cioè esatti ovunque). Vi ricordo che il supporto di un complesso

$$\cdots E_j \xrightarrow{\alpha_j} E_{j+1} \cdots$$

è l'insieme degli $x \in X$ tali che

$$\cdots (E_j)_x \xrightarrow{\alpha_j|_x} (E_{j+1})_x \cdots$$

non è esatta.

Supponiamo in particolare che X sia uguale ad un fibrato vettoriale $V \xrightarrow{\pi} M$ su uno spazio compatto M. Per noi V sarà uguale a T^*M, con M una varietà differenziabile compatta senza bordo ma possiamo procedere per il momento in tutta generalità. Consideriamo due fibrati E_1 e E_0 su M e siano $\pi^* E_j$ i fibrati indotti su V. Sia $m \in \mathbb{R}$; diremo che un morfismo di fibrati

$$\pi^* E_1 \xrightarrow{\alpha} \pi^* E_0$$

è (positivamente) omogeneo di grado m se

$$\alpha_{tv} \;=\; t^m \alpha_v \,, \quad \forall v \in V \,, \forall t > 0 \,.$$

Ad esempio, se $P \in {\Psi_{\rm cl}}^m(M; E_1, E_0)$ allora il simbolo principale omogeneo $\widehat{\sigma}_{\rm pr}(P)$ definisce un morfismo $\pi^* E_1 \to \pi^* E_0$ di fibrati su T^*M che è omogeneo di grado m.

È chiaro che un morfismo omogeneo è determinato dalla sua restrizione al fibrato sferico $SV = \{v \in V \mid \|v\| = 1\}$, dove abbiamo fissato una metrica in V.

Denotiamo con ${}^m C_n(V)$ il semigruppo delle classi di omotopia di complessi di lunghezza n che sono omogenei di grado m ed a supporto compatto; le omotopie sono da intendersi lungo complessi omogenei di grado m. Denotiamo con ${}^m C_{n,\emptyset}(V)$ il sottosemigruppo costituito dai complessi la cui restrizione a SV è indotta da un complesso su M che ha supporto vuoto.

Proposizione 7. *Esiste un isomorfismo di gruppi abeniani:*

$$K(V) \simeq {}^m C_n(V) / {}^m C_{n,\emptyset}(V) \tag{97}$$

Omettiamo la dimostrazione.

Osservazione. Sia X una varietà differenziabile. Abbiamo definito la K-teoria $K(X)$ tramite fibrati vettoriali nella categoria degli spazi topologici ed applicazioni continue. Tuttavia, se $[V] \in K(X)$, allora esiste W fibrato C^∞ su X tale che $[W] = [V]$. Infatti V è classificato da un'applicazione continua f in una grassmanniana; le grassmanniane sono varietà C^∞ e dato che X è per ipotesi anch'essa una varietà C^∞ possiamo approssimare f con un'applicazione differenziabile ϕ. Il pull-back del fibrato universale tramite ϕ definisce un fibrato C^∞, W, tale che $[W] = [V]$.

[20] Vi rimando al classico libro di Atiyah "K-Theory"; per una spiegazione rapida ed informale potete anche consultare le note del mio corso di dottorato "K-teoria"

Sia ora $\alpha \in K(T^*M)$, M varietà differenziabile compatta senza bordo. Per l'osservazione precedente e per la Proposizione (7), con $n = 1$, sappiamo che esistono fibrati C^∞ F_1, F_0 su M ed un omomorfismo

$$a : \pi^* F_0 \to \pi^* F_1$$

che è omogeneo di grado m, un isomorfismo fuori da un compatto e tale che $[\pi^* F_0 \xrightarrow{a} \pi^* F_1] = \alpha \in K(TM)$. Si noti che necessariamente a è un isomorfismo fuori dalla sezione nulla, perché altrimenti, per omogeneità, non potrebbe essere a supporto compatto. Per quanto visto nelle sezioni precedenti esiste un operatore $A \in {\Psi_{\rm cl}}^m(M; F_0, F_1)$ tale che $\widehat{\sigma}_{\rm pr}(A) = a$. Possiamo ovviamente prendere $m = 0$.

Riassumendo, abbiamo dato uno sketch della dimostrazione del seguente risultato:

Teorema 28. *$\forall\, \alpha \in K(T^*M)$ esistono fibrati F_0, F_1 su M e $A \in {\Psi_{\rm cl}}^0(M; F_0, F_1)$ ellittico tale che*

$$\alpha = [\pi^* F_0 \xrightarrow{\widehat{\sigma}_{\rm pr}(A)} \pi^* F_1] \tag{98}$$

14.5. **L'omomorfismo indice analitico.**

Sia M una varietà differenziabile compatta senza bordo. Introduciamo una metrica riemanniana e identifichiamo T^*M con TM.

Definizione 28. Definiamo l'indice analitico

$$\mathrm{ind}_a : K(TM) \to \mathbb{Z}$$

associando a

$$K(TM) \ni [\pi^* F_0 \xrightarrow{\widehat{\sigma}_{\rm pr}(A)} \pi^* F_1] = \alpha \quad \text{l'intero} \quad \mathrm{ind}\,(A)\,. \tag{99}$$

Proposizione 8. *L'applicazione indice analitico (99) è ben definita ed un omomorfismo di gruppi.*

Sketch della dimostrazione. È chiaro che l'indice è additivo per somme dirette. Occorre verificare che è ben definito in ${}^0C_1(M)/{}^0C_{1,\emptyset}(M)$ e che non dipende dalla scelta dell'operatore A. Se

$$[\pi^* F_0 \xrightarrow{a} \pi^* F_1] \ \in \ {}^0C_{1,\emptyset}(M)$$

allora a è indotto da un isomorfismo $\phi : F_0 \to F_1$; è allora chiaro che A è l'operatore di ordine 0 indotto da ϕ, $(Af)(x) = \phi(s(x))$, in particolare $\mathrm{ind}\,(A) = 0$ come si voleva. Il fatto che l'indice analitico non dipenda dalla classe di omotopia del complesso segue da (96); l'indipendenza dalla scelta di A segue dallo stesso ragionamento utilizzato in (95).

14.6. **Enunciato del teorema di Atiyah-Singer. Sketch della dimostrazione.**

Utilizzando l'isomorfismo di Thom abbiamo definito all'inizio di questa lezione l'indice topologico $\mathrm{ind}_t : K(TM) \to \mathbb{Z}$. Il seguente teorema è fondamentale in Matematica:

Teorema 29. *(Teorema di Atiyah-Singer.) Sia M una varietà differenziabile compatta senza bordo. L'indice topologico è uguale all'indice analitico:*

$$\mathrm{ind}_t(\alpha) = \mathrm{ind}_a(\alpha)\,, \quad \forall \alpha \in K(TM)\,. \tag{100}$$

Idea della dimostrazione. L'indice topologico gode di 2 importanti proprietà:

(A1). Se $M =$ punto allora $K(TM) = \mathbb{Z}$ e $\mathrm{ind}\,_t = \mathrm{Id}_{\mathbb{Z}}$.

(A2). Sia $i : M \to N$ un'immersione regolare e sia $i_! : K(TM) \to K(TN)$ l'omomorfsimo indotto; allora $\mathrm{ind}\,_t(i_!\alpha) = \mathrm{ind}\,_t(\alpha)$ $\forall \alpha \in K(TM)$.

La prima proprietà è una semplice conseguenza delle definizione; la seconda segue da proprietà funtoriali dell'isomorfismo di Thom.

Vale il seguente risultato di unicità:
Supponiamo che per ogni varietà compatta senza bordo M sia dato un omomorfismo $\phi^M : K(TM) \to \mathbb{Z}$ verificante (A1) e (A2). Allora $\phi = \operatorname{ind}_t$.
L'indice analitico verifica banalmente (A1). La difficoltà della dimostrazione è tutta concentrata nella verifica del secondo assioma. Occorre "seguire" analiticamente la costruzione dell'omomorfismo $i_!$ e verificare che l'indice analitico rimane invariato. Una certa proprietà di moltiplicatività per l'indice (ricordate che occorre passare ad un intorno tubulare di M in N) gioca un ruolo cruciale in questa verifica. Per i dettagli vi rimando all'articolo originale (in Annals of Mathematics, vol 87, 1968, pp 484-530) oppure al libro [6].

14.7. **Formulazione coomologica del teorema di Atiyah-Singer.**

La K-teoria e la coomologia di grado pari sono isomorfe se si tensorizza con $\mathbb{Q}$, e l'isomorfismo è proprio fornito dal carattere di Chern. Passando dalla K-teoria alla coomologia è possibile dare una formula coomologica per l'indice topologico e quindi, per il teorema di Atiyah-Singer, per l'indice analitico. In questa ultima sottosezione vogliamo enunciare questa formula. Vi faccio notare che la formula è molto generale: vale per qualsiasi operatore pseudodifferenziale ellittico.
Premessa topologica.
Siano $X = X_1 \cup X_2$ e $X_1 \cap X_2 = A$ (tutti gli spazi essendo compatti). Supponiamo di avere fibrati vettoriali (E_j, π_j, X_j) e supponiamo che esista un *isomorfismo* di fibrati $\phi : E_1|_A \to E_2|_A$.

Definizione 29. Il fibrato ottenuto per incollamento di (E_1, π_1, X) e (E_2, π_2, X) tramite ϕ è il fibrato $(E_1 \cup_\phi E_2 \to X)$ che ha come spazio totale

$$E_1 \cup_\phi E_2 = E_1 \sqcup E_2 / \sim$$

con $e_1 \sim e_2 \iff \pi_1(e_1) = \pi_2(e_2) \in A$ e $e_2 = \phi(e_1)$.

È facile verificare che questa definizione produce effettivamente un fibrato vettoriale su X.

Esempio. Sia $X = S^2$ e sia $X_1 = S^2_+$, un emisfero, e $X_2 = S^2_-$, l'altro emisfero, di modo che $A = S^1$, l'equatore. Siano $E_1 = S^2_+ \times \mathbb{C}$ e $E_2 = S^2_- \times \mathbb{C}$; un isomorfismo $\phi : E_1|_A \to E_2|_A$ è semlicemente un isomorfismo di fibrati banali $\phi : S^1 \times \mathbb{C} \to S^1 \times \mathbb{C}$ ed è quindi dato da un'applicazione continua $\phi : S^1 \to GL(1, \mathbb{C}) = \mathbb{C}^*$. Considerando $\phi_\ell(z) = z^{-\ell}$, $z \in S^1$, otteniamo per incollamento un fibrato complesso di rango 1. Il fibrato dato da $\phi(z) = 1/z$ è detto *fibrato di Hopf.*
Fine premessa topologica.

Abbiamo bisogno di qualche altro preliminare.

Definizione 30. Sia $P \in {\Psi_{\rm cl}}^d(M; E, F)$ e sia S^*M il fibrato sferico definito dalla metrica riemanniana in T^*M. Sia $\pi_S : S^*M \longrightarrow M$. Il simbolo principale asintotico è la sezione $\widehat{\sigma}_{\rm pr}(P) \in C^\infty(S^*M, \operatorname{Hom}(\pi_S^* E, \pi_S^* F)$ definita da

$$\widehat{\sigma}_{\rm pr}(P)(\omega) = \lim_{t \to +\infty} \frac{\sigma_{\rm pr}(P)(t\omega)}{t^d}\,, \quad \omega \in S^*M \tag{101}$$

Sia ora M una varietà differenziabile compatta senza bordo. Fissiamo su M una metrica riemanniana. Siano

$$B^*_1 M \xrightarrow{\pi_B} M\,, \quad S^*M \xrightarrow{\pi_S} M$$

il fibrato in dischi di raggio 1 ed il fibrato in sfere rispettivamente; è ovvio che $\partial B_1^*(M) = S^*M$ ed è quindi ben definita

$$\Sigma M = B_1^*(M) \cup_{S^*M} B_1^*(M) \xrightarrow{\pi_\Sigma} M\,,$$

una fibrazione in sfere di dimensione $n+1$ su M.

Sia $P \in {\Psi_{\mathrm{cl}}}^d(M; F_0, F_1)$ un operatore ellittico e sia $\widehat{\sigma}_{\mathrm{pr}}(P) \in C^\infty(S^*M, \mathrm{Hom}(\pi_S^* F_0, \pi_S^* F_1))$ il simbolo principale asintotico di P. Per alleggerire la notazione denotiamo il simbolo principale asintotico con p. Dato che P è ellittico p ha valori negli isomorfismi fra $\pi_S^* F_0$ e $\pi_S^* F_1$. Possiamo allora incollare $\pi_B^* F_0 \to B_1^* M$ con $\pi_B^* F_1 \to B_1^* M$ tramite p ottenendo un fibrato vettoriale

$$\Sigma(p) \to \Sigma M\,.$$

Sia $\mathrm{Ch}(\Sigma(p)) \in H^*_{dR}(\Sigma M) = H^*(\Sigma M, \mathbb{C})$ il carattere di Chern di questo fibrato e sia $\mathrm{Td}(T^*M \otimes \mathbb{C}) \in H^*_{dR}(M) = H^*(M, \mathbb{C})$ la classe di Todd del fibrato tangente complessificato.

Teorema 30. *(Formula dell'indice di Atiyah-Singer) Sia M una varietà differenziabile compatta senza bordo di dimensione n Sia $P \in {\Psi_{\mathrm{cl}}}^d(M; F_0, F_1)$ un operatore ellittico con simbolo principale asintotico p. Vale la formula:*

$$\begin{aligned} \operatorname{ind} P &= (-1)^{n(n+1)/2} \int_{\Sigma M} \mathrm{Ch}(\Sigma(p)) \wedge \pi_\Sigma^* \mathrm{Td}(T^*M \otimes \mathbb{C}) \\ &\equiv (-1)^{n(n+1)/2} < \mathrm{Ch}(\Sigma(p)) \cup \pi_\Sigma^* \mathrm{Td}(T^*M \otimes \mathbb{C}), [\Sigma M] > \;. \end{aligned}$$

Osservazioni.

1. Ci sono altre formulazioni della formula di Atiyah-Singer; quella che abbiamo scelto minimizza i requisiti di topologia algebrica. Ad esempio, se M è orientabile, si può dare una formula integrale direttamente su M utilizzando l'isomorfismo di Thom in coomologia ([8]). Più precisamente: applicando il charattere di Chern per spazi localmente compatti seguito dall'inverso dell'isomorfimo di Thom in coomologia alla classe di K-teoria $[p] \in K(T^*M)$ otteniamo una classe $\phi^{-1}(\mathrm{Ch}[p]) \in H^*(M, \mathbb{C})$ e la formula di Atiyah-Singer diventa

$$\operatorname{ind}(P) = (-1)^{n(n+1)/2} < \phi^{-1}(\mathrm{Ch}[p]) \cup \mathrm{Td}(T^*M \otimes \mathbb{C}), [M] > \;. \tag{102}$$

2. Ovviamente, utilizzando l'isomorfismo di de Rham, come abbiamo già fatto nell'enunciato del teorema, possiamo esprimere l'indice di P come l'integrale del prodotto esterno di due forme differenziali

$$\operatorname{ind}(P) = (-1)^{n(n+1)/2} \int_M \phi^{-1}(\mathrm{Ch}[p]) \wedge \mathrm{Td}(T^*M \otimes \mathbb{C})\,. \tag{103}$$

15. **Teoremi di Chern-Gauss-Bonnet, della segnatura di Hirzebruch e di Riemann-Roch-Hirzebruch.**

A questo punto si hanno tutti gli strumenti per poter enunciare tre importanti teoremi, veri e propri *best sellers* della geometria moderna.

Teorema 31. (Chern - Gauss - Bonnet) *Sia M una varietà compatta senza bordo e orientabile di dimensione $2m$. Indicata con*

$$\chi(M) \;=\; \sum_{i=0}^{2m}(-1)^i dim\, H^i(M)$$

la **caratteristica di Eulero - Poincarè** *di M, si ha:*

$$\int_M e(M,\nabla^{TM}) \;=\; \chi(M)$$

Dimostrazione. La dimostrazione puo' essere data direttamente oppure come segue: dal teorema di Hodge-de Rham sappiamo che $\chi(M)$ è l'indice dell' operatore $d + d^*$ sulle forme pari (detto operatore di Gauss-Bonner). A questo punto si applica Atiyah-Singer nella sua formulazione coomologica. Dopo un pò di calcoli si arriva all'espressione $\int_M e(M,TM)$.

Prima di passare al proosimo importante teorema definiamo un importante variante dell'operatore di Gauss-Bonnet. Sia M una varietà tale che $\dim M = 2k$. Sia $\tau = (\sqrt{-1})^{p(p-1)+k}*$ con

$$\tau : \Lambda^p_{\mathbb{C}}M \to \Lambda^{n-p}_{\mathbb{C}}M$$

ove $\Lambda^p_{\mathbb{C}}M \equiv \Lambda^p M \otimes \mathbb{C}$. È chiaro che τ definisce una nuova graduazione di $\Lambda^*_{\mathbb{C}}M$, diversa da quella in pari/dispari. È anche chiaro che $(d+d^*)\tau = -\tau(d+d^*)$. Sia

$$\Lambda^{\pm}_p M = \{\omega \in \Lambda^*_p M \otimes \mathbb{C} \;:\; \tau\omega = \pm\omega\}$$

Da quanto detto $C^\infty(M,\Lambda^*_{\mathbb{C}}M) = C^\infty(M,\Lambda^+_{\mathbb{C}}M) \oplus C^\infty(M,\Lambda^-_{\mathbb{C}}M)$ e $d + d^*$ è dispari rispetto a questa decomposizione. L'operatore di segnatura D^{sign} è per definizione l'operatore $d + d^*|_{\Lambda^+}$

Teorema 32. (della segnatura di Hirzebruch) *Sia M come nel teorema (31) di dimensione $4m$. Si consideri la forma bilineare simmetrica*

$$H^{2m}_{dR}(M,\mathbf{R}) \times H^{2m}_{dR}(M,\mathbf{R}) \longrightarrow H^{4m}_{dR}(M,\mathbf{R}) \;=\; \mathbf{R}$$

che agisce sulle coppie di $2m$-forme come:

$$([\alpha],[\beta]) \longmapsto \int_M [\alpha\wedge\beta]$$

e sia $\sigma(M)$ la sua segnatura. [21] *Si ha*

$$\sigma(M) \;=\; \int_M L(M)$$

dove $L(M) = [L(TM,\,\nabla^{TM})]$ è la classe di Hirzebruch.

[21] Si può anche definire la segnatura utilizzando la coomologia singolare, il prodotto cup e la classe fondamentale in omologia.

Dimostrazione. Dal teorema di Hodge è facile dimostrare che la segnatura è l'indice dell'operatore D^{sign}. A questo punto si applica Atiyah-Singer nella sua formulazione coomologica. Dopo un pò di calcoli si arriva all'espressione $\int_M L(M)$

Sia M una varietà complessa. Sia $E \to M$ un fibrato complesso olomorfo su M. Sappiamo che e' ben definito l'operatore

$$\bar{\partial} : C^\infty(M, \textstyle\bigwedge^{p,q}(M) \otimes E) \longrightarrow C^\infty(M, \textstyle\bigwedge^{p,q+1}(M) \otimes E)\,.$$

Più precisamente, se $\{e_j\}$ è una base locale olomorfa di E, allora, per definizione:

$$\bar{\partial} : (\omega \otimes e_j) \longmapsto \bar{\partial}\omega \otimes e_j$$

dove $\omega \otimes e_j \in C^\infty(M, \bigwedge^{p,q}(M) \otimes E)$, se $\omega \in \bigwedge^{p,q}(M)$ (è facile vedere che la definizione non dipende dalla base olomorfa scelta).

Teorema 33. (Riemann - Roch - Hirzebruch) *Sia M una varietà complessa e E un fibrato olomorfo. Si possono definire*

$$H^{0,\,i}(M, \mathcal{O}(E))\,,$$

gruppi di coomologia a valori nel fascio delle sezioni olomorfe di E. Se E è banale di rango 1 allora ottenamo $\mathcal{O}$; se E è la potenza esterna p-ma del fibrato cotangente olomorfo allora otteniamo $\Omega^p_{\mathcal{O}}$. Indicando con

$$\chi(M,\, \mathcal{O}(E)) \,=\, \sum_i (-1)^i dim H^{0,\,i}(M, \mathcal{O}(E))$$

la caratteristica di Eulero della coomologia a valori nel fascio $\mathcal{O}(E)$, risulta

$$\chi(M,\, \mathcal{O}(E)) \,=\, \int_M Td(M) \wedge Ch(E)$$

dove $Td(M) = [Td(T^{1,0}M,\, \nabla)]$ è la classe di Todd di M e $Ch(E)$ la classe di Chern di E. In particolare per il **genere aritmetico** *della varietà, $\chi(M, \mathcal{O})$, risulta*

$$\chi(M,\, \mathcal{O}) \,=\, \int_M Td(M)$$

Dimostrazione. Una non-difficile estensione di ciò che abbiamo fatto a lezione e cioè il teorema di Dolbeault prima ed il teorema di Hodge dopo, dimostra che $\chi(M,\, \mathcal{O}(E))$ è l'indice dell'operatore $\overline{\partial}_E + \overline{\partial}^*_E$ sulle forme di grado pari. Si veda ad esempio Wells pp 62 e 63 per il teorema di Dolbeault e Wells pp 151 e 152 per il teorema di Hodge. Basta ora applicare Atiyah-Singer.

References

[1] M. Atiyah. *K-Theory*, Benjamin, New York, 1967.

[2] N. Berline, E. Getzler e M. Vergne. *Heat kernels and Dirac operators*, Springer-Verlag 1992.

[3] P. Griffiths, J. Harris. *Priciples of Algebraic Geometry*, Wiley, New York.

[4] D. Husemmoler. *Fibre bundles*, GTM Vol. 20, Springer-Verlag, 1975.

[5] K. Kodaira. *Complex manifolds and deformations of complex structures*. Grundlehren der Math. Wiss. **283**. Springer.

[6] H. B. Lawson, M. Michelshon. *Spin Geometry* Princeton Mathematical Series, Vol 38.

[7] J. Milnor. *Morse theory*, Ann. Math. Studies 51, Princeton University Press, Princeton 1963.

[8] J. Milnor e J.D. Stasheff. *Characteristic classes*, Ann. Math. Studies 51, Princeton University Press, Princeton 1974.

[9] J. Roe. *Elliptic operators, topology and asymptotic methods* (Second Edition). Longman Scientific and Technical 1998.

[10] E. Sernesi. *Geometria 2*. Bollati-Boringhieri.

[11] M. Shubin. *Pseudodifferential operators and spectral theory*. Second Edition. Springer-Verlag.

[12] M. Spivak. *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, vol. I, II ed., Publish or Perish, Inc., Wilmington, Delaware, 1979.

[13] F. Warner. *Foundations of Differentiable manifolds and Lie Groups*. Graduate text in Mathematics **94**. Springer-Verlag.

[14] R. O. Wells Jr. *Differential analysis on complex manifolds* Graduate text in Mathematics. **65** Springer-Verlag.