Facoltà di Ingegneria dell'Informazione, Informatica e Statistica.
Corso di Laurea in Statistica, Economia, Finanza e Assicurazioni.
Matematica III. Prof. Paolo Piazza
Settimo compito a casa. Soluzioni.

Esercizio 1. Consideriamo la superficie torica S ottenuta ruotando attorno all'asse z la circonferenza di centro $(R, 0, 0)$ e raggio $r < R$ nel piano xz. Utilizzando le informazioni contenute nell'Esempio 4 p. 254, scrivere le equazioni parametriche della superficie torica.
Soluzione.
Le equazioni parametriche della circonferenza che, per rotazione, genera la superficie torica sono:

$$x(t) = R + \cos t \qquad z(t) = r \sin t, \quad t \in [0, 2\pi]$$

e quindi le equazioni parametriche della superficie torica sono

$$\phi(t, \theta) = ((R + \cos t)\cos\theta, (R + \cos t)\sin\theta, r \sin t) \quad (t, \theta) \in D := [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$$

Esercizio 2. Calcolare $A^2 + B^2 + C^2$ per la superficie torica S dell'es. 1 ed *utilizzando questa espressione* dimostrare che l'area della superficie torica S è uguale a $4\pi^2 rR$.
Soluzione.
Sappiamo, si veda il libro di testo, che per una superficie di rotazione ottenuta ruotando la curva di equazioni parametriche $x = x(t), z = z(t)$ si ha:

$$A^2 + B^2 + C^2 = (x(t))^2 \left((x')^2 + (z')^2\right)$$

che nel nostro caso dà

$$A^2 + B^2 + C^2 = (R + \cos t)^2 \cdot r^2$$

Sappiamo che $A(S) = \iint_D \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\, dt d\theta$, e quindi $A(S)$ è uguale a

$$A(S) = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{2\pi} r(R + \cos(t))dt = 4\pi^2 rR\,.$$

Esercizio 3. Consideriamo il toro solido T ottenuto ruotando attorno all'asse z il disco di centro $(R, 0, 0)$ e raggio $r < R$ nel piano xz. Utilizzando la ben nota formula

$$\mathrm{Vol}(T) = \iiint dxdydz$$

dimostrare che il volume del toro T è uguale a $2\pi^2 Rr^2$.
Soluzione. Conviene utilizzare coordinate cilindriche

$$\widetilde{T} \ni (\rho, \theta, z) \to (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, z) \in \mathbb{R}^3\,; \tag{1}$$

è noto, si veda il libro di testo, che lo Jacobiano della trasformazione indotta dalle coordinate cilindriche è uguale a ρ. Quindi

$$\iiint_T dxdydz = \iiint_{\widetilde{T}} \rho d\rho d\theta dz\,.$$

Il problema è capire chi è $\widetilde{T}$. Se D è il dominio sotto il grafico di una funzione $x = f(z)$ nel piano xz, $f > 0$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, e se T è il solido ottenuto ruotando D attorno all'asse z, allora ci domandiamo come calcolare il volume del solido T utilizzando coordinate cilindriche. Il dominio che stiamo ruotando e che produce T è il dominio $D = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \le x \le f(z)\}$. Per le coordinate cilindriche dei punti ottenuti per rotazione abbiamo senz'altro $\theta \in [0, 2\pi]$. Ci domandiamo qual è la relazione fra ρ e z. Ma $\rho = x$ nel piano xz e siccome stiamo ruotando D è chiaro, se ci riflettete un attimo, che la relazione fra ρ e z in un punto ruotato da un punto $(x, z) \in D$ è la stessa che intercorre fra x e z; quindi il solido T è l'immagine tramite la trasformazione (1) del solido $\widetilde{T} = \{(\rho, \theta, z) \mid \theta \in [0, 2\pi], 0 \le \rho \le f(\rho)\}$. Quindi

$$\mathrm{Vol}(T) = \iiint_{\widetilde{T}} \rho d\rho d\theta dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_a^b dz \int_0^{f(z)} \rho d\rho = \pi \int_a^b f^2(z) dz$$

Torniamo al toro: consideriamo le funzioni con dominio $[-r, r]$:

$$f_+(z) = R + \sqrt{r^2 - z^2} \quad \text{e} \quad f_-(z) = R - \sqrt{r^2 - z^2}$$

Si ha allora, con piccolo ragionamento (fate una figura):

$$\mathrm{Vol}(T) = \pi \int_{-r}^{r} f_+^2(z) - f_-^2(z) dz$$

e quindi

$$\mathrm{Vol}(T) = \pi \int_{-r}^{r} (R + \sqrt{r^2 - z^2})^2 - (R - \sqrt{r^2 - z^2})^2 dz = \pi \int_{-r}^{r} 4R\sqrt{r^2 - z^2} dz$$

Ma $\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - z^2} dz$ è l'area della calotta superiore del disco di raggio r ed è quindi uguale all'area del cerchio di raggio r divisa per 2 e cioè $(\pi r^2)/2$. Quindi

$$\mathrm{Vol}(T) = \pi 4R \frac{\pi r^2}{2} = 2\pi^2 R r^2.$$

Osservazione: il volume del toro si trova molto agevolmente con il Teorema di Guldino visto nell'ultima lezione del corso.

Esercizio 4. Sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ il campo vettoriale

$$F(x, y, z) = (x^2 y, -xy^2, z)$$

e sia T il toro solido dell'es. 3, con bordo ∂T uguale alla superficie torica dell'es. 1. Calcolare

$$\int_{\partial T} < F, N > d\sigma$$

utilizzando il teorema della divergenza.
Soluzione.
Per il teorema della divergenza

$$\int_{\partial T} < F, N > d\sigma = \iiint_T \mathrm{div}(F) dx dy dz\,.$$

Ma $\mathrm{div}(F) = 2xy - 2xy + 1$. Quindi

$$\int_{\partial T} < F, N > d\sigma = \mathrm{Vol}(T) = 2\pi^2 R r^2\,.$$

Esercizio 5. Sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ il campo vettoriale

$$F(x, y, z) = (y, -x, x^2 + y^2 + z)$$

e sia S l'intersezione della superficie sferica di raggio 1 con il semispazio $\{z \geq 0\}$ (e cioè la calotta sferica superiore di raggio 1). Calcolare direttamente

$$\int_S < F, N > d\sigma\,.$$

Soluzione.
Le equazioni parametriche della superficie sferica di raggio 1 sono

$$\begin{cases} x = \sin\phi\cos\theta \\ y = \sin\phi\sin\theta \qquad\qquad \phi \in [0,\pi], \theta \in [0, 2\pi] \\ z = \cos\phi \end{cases}$$

e quindi quelle della calotta superiore sono ottenute prendendo $\phi \in [0, \pi/2]$ (ma sempre $\theta \in [0, 2\pi]$). Un vettore normale alla superficie sferica nel punto (x, y, z) è il vettore di coordinate (x, y, z) (segue, ad esempio, dall'equazione cartesiana $F(x, y, z) \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ della superficie sferica e dal fatto che il gradiente di F è ortogonale alla superfiecie $Z = \{F(x, y, z) = 0\}$ (si vedala formula (55.9) del libro); in alternativa possiamo calcolare (A, B, C)). Di fatto (x, y, z) è un *versore* normale, perché (x, y, z) è sulla superficie sferica di *raggio 1.* Per la calotta superiore il versore normale ha la terza componente positiva e punta quindi verso l'esterno della calotta. Conclusione: il versore normale esterno nel punto corrispondente ai parametri (ϕ, θ) è proprio

$$N(\phi, \theta) = (\sin\phi\cos\theta, \sin\phi\sin\theta, \cos\phi)$$

Ne segue che $< F, N >$ è dato da

$$< (\sin\phi\sin\theta, -\sin\phi\cos\theta, \sin^2\phi + \cos\phi), (\sin\phi\cos\theta, \sin\phi\sin\theta, \cos\phi) >$$

e che $\|N\| = 1$ e quindi

$$< F, N >= \sin^3\phi\cos\phi + \sin\phi\cos^2\phi$$

e

$$\int_S < F, N > d\sigma = 2\pi \int_0^{\pi/2} (\sin^3\phi\cos\phi + \sin\phi\cos^2\phi)d\phi\,.$$

Calcolando l'integrale (non è difficile) otteniamo $\frac{7\pi}{6}$.

Esercizio 6. Consideriamo l'asteroide dell'esempio 2 p. 174. Utilizzando uno dei corollari del Teorema di Gauss-Green calcolare l'area della regione interna all'asteroide.
Soluzione. L'astroide, denotiamolo γ, ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = \cos^3(t) \\ y = \sin^3(t) \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi] \tag{2}$$

Per i risultati a pag 224/225 sappiamo che l'area della regione interna all'astroide, D, è uguale a all'integrale lungo γ^+ della forma differenziale xdy: in formule

$$\text{Area}(D) = \int_{\gamma^+} xdy$$

che è anche uguale a

$$-\int_{\gamma^+} ydx.$$

Quindi possiamo anche scrivere

$$\text{Area}(D) = \frac{1}{2}\Big(\int_{\gamma^+} xdy - ydx\Big).$$

Dobbiamo capire qual è l'orientazione positiva dell'astroide e, fatto questo, dobbiamo calcolare l'integrale della forma differenziale. Il vettore tangente all'astroide orientato secondo la parametrizzazione (2) è il vettore

$$T = (-3\cos^2 t \sin t, 3\sin^2 t \cos t);$$

i due vettori normali sono

$$(3\sin^2 t \cos t, 3\cos^2 t \sin t) \quad \text{e} \quad (-3\sin^2 t \cos t, -3\cos^2 t \sin t)$$

Il primo fra essi è il vettore normale esterno (si ragioni, ad esempio, sulla parte dell'astroide contenuta nel primo quadrante) e lo denotiamo N; ora, è chiaro dalla figura che avete sicuramente disegnato che N si sovrappone a T ruotando in senso antiorario; detto più analiticamente la base $\{N, T\}$ è equiorientata rispetto alla base standard di $\mathbb{R}^2$; infatti il determinante della matrice

$$\begin{pmatrix} 3\sin^2 t \cos t & 3\cos^2 t \sin t \\ -3\cos^2 t \sin t & 3\sin^2 t \cos t \end{pmatrix}$$

è positivo. Si veda pagina 217 per le necessarie definizioni.
Quindi il verso di percorrenza fissato dalla parametrizzazione (2) è quello positivo. Calcoliamo ora $\int_{\gamma^+} xdy - ydx$. Per definizione questo è uguale a

$$\int_0^{2\pi} 3\cos^4 t \sin^2 t + 3\sin^4 t \cos^2 t dt$$

che è uguale a $3\int_0^{2\pi} \sin^2 t \cos^2 t dt$ che è uguale a $3\int_0^{2\pi} \sin^2(2t)dt$. Svolgendo questo integrale e ricordando 1/2 di fronte a $\int_{\gamma^+} xdy - ydx$ otteniamo che

$$\text{Area}(D) = (3/8)\pi.$$

Esercizio 7. Sia $F(x, y) = x^2 + y^2 + \sin y$. Verificare che F definisce implicitamente una funzione $y = f(x)$ in un intorno di $(0, 0)$. Stabilire se $x = 0$ è un punto critico per f ed in caso affermativo se è di massimo o minimo relativo.
Soluzione. Innanzitutto $(0, 0) \in Z = \{F(x, y) = 0\}$. Inoltre

$$F_x = 2x \qquad F_y = 2y + \cos y$$

e quindi in $(0, 0)$ sia ha $F_y(0, 0) = 1 \neq 0$. Per il teorema del Dini F definisce implicitamente in un intorno $[-\delta, \delta] \times [-\sigma, \sigma]$ di $(0, 0)$ una funzione $f(x)$, $f : [-\delta, \delta] \to [-\sigma, \sigma]$ tale che $f(0) = 0$ e $F(x, f(x)) = 0$ $\forall x \in [-\delta, \delta]$. Inoltre

$$f'(x) = -\frac{F_x(x, f(x))}{F_y(x, f(x))}$$

e quindi $f'(0) = 0$. Ne segue che 0 è un punto critico di f. Per studiare la sua natura calcoliamo la derivata seconda di f in 0; dato che $F_x(0, 0) = 0$ essa è data da

$$f''(0) = -\frac{F_{xx}(0, 0)}{F_y(0, 0)}$$

e dato che $F_{xx}(0, 0) = 2$ e $F_y(0, 0) = 1$ ne segue che $f''(0) < 0$ e quindi 0 è un massimo relativo.