

Appunti sulle notazioni di Sernesi "Geometria 1"

**Informazioni primarie.**

Siano  $V$  e  $W$  due spazi vettoriali e sia  $T : V \rightarrow W$  un'applicazione lineare. Fissiamo una base  $\mathcal{B}$  per  $V$  ed una base  $\mathcal{E}$  per  $W$ . Scriviamo per esteso  $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$  e  $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_m\}$ . Denotiamo la matrice associata a  $T$  con questa scelta di basi,  $\mathcal{B}$  = base di partenza;  $\mathcal{E}$  = base di arrivo, tramite il simbolo

$$M_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(T).$$

Memorizzate a questo punto la posizione delle due basi: la base a sinistra è la base di arrivo, mentre la base a destra è la base di partenza. Per definizione,  $M_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(T)$  è la matrice che ha come  $j$ -ma colonna le coordinate di  $T(b_j)$  nella base  $\mathcal{E}$ .

Una volta che le basi  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{E}$  sono fissate, possiamo riguardare  $M_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(\ )$  come un'applicazione dall'insieme delle applicazioni lineari tra  $V$  e  $W$  e l'insieme delle matrici  $m \times n$ . Sappiamo che questi due insiemi hanno ognuno un'ulteriore struttura: sono spazi vettoriali. Non è difficile dimostrare che l'applicazione

$$M_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(\ ) : \text{Hom}(V, W) \rightarrow M_{\dim W, \dim V}(\mathbb{K})$$

che associa a  $T$  la matrice  $M_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(T)$  è lineare, ed è in effetti un isomorfismo, abbiamo cioè

$$M_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(\ ) : \text{Hom}(V, W) \xrightarrow{\cong} M_{\dim W, \dim V}(\mathbb{K})$$

La dimostrazione è data nel libro di Sernesi, Teorema 12.2.

Se  $\underline{x}$  sono le coordinate di  $\underline{v}$  nella base  $\mathcal{B}$  e se  $\underline{y}$  sono le coordinate di  $\underline{w} := T(\underline{v})$  nella base  $\mathcal{E}$  allora

$$(1) \quad \underline{y} = M_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(T)\underline{x}.$$

Nel caso particolare in cui  $V = W$ , possiamo considerare l'applicazione lineare identità  $\text{Id}_V : V \rightarrow V$ :  $\text{Id}_V(\underline{v}) = \underline{v}$ .

Date due basi  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{B}'$  di  $V$ , avremo una matrice  $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\text{Id}_V)$  che rappresenta l'identità di  $V$  rispetto a queste due basi. Osserviamo che, per definizione, la matrice  $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\text{Id}_V)$  è la matrice che ha come  $j$ -ma colonna le coordinate di  $\text{Id}_V(b'_j)$ , e cioè di  $b'_j$ , nella base  $\mathcal{B}$ . Osserviamo anche che da (1) abbiamo

$$(2) \quad \underline{x} = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\text{Id}_V)\underline{x}'$$

e quindi  $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\text{Id}_V)$  trasforma le coordinate nella base  $\mathcal{B}'$  nelle coordinate rispetto alla base  $\mathcal{B}$ .

Analogamente,

$$(3) \quad \underline{x}' = M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\text{Id}_V)\underline{x}.$$

e quindi  $M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\text{Id}_V)$  trasforma le coordinate rispetto alla base  $\mathcal{B}$  nelle coordinate rispetto a  $\mathcal{B}'$ .

Sernesi, sulla base di (2), chiama  $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\text{Id}_V)$  la *matrice del cambiamento di coordinate, dalla base  $\mathcal{B}'$  alla base  $\mathcal{B}$* .

**Osservazione.** Altri libri di testo, ad esempio quelli di Marco Abate e Chiara de Fabritiis, danno alla matrice  $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\text{Id}_V)$  un nome diverso. Dalla definizione stessa di  $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\text{Id}_V)$  possiamo scrivere la relazione

$$(4) \quad \begin{vmatrix} \underline{b}'_1 & \underline{b}'_2 & \dots & \underline{b}'_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \underline{b}_1 & \underline{b}_2 & \dots & \underline{b}_n \end{vmatrix} \cdot M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\text{Id}_V)$$

(è un prodotto righe per colonne che è da intendersi in maniera formale). Sulla base di (4), Abate-de Fabritiis chiamano  $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\text{Id}_V)$  la *matrice del cambiamento di base, dalla base  $\mathcal{B}$  alla base  $\mathcal{B}'$*

**Ulteriori informazioni.** Gli isomorfismi  $M_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$  godono di un'importante proprietà rispetto alla composizione: se  $V, W$  ed  $U$  sono tre spazi vettoriali dotati di basi  $\mathcal{B}, \mathcal{E}$  e  $\mathcal{F}$  rispettivamente, e  $T: V \rightarrow W$  e  $S: W \rightarrow U$  sono applicazioni lineari allora

$$(5) \quad M_{\mathcal{F},\mathcal{B}}(S \circ T) = M_{\mathcal{F},\mathcal{E}}(S) \cdot M_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(T)$$

Notate come le due basi al centro si “elidono” La dimostrazione della formula è data in Sernesi.

Iterando la formula appena dimostrata, si ottiene la formula per la composizione di un numero arbitrario di applicazioni lineari. Ad esempio se  $F: U \rightarrow Z$  è un'ulteriore applicazione lineare, e  $\mathcal{G}$  è una base di  $Z$ , allora

$$\begin{aligned} M_{\mathcal{G},\mathcal{B}}(F \circ S \circ T) &= M_{\mathcal{G},\mathcal{B}}((F \circ (S \circ T))) \\ &= M_{\mathcal{G},\mathcal{F}}(F) \cdot M_{\mathcal{F},\mathcal{B}}(S \circ T) \\ &= M_{\mathcal{G},\mathcal{F}}(F) \cdot M_{\mathcal{F},\mathcal{E}}(S) \cdot M_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(T) \end{aligned}$$

Notate che continua a valere l'elisione delle basi al centro.

Un'applicazione particolare della formula composizione/prodotto riguarda la matrice associata all'applicazione inversa di un'applicazione invertibile  $\varphi: V \rightarrow W$ . Sia  $n = \dim V = \dim W$ . Abbiamo

$$M_{\mathcal{B},\mathcal{E}}(\varphi^{-1}) \cdot M_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(\varphi) = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(\varphi^{-1} \circ \varphi) = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(\text{Id}_V) = \text{Id}_n$$

L'ultima identità esprime il fatto che la matrice corrispondente all'applicazione identica  $\text{Id}_V: V \rightarrow V$ , rispetto ad una stessa base  $\mathcal{B}$ , scelta sia come base di partenza che di arrivo, è la matrice identità di rango  $\dim V$  (segue immediatamente dalla definizione). Analogamente otteniamo

$$M_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(\varphi) \cdot M_{\mathcal{B},\mathcal{E}}(\varphi^{-1}) = M_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\varphi \circ \varphi^{-1}) = M_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\text{Id}_W) = \text{Id}_n$$

Otteniamo così la formula

$$M_{\mathcal{B},\mathcal{E}}(\varphi^{-1}) = (M_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(\varphi))^{-1}$$

In particolare, per l'applicazione identica  $\text{Id}_V: V \rightarrow V$ , che ha come inversa se stessa,  $\text{Id}_V^{-1} = \text{Id}_V$ , otteniamo

$$(6) \quad M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\text{Id}_V) = (M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\text{Id}_V))^{-1}$$

Scriviamo  $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\text{Id}_V)^{-1}$  per  $(M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\text{Id}_V))^{-1}$ .

Un corollario immediato di quanto visto è la formula che lega le matrici che rappresentano un endomorfismo  $\varphi: V \rightarrow V$  rispetto a basi diverse  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{B}'$  (scelte sia come basi di partenza che come basi di arrivo). Se indichiamo con  $A$  la matrice che rappresenta  $\varphi$  nella base  $\mathcal{B}$  (scelta quindi come base di partenza e base di arrivo), con  $A'$  la matrice che rappresenta  $\varphi$  nella base  $\mathcal{B}'$  e con  $B$  la matrice  $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\text{Id}_V)$  allora

$$A' = B^{-1} \cdot A \cdot B \quad \text{e quindi} \quad A = B \cdot A' \cdot B^{-1}$$

La dimostrazione di una di queste due (equivalenti) formule a partire dalla formula (5) è particolarmente semplice. Dimostriamo ad esempio la seconda. Iniziamo con l'osservare che si ha:

$$A = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(\varphi); \quad A' = M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}'}(\varphi); \quad B = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\text{Id}_V); \quad B^{-1} = M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\text{Id}_V)$$

Dunque,

$$\begin{aligned} A &= M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(\varphi) \\ &= M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(\text{Id}_V \circ \varphi \circ \text{Id}_V) \\ &= M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\text{Id}_V) \cdot M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}'}(\varphi) \cdot M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\text{Id}_V) \\ &= B \cdot A' \cdot B^{-1} \end{aligned}$$