

Paolo Piazza

# Corso di Geometria Differenziale

Appunti sui fibrati vettoriali

a.a. 2018-19

## CONTENTS

<b>1. Nozioni di base.</b>	<b>3</b>
1.1. Definizione di fibrato vettoriale.	3
1.2. Funzioni di transizione.	3
1.3. Morfismi di fibrati.	4
1.4. Esempi notevoli.	4
1.5. Operazioni sui fibrati.	5
<b>2. Sezioni e metriche.</b>	<b>6</b>
2.1. Sezioni di un fibrato.	6
2.2. Sottofibrato.	8
2.3. Metrica riemanniana su un fibrato reale.	8
2.4. Matrice locale della metrica rispetto ad una base locale.	8
References	9

## 1. Nozioni di base.

### 1.1. Definizione di fibrato vettoriale.

**Definizione 1.** Un fibrato vettoriale  $C^\infty$  di rango  $k$  è una terna  $(E, \pi, M)$ , dove  $E$  e  $M$  sono varietà  $C^\infty$ ,  $\pi : E \rightarrow M$  è un'applicazione  $C^\infty$  suriettiva, tale che per ogni  $m \in M$

- (i) la fibra  $E_m = \pi^{-1}(m)$  ha una struttura di spazio vettoriale di dimensione  $k$ ;
- (ii) esiste un intorno  $U$  di  $m$  e un diffeomorfismo  $\varphi_U : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^k$  tale che per ogni  $m' \in U$ 
  - a)  $\varphi_U(E_{m'}) \subseteq \{m'\} \times \mathbb{R}^k$
  - b)  $\varphi_U|_{E_{m'}} : E_{m'} \rightarrow \{m'\} \times \mathbb{R}^k$  è un isomorfismo di spazi vettoriali.

La varietà  $M$  è detta *base* del fibrato; la varietà  $E$  è detta *spazio totale* del fibrato.

Gli intorni  $U$  sono detti *intorni banalizzanti*, i diffeomorfismi  $\varphi_U$  *banalizzazioni locali*.

Se per ogni  $m \in M$  l'intorno  $U$  può essere scelto uguale ad  $M$ , il fibrato vettoriale si dice *banale*.

**Notazione.** Denoteremo spesso il fibrato  $(E, \pi, M)$  con  $(E \rightarrow M)$ , oppure, semplicemente con  $E$ .

### Definizioni analoghe.

- Fibrati vettoriali nella categoria degli spazi topologici e applicazioni continue.
- Fibrati vettoriali con fibra uno spazio vettoriale su  $\mathbb{C}$ .

### 1.2. Funzioni di transizione.

Dalla definizione segue che  $M$  ammette un ricoprimento  $\{U_\alpha\}$  con intorni banalizzanti, che chiameremo *ricoprimento banalizzante*. Per ogni coppia di aperti  $U_\alpha, U_\beta$  del ricoprimento, con  $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ , e per ogni  $m \in U_\alpha \cap U_\beta$  l'applicazione

$$g_{\alpha\beta}(m) = \varphi_{U_\alpha}|_{E_m} \circ \left( \varphi_{U_\beta}^{-1}|_{\{m\} \times \mathbb{R}^k} \right) : \\ \{m\} \times \mathbb{R}^k \rightarrow \{m\} \times \mathbb{R}^k$$

è un isomorfismo di spazi vettoriali.

Allora possiamo pensare alle  $g_{\alpha\beta}(m)$  come applicazioni

$$g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow GL(k, \mathbb{R}).$$

Queste vengono dette *funzioni di transizione* e verificano due proprietà:

- 1)  $g_{\alpha\alpha}(m) = \text{Id}_{\mathbb{R}^k} \quad \forall m \in U_\alpha \cap U_\alpha,$
- 2)  $g_{\alpha\beta} \circ g_{\beta\gamma} = g_{\alpha\gamma}$  in  $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma.$

Se  $M$  è una varietà differenziabile e se sono dati un ricoprimento  $\{U_\alpha\}$  di  $M$  e mappe  $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow GL(k, \mathbb{R})$  soddisfacenti le proprietà 1) e 2), allora è possibile definire un fibrato vettoriale  $(E, \pi, M)$  che ammetta le  $g_{\alpha\beta}$  come funzioni di transizione. Precisamente, consideriamo l'insieme  $\widehat{E}$  ottenuto prendendo l'unione disgiunta di tutti gli intorni  $U_\alpha \times \mathbb{R}^k$ ;  $\widehat{E}$  ha una naturale topologia. Introduciamo una relazione d'equivalenza  $\mathcal{R}$  in  $\widehat{E}$  come segue

$$U_\alpha \times \mathbb{R}^k \ni (x, e) \mathcal{R} (y, f) \in U_\beta \times \mathbb{R}^k \Leftrightarrow x = y \text{ e } e = g_{\alpha\beta}(x)f$$

Sia  $E$  lo spazio quoziente dotato della topologia indotta e sia  $\pi : E \rightarrow M$  la mappa che associa alla classe d'equivalenza di  $(x, e)$  il punto  $x \in M$ . Un esercizio istruttivo che comparirà in uno dei compiti a casa consiste nel dimostrare che  $(E, \pi, M)$  ha una naturale struttura di fibrato vettoriale.

Quindi si può dare una definizione alternativa di fibrato vettoriale, come una varietà  $M$  su cui siano dati un ricoprimento  $\{U_\alpha\}$  e una collezione di mappe differenziabili  $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow GL(k, \mathbb{R})$  soddisfacenti le proprietà 1) e 2).

### 1.3. Morfismi di fibrati.

**Definizione 2.** Siano  $(E, \pi, M)$  e  $(F, \pi', M)$  due fibrati vettoriali (sulla stessa base). Un *morfismo di fibrati* da  $(E, \pi, M)$  a  $(F, \pi', M)$  è un'applicazione differenziabile  $f : E \rightarrow F$  che manda omomorficamente fibre in fibre corrispondenti, ovvero tale che per ogni  $m \in M$

- 1)  $f(E_m) \subseteq F_m$
- 2)  $f|_{E_m} : E_m \rightarrow F_m$  è un omomorfismo di spazi vettoriali.

Un morfismo di fibrati  $f : E \rightarrow F$  si dice *isomorfismo di fibrati* se è un diffeomorfismo e manda isomorficamente fibre in fibre corrispondenti, ovvero se per ogni  $m \in M$

$$f|_{E_m} : E_m \rightarrow F_m$$

è un isomorfismo di spazi vettoriali. Un'analoga definizione vale nel caso topologico (richiederemo semplicemente che  $f$  sia continua e, nel caso di un isomorfismo, che sia un omeomorfismo).

Il seguente lemma è di facile dimostrazione (esercizio).

**Lemma 1.** Siano  $(E, \pi_E, M)$  e  $(F, \pi_F, M)$  due fibrati vettoriali. Sia  $f : E \rightarrow F$  un morfismo di fibrati e supponiamo che  $f|_{E_m}$  sia un isomorfismo per ogni  $m \in M$ . Allora  $f$  è un isomorfismo di fibrati (e cioè  $f$  è anche un diffeomorfismo).

### 1.4. Esempi notevoli.

**Esempio 1.** Sia  $M$  una varietà differenziabile. Per ogni punto  $m \in M$  indichiamo con  $T_m M$  lo spazio tangente alla varietà  $M$  nel punto  $m$ . Poniamo

$$TM = \bigcup_{m \in M} T_m M$$

e definiamo  $\pi : TM \rightarrow M$  ponendo  $\pi(x) = m$  se  $x \in T_m M$ . Si verifica che  $(TM, \pi, M)$  è un fibrato vettoriale il cui rango è uguale alla dimensione di  $M$ . Anche questo sarà un esercizio. Tale fibrato vettoriale si dice *fibrato tangente* ad  $M$ . Per ulteriori informazioni sulla struttura di varietà differenziabile di  $TM$  potete consultare [3].

**Esempio 2.** Sia  $\mathbb{R}P^n$  lo spazio proiettivo di dimensione  $n$ . Ricordiamo che  $\mathbb{R}P^n \cong S^n / \sim$ , dove  $\sim$  è la relazione che identifica i vettori  $\underline{x}$  e  $-\underline{x}$ . Sappiamo che  $\mathbb{R}P^n$  è una varietà differenziabile compatta. Consideriamo l'insieme

$$E_1(\mathbb{R}^{n+1}) = \{([\underline{x}], \underline{v}) \in \mathbb{R}P^n \times \mathbb{R}^{n+1} : \underline{v} = \lambda \underline{x}\}$$

e l'applicazione  $\pi : E_1(\mathbb{R}^{n+1}) \rightarrow \mathbb{R}P^n$  definita da  $\pi([\underline{x}], \underline{v}) = [\underline{x}]$ . La terna  $(E_1(\mathbb{R}^{n+1}), \pi, \mathbb{R}P^n)$  è un fibrato vettoriale di rango 1. Facciamo vedere come trovare banalizzazioni locali: per ogni  $[\underline{x}] \in \mathbb{R}P^n$ , consideriamo  $U_1$ , un intorno di  $\underline{x}$  in  $S^n$  ad intesezione vuota con la sua immagine tramite la mappa antipodale; l'aperto  $U = U_1 / \sim \subseteq \mathbb{R}P^n$  è un intorno banalizzante di  $[\underline{x}]$  e il diffeomorfismo  $\varphi_U : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}$  definito da  $\varphi_U([\underline{x}], t\underline{x}) = ([\underline{x}], t)$  è una banalizzazione locale.

**Esempio 3.** Sia  $n > k$ . Poniamo

$$G_k(\mathbb{R}^n) = \{\text{sottospazi vettoriali } k\text{-dimensionali di } \mathbb{R}^n\}.$$

Richiamiamo brevemente le proprietà di  $G_k(\mathbb{R}^n)$ . Lo spazio  $G_k(\mathbb{R}^n)$  ha una naturale topologia: sia  $V_k(\mathbb{R}^n)$  l'aperto di  $\mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n$   $k$ -volte costituito dalle  $k$ -ple di vettori linearmente indipendenti. Esiste una suriezione  $\pi : V_k(\mathbb{R}^n) \rightarrow G_k(\mathbb{R}^n)$

$$\pi(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k) = \text{Span}(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k).$$

Dotiamo  $G_k(\mathbb{R}^n)$  della topologia quoziente:  $U$  è aperto in  $G_k(\mathbb{R}^n)$  se e solo se  $\pi^{-1}(U)$  è aperto in  $V_k(\mathbb{R}^n)$ .  $G_k(\mathbb{R}^n)$  ha una naturale struttura di varietà differenziabile compatta connessa di dimensione  $n(n-k)$ <sup>1</sup>.  $G_k(\mathbb{R}^n)$  è detta la *Grassmanniana dei  $k$ -piani in  $\mathbb{R}^n$* .

Consideriamo l'insieme

$$E_k(\mathbb{R}^n) = \{(p, \underline{v}) \in G_k(\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n : \underline{v} \in p\}$$

e l'applicazione  $\pi : E_k(\mathbb{R}^n) \rightarrow G_k(\mathbb{R}^n)$  definita da  $\pi(p, \underline{v}) = p$ . La terna  $(E_k(\mathbb{R}^n), \pi, G_k(\mathbb{R}^n))$  è un fibrato vettoriale di rango  $k$  e  $C^\infty$ . La verifica di questa ultima affermazione è un interessante esercizio<sup>2</sup>. Si noti che per  $k=1$  riotteniamo l'esempio 2.

$(E_k(\mathbb{R}^n), \pi, G_k(\mathbb{R}^n))$  è detto *fibrato universale* sulla Grassmanniana.

### Osservazioni.

1. C'è un'applicazione naturale

$$(1) \quad \psi : G_k(\mathbb{R}^n) \rightarrow G_{n-k}(\mathbb{R}^n)$$

ottenuta mandando  $V$  in  $V^\perp$ . Quest'applicazione è un diffeomorfismo.

2. Alcuni autori definiscono la Grassmanniana  $G_k(\mathbb{R}^n)$  come l'insieme dei sottospazi di *codimensione*  $k$  in  $\mathbb{R}^n$ . Le due definizioni sono compatibili tramite l'applicazione  $\psi$  in (1).

### 1.5. Operazioni sui fibrati.

Sia  $V$  uno spazio vettoriale reale. L'insieme delle forme bilineari su  $V$  ha una naturale struttura di spazio vettoriale reale che denotiamo  $\text{Bil}(V)$ .

Dati 2 fibrati su  $M$ ,  $(E, \pi^E, M)$  e  $(F, \pi^F, M)$ , si possono definire i fibrati

$$E^*, \text{Bil}(E), E \oplus F, \text{Hom}(E, F)$$

a partire dalle corrispondenti operazioni sulle fibre. Ad esempio, poniamo

$$E \oplus F := \cup_{m \in M} E_m \oplus F_m;$$

rimane allora definito il fibrato  $(E \oplus F, \pi^{E \oplus F}, M)$  che per costruzione ha come fibre  $(\pi^{E \oplus F})^{-1}(m) = E_m \oplus F_m$ . La banalità locale è ereditata da quella di  $E$  ed  $F$ : per ipotesi  $\forall m \in M$  esistono aperti  $U^E, U^F$  e diffeomorfismi locali

$$\phi^E : (\pi^E)^{-1}(U^E) \rightarrow U^E \times \mathbb{R}^k$$

$$\phi^F : (\pi^F)^{-1}(U^F) \rightarrow U^F \times \mathbb{R}^n$$

con cui si costruisce il diffeomorfismo

$$\phi^{E \oplus F} : (\pi^{E \oplus F})^{-1}(U^E \cap U^F) \rightarrow U^E \cap U^F \times \mathbb{R}^{k+n}$$

che dà la banalizzazione di  $E \oplus F$ . Lascio a voi i dettagli. (Esiste di fatto un meta-teorema: qualsiasi funtore (continuo in un opportuno senso) nella categoria degli spazi vettoriali produce

<sup>1</sup>questo è il lungo esercizio "guidato" di uno dei compiti a casa

<sup>2</sup>per il quale però dovete aver risolto l'esercizio sulla Grassmanniana

un nuovo fibrato applicando tale funtore alle fibre: si veda il libro di Atiyah [1] oppure quello di Milnor-Stasheff [2].)

## 2. Sezioni e metriche.

### 2.1. Sezioni di un fibrato.

**Definizione 3.** Sia  $(E, \pi, M)$  un fibrato vettoriale. Una *sezione*  $C^\infty$  del fibrato è un'applicazione differenziabile  $s : M \rightarrow E$  tale che  $\pi \circ s = \text{Id}|_M$  ovvero tale che per ogni  $m \in M$  risulti  $s(m) \in E_m = \pi^{-1}(m)$ .

Denotiamo con  $C^\infty(M, E)$  l'insieme delle sezioni  $C^\infty$  del fibrato  $(E, \pi, M)$ <sup>3</sup>. Si noti che, poiché ogni fibra è uno spazio vettoriale, anche  $C^\infty(M, E)$  è uno spazio vettoriale, le cui operazioni sono definite punto per punto. Notiamo anche che  $C^\infty(M, E)$  ha una naturale struttura di  $C^\infty(M)$ -modulo: se  $f \in C^\infty(M)$  e  $s \in C^\infty(M, E)$  allora  $fs$  è la sezione che in  $m$  vale  $f(m)s(m)$ .

Una sezione del fibrato tangente  $TM$  ad una varietà differenziabile  $M$  è detta **un campo di vettori**.

**Proposizione 1.** *Un fibrato vettoriale  $(E, \pi, M)$  di rango  $k$  è banale se e solo se esistono  $k$  sezioni  $C^\infty$   $s_1, \dots, s_k$  linearmente indipendenti, ovvero tali che  $s_1(m), \dots, s_k(m)$  siano linearmente indipendenti per ogni  $m \in M$ .*

*Dimostrazione.*

$\Rightarrow$  Supponiamo  $(E, \pi, M)$  banale. Allora esiste una mappa di fibrati  $\Phi : E \rightarrow M \times \mathbb{R}^k$  che induce un isomorfismo  $\Phi : E_m \rightarrow \{m\} \times \mathbb{R}^k$  su ogni fibra. Sia  $\Psi = \Phi^{-1} : M \times \mathbb{R}^k \rightarrow E$  e definiamo le applicazioni  $s_i : M \rightarrow E$  ponendo  $s_i(m) = \Psi(m, \underline{e}_i)$  (dove  $\underline{e}_i$  è l' $i$ -esimo vettore canonico di  $\mathbb{R}^k$ ). Le applicazioni  $s_1, \dots, s_k$  sono sezioni  $C^\infty$  e per costruzione sono linearmente indipendenti.

$\Leftarrow$  Supponiamo che esistano  $k$  sezioni  $C^\infty$   $s_1, \dots, s_k$  linearmente indipendenti. Definiamo  $\Psi : M \times \mathbb{R}^k \rightarrow E$  ponendo  $\Psi(m, \underline{x}) = x^1 s_1(m) + \dots + x^k s_k(m)$ . L'applicazione  $\Psi$  è  $C^\infty$  e induce un isomorfismo su ogni fibra. Allora non è difficile vedere, questo è il Lemma 1, che  $\Psi$  è un diffeomorfismo. Quindi  $(E, \pi, M)$  è banale.  $\square$

**Osservazione 1.** Notiamo che la dimostrazione stabilisce l'esistenza *locale* di  $k$  sezioni linearmente indipendenti su ogni aperto banalizzante. Si dice che queste sezioni costituiscono una **base locale**.

**Esempio.** Il fibrato  $(E_1(\mathbb{R}^{n+1}), \pi, \mathbb{R}P^n)$  non è banale.

*Dimostrazione.* Basta far vedere che ogni  $s \in C^\infty(\mathbb{R}P^n, E_1(\mathbb{R}^{n+1}))$  si annulla in un punto. Sia  $s : \mathbb{R}P^n \rightarrow E_1(\mathbb{R}^{n+1})$  una sezione. Sia  $p : S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$  la proiezione canonica. L'applicazione  $q = s \circ p : S^n \rightarrow E_1(\mathbb{R}^{n+1})$  è tale che  $q(\underline{x}) = ([\underline{x}], t(\underline{x})\underline{x})$ , con  $t \in C^\infty(S^n)$ . Inoltre, poiché  $q(-\underline{x}) = q(\underline{x})$ , si deve avere  $t(-\underline{x}) = -t(\underline{x})$ . Allora, poiché  $S^n$  è connessa e in particolare  $t \in C^0(S^n)$ , deve esistere  $\underline{x}_0 \in S_n$  tale che  $t(\underline{x}_0) = 0$ , ovvero tale che  $s([\underline{x}_0]) = ([\underline{x}_0], \underline{0})$ .  $\square$

Possiamo dare anche una definizione alternativa di sezione. Sia  $(E, \pi, M)$  un fibrato vettoriale, con ricoprimento  $\{U_\alpha\}$  e funzioni di transizione  $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow GL(k, \mathbb{R})$ . Una *sezione*  $C^\infty$  del

<sup>3</sup>In molti libri trovate il simbolo  $\Gamma(E)$  per lo spazio delle sezioni di  $E$

fibrato è allora una collezione  $\{s_\alpha\}$  di mappe  $s_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^k$  differenziabili tali che per ogni coppia di aperti  $U_\alpha$  e  $U_\beta$  non disgiunti e per ogni  $m \in U_\alpha \cap U_\beta$  risulti

$$s_\alpha(m) = g_{\alpha\beta}(m) s_\beta(m).$$

Le due definizioni sono equivalenti.

Sia  $s$  una sezione  $C^\infty$  (nel senso della prima definizione). Occorre verificare che esiste una collezione  $\{s_\alpha\}$  di mappe che soddisfa le condizioni richieste nella seconda definizione. Sia  $m \in M$  e siano  $U_\alpha$  un intorno di  $m$  banalizzante e  $\varphi_\alpha$  una banalizzazione locale su  $U_\alpha$ . Se  $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_k$  sono i vettori della base canonica di  $\mathbb{R}^n$ ,  $\varphi_\alpha^{-1}(m, \underline{e}_1), \dots, \varphi_\alpha^{-1}(m, \underline{e}_k)$  sono una base di  $E_m$ . Quindi esistono  $k$  numeri, che chiamo

$$s_\alpha^1(m), \dots, s_\alpha^k(m)$$

tali che

$$s(m) = \sum_{i=1}^k s_\alpha^i(m) \varphi_\alpha^{-1}(m, \underline{e}_i).$$

Allora, considerando la restrizione di  $s$  a  $U_\alpha \cap U_\beta$ , si ha

$$s|_{U_\alpha \cap U_\beta} = \sum_{i=1}^k s_\alpha^i(m) \varphi_\alpha^{-1}(m, \underline{e}_i) = \sum_{i=1}^k s_\beta^i(m) \varphi_\beta^{-1}(m, \underline{e}_i).$$

Applicando  $\varphi_\alpha$  al secondo e terzo membro, si ha

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k s_\alpha^i(m) \underline{e}_i &= \sum_{i=1}^k s_\beta^i(m) \left( \varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} \right) (m, \underline{e}_i) = \\ &= \sum_{i=1}^k s_\beta^i(m) g_{\alpha\beta}(m) (\underline{e}_i) = \\ &= \sum_{i=1}^k s_\beta^i(m) (g_{\alpha\beta}(m))_i^j (\underline{e}_j). \end{aligned}$$

dove l'indice in basso in  $(g_{\alpha\beta}(m))_i^j$  è l'indice di colonna.

Quindi

$$s_\alpha^k(m) = s_\beta^i(m) (g_{\alpha\beta}(m))_i^k,$$

Allora, ponendo  $s_\alpha = (s_\alpha^1, \dots, s_\alpha^k)^t$ , si ottiene

$$s_\alpha = g_{\alpha\beta} s_\beta.$$

La collezione  $\{s_\alpha\}$  è costituita da funzioni  $C^\infty$  (lascio a voi la verifica) e soddisfa le condizioni richieste nella seconda definizione.

Il viceversa è chiaro: siano date  $\{s_\alpha\}$  verificanti la condizione della seconda definizione. Sia  $m \in M$  e assumiamo che  $m \in U_\alpha$ ; allora possiamo definire una sezione globale  $s$  dichiarando il suo valore in  $m$  uguale a

$$\sum_{i=1}^k s_\alpha^i(m) \varphi_\alpha^{-1}(m, \underline{e}_i).$$

Dalla condizione  $s_\alpha = g_{\alpha\beta} s_\beta$  verifichiamo senza difficoltà che  $s$  è ben definita.

## 2.2. Sottofibrato.

Sia  $(E, \pi, M)$  un fibrato vettoriale di rango  $k$ . Sia  $F$  una sottovarietà di  $E$ . Diremo che  $(F, \pi|_F, M)$  è un sottofibrato se

- $\forall m \in M$  si ha che  $F \cap E_m$ , con  $E_m := \pi^{-1}(m)$ , è un sottospazio vettoriale di  $E_m$  di dimensione  $\ell < k$ ;
- $\forall m \in M \exists U$ , intorno di  $x$ , e una banalizzazione locale di  $E$  :

$$\phi_U : E_U := \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^k$$

tale che la restrizione ad  $F$  fornisce una banalizzazione locale di  $F$ :

$$\phi_U|_F : F_U \rightarrow U \times \mathbb{R}^\ell \subset U \times \mathbb{R}^\ell.$$

In termini delle funzioni di transizione: possiamo scrivere in una tale banalizzazione

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} h_{\alpha\beta} & k_{\alpha\beta} \\ 0 & j_{\alpha\beta} \end{pmatrix}$$

e le  $h_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow GL(\ell, \mathbb{R})$  sono le funzioni di transizione di  $(F, \pi, M)$ .

## 2.3. Metrica riemanniana su un fibrato reale.

Dato un fibrato reale  $(E, \pi, M)$ , si definisce una metrica  $g$  come una sezione del fibrato  $\text{Bil}(E)$ ,  $g \in C^\infty(M, \text{Bil}(E))$ , tale che  $g(m)$ , forma bilineare su  $E_m \times E_m$ , sia *simmetrica*,  $g(m)(u, v) = g(m)(v, u)$ , e definita positiva:

$$g(m)(v, v) > 0 \forall v \in E_m \setminus \{0\}$$

Utilizzando una partizione dell'unità<sup>4</sup> per  $M$  si dimostra senza particolari difficoltà che **esiste sempre una metrica su un fibrato**  $E$ : basterà definire metriche locali  $g^\alpha(, )$  su ogni intorno banalizzante (e questo si può fare utilizzando la banalizzazione  $\psi_\alpha$  e la metrica standard su  $U_\alpha \times \mathbb{R}^k$ ); poi si considera una partizione dell'unità  $\{f_\alpha\}$  subordinata a  $\{U_\alpha\}$  e per ogni  $m \in M$  la forma  $g(m)(, ) := \sum_\alpha f_\alpha(m)g^\alpha(m)(, )$ . È facile vedere a questo punto che  $g$  definisce una metrica su  $E$ .

Se  $E = TM$  allora una metrica  $g$  su  $E$  si dice una **metrica riemanniana sulla varietà**  $M$ .

## 2.4. Matrice locale della metrica rispetto ad una base locale.

Tramite le banalizzazioni locali abbiamo  $\forall U_\alpha$ , intorno banalizzante, una base locale di sezioni (già visto). Infatti se  $\psi_\alpha : U_\alpha \times \mathbb{R}^k \rightarrow \pi^{-1}(U_\alpha)$  è una banalizzazione locale, fissata una base  $e_i$  in  $\mathbb{R}^k$ , si ha una base locale di sezioni definita da:

$$e_i^\alpha(m) := \psi_\alpha(m, e_i) \in C^\infty(U_\alpha, E)$$

(Attenzione: queste sono **sezioni** del fibrato  $E|_{U_\alpha}$ ...)

Se  $u, v$  sono sezioni di  $\pi^{-1}(U_\alpha)$ , allora  $u = \lambda^i e_i^\alpha$  e  $v = \mu^j e_j^\alpha$ , dove si è utilizzata la convenzione della somma su indici ripetuti e:

$$g(u, v) = \lambda^i \mu^j g(e_i^\alpha, e_j^\alpha)$$

Dunque  $\forall m \in U_\alpha$ ,  $g(e_i^\alpha, e_j^\alpha)(m) := g_{ij}(\alpha)(m)$  è la matrice locale della metrica rispetto alla base locale  $\{e_i^\alpha\}$  calcolata in  $m$ .

Sia  $\{\eta_i^\alpha\}$  un'altra base locale con

$$\eta_i^\alpha = G_i^j e_j^\alpha$$

<sup>4</sup>Leggete il Warner o il Sernesi 2 per la nozione di partizione dell'unità (esistenza e proprietà)



allora la matrice locale della metrica rispetto a  $\eta_j^\alpha$ , e cioè  $g(\eta_i^\alpha, \eta_j^\alpha)$ , è uguale a  $G^T g G$ . In particolare, si considerino due intorni banalizzanti  $U_\alpha, U_\beta$  ed in  $U_\alpha \cap U_\beta$  le basi  $\{e_i^\alpha\}, \{e_i^\beta\}$  definite come sopra utilizzando le due banalizzazioni, allora  $e_i^\beta = (g_{\alpha\beta})_i^j e_j^\alpha$ , dove vi ricordo ancora una volta che queste sono sezioni e non coordinate.

Se  $g(\alpha)(m)$  è la matrice della metrica  $\forall m \in U_\alpha$ , si ha quindi :

$$g(\beta) = g_{\alpha\beta}^T g(\alpha) g_{\alpha\beta}$$

Quest'ultima relazione può essere utilizzata per definire la metrica mediante le funzioni di transizione  $g_{\alpha\beta}$ .

#### REFERENCES

- [1] M. Atiyah. *K-Theory*, Benjamin, New York, 1967.
- [2] J. Milnor e J.D. Stasheff. *Characteristic classes*, Ann. Math. Studies 51, Princeton University Press, Princeton 1974.
- [3] F. Warner. *Foundations of Differentiable manifolds and Lie Groups*. Graduate text in Mathematics **94**. Springer-Verlag.