

Notazioni del Sernesi

Siano V e W due spazi vettoriali e sia $T : V \rightarrow W$ un'applicazione lineare. Fissiamo una base \mathcal{B} per V ed una base \mathcal{E} per W . Scriviamo per esteso $\mathcal{B} = \{\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n\}$ e $\mathcal{E} = \{\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_m\}$. Denotiamo la matrice associata a T con questa scelta di basi, \mathcal{B} = base di partenza; \mathcal{E} = base di arrivo, tramite il simbolo

$$M_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(T).$$

Memorizzate a questo punto la posizione delle due basi: la base a sinistra è la base di arrivo, mentre la base a destra è la base di partenza. Per definizione, $M_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(T)$ è la matrice che ha come j -ma colonna le coordinate di $T(\underline{b}_j)$ nella base \mathcal{E} .

Una volta che le basi \mathcal{B} e \mathcal{E} sono fissate, possiamo riguardare $M_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(\)$ come un'applicazione dall'insieme delle applicazioni lineari tra V e W e l'insieme delle matrici $m \times n$. L'applicazione $M_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(\)$ è lineare, ed è in effetti un isomorfismo, abbiamo cioè

$$M_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(\) : \text{Hom}(V, W) \xrightarrow{\cong} M_{\dim W, \dim V}(\mathbb{K})$$

La dimostrazione è data nel libro di Sernesi, Teorema 12.2.

Se \underline{x} sono le coordinate di \underline{v} nella base \mathcal{B} e se \underline{y} sono le coordinate di $\underline{w} := T(\underline{v})$ nella base \mathcal{E} allora

$$(1) \quad \underline{y} = M_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(T)\underline{x}.$$

Nel caso particolare in cui $V = W$, possiamo considerare l'applicazione lineare $\text{Id}_V : V \rightarrow V$.

Date due basi \mathcal{B} e \mathcal{B}' di V , avremo una matrice $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\text{Id}_V)$ che rappresenta l'identità di V rispetto a queste due basi. Osserviamo che, per definizione, la matrice $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\text{Id}_V)$ è la matrice che ha come j -ma colonna le coordinate di $\text{Id}_V(\underline{b}'_j)$, e cioè di \underline{b}'_j , nella base \mathcal{B} . Per il momento non diamo alcun nome a questa matrice ma osserviamo che da (1) abbiamo

$$(2) \quad \underline{x} = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\text{Id}_V)\underline{x}'$$

e quindi $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\text{Id}_V)$ trasforma le coordinate nella base \mathcal{B}' nelle coordinate rispetto alla base \mathcal{B} .

Analogamente,

$$(3) \quad \underline{x}' = M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\text{Id}_V)\underline{x}.$$

e quindi $M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\text{Id}_V)$ trasforma le coordinate rispetto alla base \mathcal{B} nelle coordinate rispetto a \mathcal{B}' .

Gli isomorfismi $M_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$ godono di un'importante proprietà rispetto alla composizione: se V, W ed U sono tre spazi vettoriali dotati di basi \mathcal{B}, \mathcal{E} e \mathcal{F} rispettivamente, e $T : V \rightarrow W$ e $S : W \rightarrow U$ sono applicazioni lineari allora

$$(4) \quad M_{\mathcal{F},\mathcal{B}}(S \circ T) = M_{\mathcal{F},\mathcal{E}}(S) \cdot M_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(T)$$

Notate come le due basi al centro si "elidono" La dimostrazione della formula è data in Sernesi.

Iterando la formula appena dimostrata, si ottiene la formula per la composizione di un numero arbitrario di applicazioni lineari. Ad esempio se $F: U \rightarrow Z$ è un'ulteriore applicazione lineare, e \mathcal{G} è una base di Z , allora

$$\begin{aligned} M_{\mathcal{G},\mathcal{B}}(F \circ S \circ T) &= M_{\mathcal{G},\mathcal{B}}((F \circ (S \circ T))) \\ &= M_{\mathcal{G},\mathcal{F}}(F) \cdot M_{\mathcal{F},\mathcal{B}}(S \circ T) \\ &= M_{\mathcal{G},\mathcal{F}}(F) \cdot M_{\mathcal{F},\mathcal{E}}(S) \cdot M_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(T) \end{aligned}$$

Notate che continua a valere l'elisione delle basi al centro.

Un'applicazione particolare della formula composizione/prodotto riguarda la matrice associata all'applicazione inversa di un'applicazione invertibile $\varphi: V \rightarrow W$. Sia $n = \dim V = \dim W$. Abbiamo

$$M_{\mathcal{B},\mathcal{E}}(\varphi^{-1}) \cdot M_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(\varphi) = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(\varphi^{-1} \circ \varphi) = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(\text{Id}_V) = \text{Id}_n$$

L'ultima identità esprime il fatto che la matrice corrispondente all'applicazione identica $\text{Id}_V: V \rightarrow V$, rispetto ad una stessa base \mathcal{B} , scelta sia come base di partenza che di arrivo, è la matrice identità di rango $\dim V$ (segue immediatamente dalla definizione). Analogamente otteniamo

$$M_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(\varphi) \cdot M_{\mathcal{B},\mathcal{E}}(\varphi^{-1}) = M_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\varphi \circ \varphi^{-1}) = M_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\text{Id}_W) = \text{Id}_n$$

Otteniamo così la formula

$$M_{\mathcal{B},\mathcal{E}}(\varphi^{-1}) = (M_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(\varphi))^{-1}$$

In particolare, per l'applicazione identica $\text{Id}_V: V \rightarrow V$, che ha come inversa se stessa, $\text{Id}_V^{-1} = \text{Id}_V$, otteniamo

$$(5) \quad M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\text{Id}_V) = (M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\text{Id}_V))^{-1}$$

Scriveremo $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\text{Id}_V)^{-1}$ per $(M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\text{Id}_V))^{-1}$.

Un corollario immediato di quanto visto è la formula che lega le matrici che rappresentano un endomorfismo $\varphi: V \rightarrow V$ rispetto a basi diverse \mathcal{B} e \mathcal{B}' (scelte sia come basi di partenza che come basi di arrivo). Se indichiamo con A la matrice che rappresenta φ nella base \mathcal{B} (scelta quindi come base di partenza e base di arrivo), con A' la matrice che rappresenta φ nella base \mathcal{B}' e con B la matrice $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\text{Id}_V)$ allora

$$A' = B^{-1} \cdot A \cdot B \quad \text{e quindi} \quad A = B \cdot A' \cdot B^{-1}$$

La dimostrazione di una di queste due (equivalenti) formule a partire dalla formula (4) è particolarmente semplice. Dimostriamo ad esempio la seconda. Iniziamo con l'osservare che si ha:

$$A = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(\varphi); \quad A' = M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}'}(\varphi); \quad B = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\text{Id}_V); \quad B^{-1} = M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\text{Id}_V)$$

Dunque,

$$\begin{aligned} A &= M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(\varphi) \\ &= M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(\text{Id}_V \circ \varphi \circ \text{Id}_V) \\ &= M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\text{Id}_V) \cdot M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}'}(\varphi) \cdot M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\text{Id}_V) \\ &= B \cdot A' \cdot B^{-1} \end{aligned}$$

Concludiamo con un commento sul nome da dare alla matrice $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\text{Id}_V)$ e cioè alla matrice che ha come j -ma colonna le coordinate di \underline{b}'_j nella base \mathcal{B} . Ricordiamo che abbiamo le due equivalenti formule

$$(6) \quad \underline{x} = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\text{Id}_V)\underline{x}' ; \quad \underline{x}' = M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\text{Id}_V)\underline{x}.$$

Tuttavia, possiamo anche scrivere

$$(7) \quad | \underline{b}'_1 \ \underline{b}'_2 \ \dots \ \underline{b}'_n | = | \underline{b}_1 \ \underline{b}_2 \ \dots \ \underline{b}_n | \cdot M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\text{Id}_V)$$

dove la scrittura è da intendersi in maniera formale.

Sernesi, sulla base della prima formula in (6), chiama $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\text{Id}_V)$ la *matrice del cambiamento di coordinate, dalla base \mathcal{B}' alla base \mathcal{B}* .

Abate-De Fabritiis, sulla base di (7), chiama $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\text{Id}_V)$ la *matrice del cambiamento di base, dalla base \mathcal{B} alla base \mathcal{B}'*

Le due dizioni sono compatibili perché la prima si riferisce alle coordinate, mentre la seconda si riferisce esclusivamente alle basi.