Facoltà di Ingegneria dell'Informazione, Informatica e Statistica.
Corso di Laurea in Statistica, Economia, Finanza e Assicurazioni.
Matematica III. Prof. Paolo Piazza
Secondo compito a casa (5/10/2018)

Osservazioni utili.

Osservazione 1. Il limite della somma è la somma dei limiti. Analogamente per il prodotto ed il quoziente (vanno escluse, ovviamente, le forme indeterminate).

Osservazione 2. Abbiamo capito a questo punto del corso che dimostrare l'esistenza di un limite di una funzione di più variabili può essere difficile. Supponiamo di voler dimostrare che $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \ell$. Possiamo utilizzare coordinate polari (ρ, θ) con

$$x = \rho\cos\theta\,, \quad y = \rho\sin\theta\,, \quad \rho = \sqrt{x^2+y^2}$$

Si consulti il libro di testo a pagina 232 per le coordinate polari.
Se riusciamo a dimostrare che per ogni (x, y) nel dominio di f

$$|f(x,y) - \ell| = |f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) - \ell| \leq g(\rho)$$

con $g(\rho)$ infinitesima per $\rho \to 0$ allora possiamo concludere che $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \ell$.

Osservazione 3. Cerchiamo condizioni sufficienti a garantire la continuità di una funzione $f(x, y)$.

1. Se f dipende da una sola variabile, $f(x, y) = g(x)$, e g è continua come funzione di una variabile, allora f è continua come funzione di due variabili. Analogamente se $f(x, y) = h(y)$ con h continua.
2. La somma di funzioni continue è una funzione continua. Il prodotto di funzioni continue è una funzione continua ed analogamente per il quoziente (sotto l'ovvia ipotesi che il denominatore non sia uguale a zero)
3. Se $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ è continua, l'immagine di f è contenuta in B e $g : B \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è continua, allora la funzione composta $g \circ f : A \to \mathbb{R}$ è continua.

Esercizio 1. Consideriamo le funzioni $g, h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definite da

$$g(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \in A \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases} \qquad h(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^4+y^2} & (x,y) \in A \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

con $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Stabilire se g ed h sono continue in $(0, 0)$.

Esercizio 2. Sia $f(x, y) = \sin(x^4 + y^2 \cos(x))$, definita in tutto $\mathbb{R}^2$. Stabilire se f è una funzione continua.
Suggerimento: utilizzare l'osservazione 3.

Esercizio 3. Sia $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Stabilire se la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^6}{x^6+y^2} & (x,y) \in A \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

è continua in $(0, 0)$. Cosa possiamo dire circa la continuità di f nei punti di A ?

Esercizio 4. Sia $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 1\}$. Stabilire se la funzione $f : A \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(x+y)}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y) \in A \setminus \{(0,0)\} \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

è continua in $(0, 0)$.

Esercizio 5. Calcolare le derivate parziali delle seguenti funzioni

1. $f(x, y) := e^{x \arctan(y/x)}$
2. $g(x, y) := \cos(xy^2 + \sin(xy))$

Esercizio 6. Sia $f(x, y) = xe^{xy} + y^7$. Scrivere l'espressione del vettore gradiente nel punto (x, y). Determinate l'equazione cartesiana del piano tangente nel punto del grafico corrispondente al punto $P = (0, 1)$.
Fare lo stesso esercizio per $g(x, y) = (x + y)^2$ e $P = (2, 1)$