Facoltà di Ingegneria dell'Informazione, Informatica e Statistica.
Corso di Laurea in Statistica, Economia, Finanza e Assicurazioni.
Matematica III. Prof. Paolo Piazza
Settimo compito a casa.

Esercizio 1. Consideriamo la superficie torica S ottenuta ruotando attorno all'asse z la circonferenza di centro $(R,0,0)$ e raggio $r < R$ nel piano xz. Utilizzando le informazioni contenute nell'Esempio 4 p. 254, scrivere le equazioni parametriche della superficie torica.

Esercizio 2. Calcolare $A^2 + B^2 + C^2$ per la superficie torica D dell'es. 1 ed *utilizzando questa espressione* dimostrare che l'area della superficie torica S è uguale a $4\pi^2 rR$.

Esercizio 3. Consideriamo il toro solido T ottenuto ruotando attorno all'asse z il disco di centro $(R,0,0)$ e raggio $r < R$ nel piano xz. Utilizzando la ben nota formula

$$\mathrm{Vol}(T) = \iiint dxdydz$$

dimostrare che il volume del toro T è uguale a $2\pi^2 Rr^2$.
Suggerimento: è chiaro che $\mathrm{Vol}(T) = 2\mathrm{Vol}(T_+)$ con $T_+ = T \cap \{z \geq 0\}$. Basta allora calcolare $\mathrm{Vol}(T_+)$. D'altra parte T_+ è ottenuto ruotando la regione del piano xz sotto il grafico di una funzione. A questo punto le coordinate cilindriche [1] possono essere utili.

Esercizio 4. Sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ il campo vettoriale

$$F(x,y,z) = (x^2 y, -xy^2, z)$$

e sia T il toro solido dell'es. 3, con bordo ∂T uguale alla superficie torica dell'es. 1. Calcolare

$$\int_{\partial T} < F, N > d\sigma$$

utilizzando il teorema della divergenza.

Esercizio 5. Sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ il campo vettoriale

$$F(x,y,z) = (y, -x, x^2 + y^2 + z)$$

e sia S l'intersezione della superficie sferica di raggio 1 con il semispazio $\{z \geq 0\}$ (e cioè la calotta sferica superiore di raggio 1). Calcolare direttamente

$$\int_S < F, N > d\sigma\,.$$

Esercizio 6. Consideriamo l'asteroide dell'esempio 2 p. 174. Utilizzando uno dei corollari del Teorema di Gauss-Green calcolare l'area della regione interna all'asteroide.

Esercizio 7. Sia $F(x,y) = x^2 + y^2 + \sin y$. Verificare che F definisce implicitamente una funzione $y = f(x)$ in un intorno di $(0,0)$. Stabilire se $x = 0$ è un punto critico per f ed in caso affermativo se è di massimo o minimo relativo.

[1] consultare il libro di testo, pagina 240