Facolta‘ di Ingegneria dell’Informazione, Informatica e Statistica.
Corso di Laurea in Statistica, Economia, Finanza e Assicurazioni.
Matematica III. Prof. Paolo Piazza
Terzo compito a casa (12/10/2018)

Esercizio 1. Stabilire se esistono i seguenti limiti e, in caso affermativo, calcolarli:

(a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2+y^4}{x^4+y^2}$

(b) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$

(c) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^{\frac{5}{3}}y^3}{(x^2+y^2)^2}$

(d) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \sin(xy)\cdot\dfrac{x^3-y^5}{(x^2+y^2)^2}$

Esercizio 2. Stabilire la continuità, derivabilità parziale e differenziabilità in $(0,0)$ per la funzione $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ data da

$$f(x,y)=\begin{cases} \frac{x}{\log(x^2+y^2)} & \text{per } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{per } (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

Esercizio 3. Per la seguente funzione determinare l’insieme di definizione D e studiare la limitatezza e la contiuità di $f(x,y)$ in D. Studiare la derivabilità parziale e la differenziabilità di $f(x,y)$ nell’insieme D^o dei unti interni di D:

$$f(x,y)=e^{x+y}\sqrt{xy}$$

Esercizio 4. Rappresentare nel piano i domini di definizione delle seguenti funzioni:

(a) $f(x,y)=\sqrt{(x-y)(y-x^2)}+\log(\frac{1}{4}-x^2-y^2)$

(b) $f(x,y)=\log(3-|x|)\sqrt{x^2-y^2}$

Esercizio 5. Un *punto critico* di una funzione è un punto nel quale si annulla il gradiente. Determinare i punti critici delle seguenti funzioni:

(a) $f(x,y)=\dfrac{x^3}{3}-xy+\dfrac{y^2}{2}-3x+y$

(b) $f(x,y)=x^2-2xy-2y+8y^3$

Esercizio 6. Data la funzione $f(x,y):\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, il versore di direzione $\vec{v}$ ed il punto $P\in\mathbb{R}^2$ indicati qui sotto, determinare:

• la derivata direzionale di $f(x,y)$ nella direzione di $\vec{v}$ nel punto P;
• l’equazione del piano tangente al grafico di $f(x,y)$ nel punto P.

(a) $f(x,y)=(x+y)^2\,,\ \vec{v}=(0,-1)\,,\ P=(2,1)\,.$

(b) $f(x,y)=ye^{x^2}+\sin(xy)\,,\ \vec{v}=(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})\,,\ P=(0,1)\,.$

Esercizio 7. Sia $\underline{\lambda}$ una direzione in $\mathbb{R}^2$: $\|\underline{\lambda}\|=1$. Possiamo scrivere $\underline{\lambda}=(\cos\phi,\sin\phi)$ per un opportuno ϕ. Consideriamo la funzione $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definita da

$$\frac{x\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^4}\quad\text{per } (x,y)\neq(0,0)$$

ed uguale a 0 in $(x, y) = (0, 0)$.
Calcolare la derivata direzionale lungo $(\cos(\phi), \sin(\phi))$ in $(0, 0)$ utilizzando la definizione.
Suggerimento: il limite che definisce la derivata direzionale è un limite di una variabile.
Calcolare l'espressione $< Df(0, 0), \underline{\lambda} >$. Confrontare le due formule e dedurne che la funzione NON è differenziabile in $(0, 0)$.