Facolta‘ di Ingegneria dell’Informazione, Informatica e Statistica.
Corso di Laurea in Statistica, Economia, Finanza e Assicurazioni.
Matematica III. Prof. Paolo Piazza
Primo compito a casa (28/9/2018): soluzione degli esercizi facoltativi.

Esercizio 1 (facoltativo). Sia $A := I_\delta(\underline{x}_0) = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ tali che $d(\underline{x}, \underline{x}_0) < \delta\}$ (A è l’intorno sferico di centro $\underline{x}_0$ e raggio δ). Verificare che ogni punto $\underline{x}$ di A è interno e che quindi A è un insieme aperto.
Suggerimento: utilizzare la dimostrazione grafica vista a lezione e la disuguaglianza triangolare.

Esercizio 2 (facoltativo). Sia $D = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ tali che $d(\underline{x}, \underline{x}_0) \leq \delta\}$. Verificare che D è un chiuso.
Suggerimento: basta dimostrare che il complementare $\mathcal{C}(D)$ è aperto. Ma $\mathcal{C}(D) = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ tali che $d(\underline{x}, \underline{x}_0) > \delta\}$; utilizzate la dimostrazione grafica vista a lezione e la disuguaglianza triangolare.

Soluzione esercizio 1. Sia $\underline{y} \in I_\delta(\underline{x}_0)$ e sia

$$\rho := \frac{\delta - d(\underline{y}, \underline{x}_0)}{2}.$$

Fate una figura.
Basta dimostrare che $I_\rho(\underline{y}) \subset I_\delta(\underline{x}_0)$. Sia quindi $\underline{x} \in I_\rho(\underline{y})$; dobbiamo dimostrare che $\underline{x} \in I_\delta(\underline{x}_0)$. Ora $\underline{x} \in I_\rho(\underline{y}) \Leftrightarrow d(\underline{x}, \underline{y}) < \rho$. Aggiungiamo ad ambo i membri di questa disuguaglianza $d(\underline{y}, \underline{x}_0)$ ed otteniamo

$$d(\underline{y}, \underline{x}_0) + d(\underline{x}, \underline{y}) < \rho + d(\underline{y}, \underline{x}_0)$$

Dalla disuguaglianza triangolare applicata al membro a sinistra e dalla definizione di ρ deduciamo

$$d(\underline{x}, \underline{x}_0) < \frac{\delta}{2} - \frac{d(\underline{y}, \underline{x}_0)}{2} + d(\underline{y}, \underline{x}_0) = \frac{\delta}{2} + \frac{d(\underline{y}, \underline{x}_0)}{2}$$

Ma $\underline{y} \in I_\delta(\underline{x}_0)$ se e solo se $d(\underline{y}, \underline{x}_0) < \delta$ e quindi

$$d(\underline{x}, \underline{x}_0) < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta$$

da cui $\underline{x} \in I_\delta(\underline{x}_0)$, come si voleva.

Soluzione esercizio 2. Basta dimostrare che il complementare di C, $\mathcal{C}(C)$, è aperto. Ora,

$$\mathcal{C}(C) = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n \text{ tali che } d(\underline{x}, \underline{x}_0) > \delta\}$$

Sia $\underline{y} \in \mathcal{C}(C)$ e consideriamo

$$\rho := d(\underline{y}, \underline{x}_0)\,, \quad \sigma := \frac{d(y, \underline{x}_0) - \delta}{2}\,.$$

Notiamo che $\sigma > 0$.
Basta dimostrare che $I_\sigma(\underline{y}) \subset \mathcal{C}(C)$.
Fate una figura.
Occorre quindi dimostrare che se $\underline{x} \in I_\sigma(\underline{y})$ allora $d(\underline{x}, \underline{x}_0) > \delta$. Sicuramente, dalla disuguaglianza triangolare,

$$d(\underline{x}_0, \underline{y}) \leq d(\underline{x}_0, \underline{x}) + d(\underline{x}, \underline{y})$$

e quindi
$$d(\underline{x}_0, \underline{x}) \geq d(\underline{x}_0, \underline{y}) - d(\underline{x}, \underline{y})$$
Ma dalla definizione di σ si ha
$$d(\underline{x}_0, \underline{y}) = 2\sigma + \delta$$
da cui
$$d(\underline{x}_0, \underline{x}) \geq 2\sigma + \delta - d(\underline{x}, \underline{y})$$
D'altra parte $d(\underline{x}, \underline{y}) < \sigma$ e quindi
$$2\sigma + \delta - d(\underline{x}, \underline{y}) > 2\sigma + \delta - \sigma = \sigma + \delta$$
In definitiva
$$d(\underline{x}_0, \underline{x}) > \sigma + \delta > \delta$$
come si voleva.