Geometria I. Prof. P. Piazza. a.a. 2017-18.

Appunti sulle notazioni del Sernesi

Informazioni primarie.
Siano V e W due spazi vettoriali e sia $T : V \to W$ un'applicazione lineare. Fissiamo una base $\mathcal{B}$ per V ed una base $\mathcal{E}$ per W. Scriviamo per esteso $\mathcal{B} = \{\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_n\}$ e $\mathcal{E} = \{\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_m\}$. Denotiamo la matrice associata a T con questa scelta di basi, $\mathcal{B}$ = base di partenza; $\mathcal{E}$ = base di arrivo, tramite il simbolo

$$M_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(T)\,.$$

Memorizzate a questo punto la posizione delle due basi: la base a sinistra è la base di arrivo, mentre la base a destra è la base di partenza. Per definizione, $M_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(T)$ è la matrice che ha come j-ma colonna le coordinate di $T(\underline{b}_j)$ nella base $\mathcal{E}$.
Una volta che le basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{E}$ sono fissate, possiamo riguardare $M_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(\quad)$ come un'applicazione dall'insieme delle applicazioni lineari tra V e W e l'insieme delle matrici $m \times n$. Sappiamo che questi due insiemi hanno ognuno un'ulteriore struttura: sono spazi vettoriali. Non è difficile dimostrare che l'applicazione

$$M_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(\ \ ) : \mathrm{Hom}(V,W) \to M_{\dim W, \dim V}(\mathbb{K})$$

che associa a T la matrice $M_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(T)$ è lineare, ed è in effetti un isomorfismo, abbiamo cioè

$$M_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(\ \ )\colon\ \mathrm{Hom}(V,W) \xrightarrow{\simeq} M_{\dim W, \dim V}(\mathbb{K})$$

La dimostrazione è data nel libro di Sernesi, Teorema 12.2.

Se $\underline{x}$ sono le coordinate di $\underline{v}$ nella base $\mathcal{B}$ e se $\underline{y}$ sono le coordinate di $\underline{w} := T(\underline{v})$ nella base $\mathcal{E}$ allora

$$\underline{y} = M_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(T)\underline{x}. \tag{1}$$

Nel caso particolare in cui $V = W$, possiamo considerare l'applicazione lineare identità $\mathrm{Id}_V\colon V \to V\colon\ \mathrm{Id}_V(\underline{v}) = \underline{v}$.

Date due basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ di V, avremo una matrice $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\mathrm{Id}_V)$ che rappresenta l'identità di V rispetto a queste due basi. Osserviamo che, per definizione, la matrice $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\mathrm{Id}_V)$ è la matrice che ha come j-ma colonna le coordinate di $\mathrm{Id}_V(\underline{b}'_j)$, e cioè di $\underline{b}'_j$, nella base $\mathcal{B}$. Osserviamo anche che da (1) abbiamo

$$\underline{x} = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\mathrm{Id}_V)\underline{x}' \tag{2}$$

e quindi $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\mathrm{Id}_V)$ trasforma le coordinate nella base $\mathcal{B}'$ nelle coordinate rispetto alla base $\mathcal{B}$.

Analogamente,

$$\underline{x}' = M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_V)\underline{x}\,. \tag{3}$$

e quindi $M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_V)$ trasforma le coordinate rispetto alla base $\mathcal{B}$ nelle coordinate rispetto a $\mathcal{B}'$.

Sernesi, sulla base di (2), chiama $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\mathrm{Id}_V)$ la *matrice del cambiamento di coordinate, dalla base $\mathcal{B}'$ alla base $\mathcal{B}$.*

Osservazione. Altri libri di testo, ad esempio quelli di Marco Abate e Chiara de Fabritiis, danno alla matrice $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\mathrm{Id}_V)$ un nome diverso. Dalla definizione stessa di $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\mathrm{Id}_V)$ possiamo scrivere la relazione

$$\left| \; \underline{b}'_1 \quad \underline{b}'_2 \quad \ldots \quad \underline{b}'_n \; \right| = \left| \; \underline{b}_1 \quad \underline{b}_2 \quad \ldots \quad \underline{b}_n \; \right| \cdot M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\mathrm{Id}_V) \tag{4}$$

(è un prodotto righe per colonne che è da intendersi in maniera formale). Sulla base di (4), Abate-de Fabritiis chiamano $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\mathrm{Id}_V)$ la *matrice del cambiamento di base, dalla base $\mathcal{B}$ alla base $\mathcal{B}'$*

Ulteriori informazioni. Gli isomorfismi $M_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$ godono di un'importante proprietà rispetto alla composizione: se V, W ed U sono tre spazi vettoriali dotati di basi $\mathcal{B}, \mathcal{E}$ e $\mathcal{F}$ rispettivamente, e $T\colon V \to W$ e $S\colon W \to U$ sono applicazioni lineari allora

$$M_{\mathcal{F},\mathcal{B}}(S \circ T) = M_{\mathcal{F},\mathcal{E}}(S) \cdot M_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(T) \tag{5}$$

Notate come le due basi al centro si "elidono" La dimostrazione della formula è data in Sernesi.

Iterando la formula appena dimostrata, si ottiene la formula per la composizione di un numero arbitrario di applicazioni lineari. Ad esempio se $F\colon U \to Z$ è un'ulteriore applicazione lineare, e $\mathcal{G}$ è una base di Z, allora

$$\begin{aligned} M_{\mathcal{G},\mathcal{B}}(F \circ S \circ T) &= M_{\mathcal{G},\mathcal{B}}\big((F \circ (S \circ T)\big) \\ &= M_{\mathcal{G},\mathcal{F}}(F) \cdot M_{\mathcal{F},\mathcal{B}}(S \circ T) \\ &= M_{\mathcal{G},\mathcal{F}}(F) \cdot M_{\mathcal{F},\mathcal{E}}(S) \cdot M_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(T) \end{aligned}$$

Notate che continua a valere l'elisione delle basi al centro.

Un'applicazione particolare della formula composizione/prodotto riguarda la matrice associata all'applicazione inversa di un'applicazione invertibile $\varphi\colon V \to W$. Sia $n = \dim V = \dim W$. Abbiamo

$$M_{\mathcal{B},\mathcal{E}}(\varphi^{-1}) \cdot M_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(\varphi) = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(\varphi^{-1} \circ \varphi) = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_V) = \mathrm{Id}_n$$

L'ultima identità esprime il fatto che la matrice corrispondente all'applicazione identica $\mathrm{Id}_V\colon V \to V$, rispetto ad una stessa base $\mathcal{B}$, scelta sia come base di partenza che di arrivo, è la matrice identità di rango $\dim V$ (segue immediatamente dalla definizione). Analogamente otteniamo

$$M_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(\varphi) \cdot M_{\mathcal{B},\mathcal{E}}(\varphi^{-1}) = M_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\varphi \circ \varphi^{-1}) = M_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\mathrm{Id}_W) = \mathrm{Id}_n$$

Otteniamo così la formula

$$M_{\mathcal{B},\mathcal{E}}(\varphi^{-1}) = (M_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(\varphi))^{-1}$$

In particolare, per l'applicazione identica $\mathrm{Id}_V : V \to V$, che ha come inversa se stessa, $\mathrm{Id}_V^{-1} = \mathrm{Id}_V$, otteniamo

$$M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_V) = (M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\mathrm{Id}_V))^{-1} \tag{6}$$

Scriveremo $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\mathrm{Id}_V)^{-1}$ per $(M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\mathrm{Id}_V))^{-1}$.

Un corollario immediato di quanto visto è la formula che lega le matrici che rappresentano un endomorfismo $\varphi\colon V \to V$ rispetto a basi diverse $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ (scelte sia come basi di partenza che come basi di arrivo). Se indichiamo con A la matrice che rappresenta φ nella base $\mathcal{B}$ (scelta quindi come base di partenza e base di arrivo), con A' la matrice che rappresenta φ nella base $\mathcal{B}'$ e con B la matrice $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\mathrm{Id}_V)$ allora

$$A' = B^{-1} \cdot A \cdot B \quad \text{e quindi} \quad A = B \cdot A \cdot B^{-1}$$

La dimostrazione di una di queste due (equivalenti) formule a partire dalla formula (5) è particolarmente semplice. Dimostriamo ad esempio la seconda. Iniziamo con l'osservare che si ha:

$$A = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(\varphi); \qquad A' = M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}'}(\varphi); \qquad B = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\mathrm{Id}_V); \qquad B^{-1} = M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_V)$$

Dunque,

$$\begin{aligned} A &= M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(\varphi) \\ &= M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_V \circ \varphi \circ \mathrm{Id}_V) \\ &= M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\mathrm{Id}_V) \cdot M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}'}(\varphi) \cdot M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_V) \\ &= B \cdot A' \cdot B^{-1} \end{aligned}$$