

Facolta' di Ingegneria dell'Informazione, Informatica e Statistica.
Corso di Laurea in Statistica, Economia, Finanza e Assicurazioni.
Matematica III. Prof. Paolo Piazza
Primo compito a casa (28/9/2018)

Esercizio 1 (facoltativo). Sia $A := I_\delta(\underline{x}_0) = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n \text{ tali che } d(\underline{x}, \underline{x}_0) < \delta\}$ (A è l'intorno sferico di centro \underline{x}_0 e raggio δ). Verificare che ogni punto \underline{x} di A è interno e che quindi A è un insieme aperto.

Suggerimento: utilizzare la dimostrazione grafica vista a lezione e la disuguaglianza triangolare.

Esercizio 2 (facoltativo). Sia $D = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n \text{ tali che } d(\underline{x}, \underline{x}_0) \leq \delta\}$. Verificare che D è un chiuso.

Suggerimento: basta dimostrare che il complementare $\mathcal{C}(D)$ è aperto. Ma $\mathcal{C}(D) = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n \text{ tali che } d(\underline{x}, \underline{x}_0) > \delta\}$; utilizzate la dimostrazione grafica vista a lezione e la disuguaglianza triangolare.

Esercizio 3.

3.1 Verificare che

$$A_1 := \{\underline{x} \in \mathbb{R}^2 : -2 < x_1 < 2\}, \quad A_2 := \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 : x_3 \neq 0\}$$

sono insiemi aperti.

3.2 Disegnare l'insieme $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \cos y \leq x \leq 1, -\pi < y < \pi\}$ e stabilire (graficamente) che A non è né aperto né chiuso.

Esercizio 4. Determinare l'insieme di definizione della funzione

$$f(x, y) := \sqrt{1-x-y}\sqrt{1-y^2} + \log(\log(x-y))$$

e disegnarlo sul piano cartesiano.

Fare lo stesso esercizio per la funzione

$$g(x, y) := \log(1-x^2-y^2) + \log\left(\frac{1}{4}-y^2\right).$$

Utile disuguaglianza

Siano $x, y \in \mathbb{R}$. Sappiamo che $(|x| - |y|)^2 \geq 0$. Quindi $x^2 + y^2 - 2|x||y| \geq 0$ da cui deduciamo che

$$(1) \quad |xy| \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$$

Esercizio 5. Verificare utilizzando la definizione che

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} xy = 0.$$

Suggerimento: utilizzare la (1).

Utile osservazione Supponiamo per semplicità che f sia definita in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ (quindi $(0,0)$ è di accumulazione per il dominio di f). Come spiegato nel libro a pagina 44

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \ell \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x, mx) = \ell \quad \forall m \in \mathbb{R}$$

In parole: se f tende ad ℓ quando (x, y) tende a $(0,0)$ allora necessariamente f tende ad ℓ lungo le rette $y = mx$.

In particolare, se esiste m tale che $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, mx)$ non esiste oppure questo limite

esiste ma dipende da m allora **non** esiste $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$. Più in generale possiamo considerare

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, \phi(x))$$

dove $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è una qualsiasi funzione derivabile che vale 0 in $x = 0$ ¹. Si ha ancora

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = \ell \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x, \phi(x)) = \ell$$

In parole: se f tende ad ℓ quando (x,y) tende a $(0,0)$ allora necessariamente f tende ad ℓ lungo il grafico della funzione $\phi(x)$.

Ad esempio

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = \ell \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x, \alpha x^2) = \ell \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

e quindi se esiste α tale che $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, \alpha x^2)$ non esiste oppure questo limite esiste ma dipende da α allora **non** esiste $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$.

Fine osservazione.

Esercizio 6. Dimostrare che non esiste

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

Esercizio 7. Consideriamo

$$f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$$

definita in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

7.1 Verificare che esiste il limite di questa funzione lungo una qualsiasi retta $y = mx$ e che questo limite è 0.

7.2 Verificare che sebbene sia vera **7.1** non esiste

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}.$$

Suggerimento: considerare le parabole $y = \alpha x^2 \dots$

¹Ad esempio $\phi(x) = \alpha x^2$.