Corso di Laurea in Fisica. Geometria. a.a. 2013-14. Canale 3
Prof. P. Piazza

Magiche notazioni

Siano V e W due spazi vettoriali e sia $T : V \to W$ un'applicazione lineare. Fissiamo una base $\mathcal{B}$ per V ed una base $\mathcal{E}$ per W. Scriviamo per esteso $\mathcal{B} = \{\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n\}$ e $\mathcal{E} = \{\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_m\}$. Denotiamo la matrice associata a T con questa scelta di basi, $\mathcal{B}$ = base di partenza; $\mathcal{E}$ = base di arrivo, tramite il simbolo

$$M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}(T)\,.$$

Memorizzate a questo punto la posizione basso-alto delle due basi: la base in basso è la base di partenza; la base in alto è la base di arrivo. Quindi, per definizione, $M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}(T)$ è la matrice che ha come j-ma colonna le coordinate di $T(\underline{b}_j)$ nella base $\mathcal{E}$. Una volta che le basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{E}$ sono fissate, possiamo riguardare $M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}$ come un'applicazione dall'insieme delle applicazioni lineari tra V e W e l'insieme delle matrici $m \times n$. L'applicazione $M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}$ è lineare, ed è in effetti un isomorfismo, abbiamo cioè

$$M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}} \colon \mathcal{L}(V,W) \xrightarrow{\simeq} M_{\dim W, \dim V}(\mathbb{R})$$

La dimostrazione è data nel libro di testo.

Nel caso particolare in cui $V = W$, possiamo considerare l'applicazione lineare $\mathrm{Id}_V \colon V \to V$. Date due basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ di V, avremo una matrice $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(\mathrm{Id}_V)$ che rappresenta l'identità di V rispetto a queste due basi. Osserviamo che, per definizione, la matrice $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(\mathrm{Id}_V)$ è la matrice che ha come j-ma colonna le coordinate di $\mathrm{Id}_V(\underline{b}'_j)$, e cioè di $\underline{b}'_j$, nella base $\mathcal{B}$. Questa matrice è proprio la matrice del cambio di base, dalla base $\mathcal{B}$ alla base $\mathcal{B}'$. In definitiva

(1) $\quad M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(\mathrm{Id}_V)$ = matrice del cambio di base, dalla base $\mathcal{B}$ alla base $\mathcal{B}'$.

Analogamente

(2) $\quad M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_V)$ = matrice del cambio di base, dalla base $\mathcal{B}'$ alla base $\mathcal{B}$.

Gli isomorfismi $M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}$ godono di un'importante proprietà rispetto alla composizione: se V, W ed U sono tre spazi vettoriali dotati di basi $\mathcal{B}, \mathcal{E}$ e $\mathcal{F}$ rispettivamente, e $T \colon V \to W$ e $S \colon W \to U$ sono applicazioni lineari allora

$$M^{\mathcal{F}}_{\mathcal{B}}(S \circ T) = M^{\mathcal{F}}_{\mathcal{E}}(S) \cdot M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}(T) \tag{3}$$

Notate come le due basi ripetute in diagonale (una in basso a sinistra, l'altra in alto a destra) si "elidono" La dimostrazione della formula segue dal solito diagramma commutativo.

Iterando la formula appena dimostrata, si ottiene la formula per la composizione di un numero arbitrario di applicazioni lineari. Ad esempio se $F \colon U \to Z$ è un'ulteriore applicazione lineare, e $\mathcal{G}$ è una base di Z, allora

$$\begin{aligned} M^{\mathcal{G}}_{\mathcal{B}}(F \circ S \circ T) &= M^{\mathcal{G}}_{\mathcal{B}}\big((F \circ (S \circ T)\big) \\ &= M^{\mathcal{G}}_{\mathcal{F}}(F) \cdot M^{\mathcal{F}}_{\mathcal{B}}(S \circ T) \\ &= M^{\mathcal{G}}_{\mathcal{F}}(F) \cdot M^{\mathcal{F}}_{\mathcal{E}}(S) \cdot M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}(T) \end{aligned}$$

Notate che continua a valere l'elisione delle basi ripetute sulle "diagonali" basso-sinistra/alto-destra.

Un'applicazione particolare della formula composizione/prodotto riguarda la matrice associata all'applicazione inversa di un'applicazione invertibile $\varphi\colon V \to W$. Sia $n = \dim V = \dim W$. Abbiamo

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(\varphi^{-1}) \cdot M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}(\varphi) = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\varphi^{-1} \circ \varphi) = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_V) = \mathrm{Id}_n$$

L'ultima identità esprime il fatto che la matrice corrispondente all'applicazione identica $\mathrm{Id}_V : V \to V$, rispetto ad una stessa base $\mathcal{B}$, scelta sia come base di partenza che di arrivo, è la matrice identità di rango $\dim V$ (segue immediatamente dalla definizione, convincetevene). Analogamente otteniamo

$$M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}(\varphi) \cdot M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(\varphi^{-1}) = M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(\varphi \circ \varphi^{-1}) = M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(\mathrm{Id}_W) = \mathrm{Id}_n$$

Otteniamo così la formula

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(\varphi^{-1}) = M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}(\varphi)^{-1}$$

Notate che le basi si scambiano di posto. In particolare, per l'applicazione identica $\mathrm{Id}_V : V \to V$, che ha come inversa se stessa, $\mathrm{Id}_V^{-1} = \mathrm{Id}_V$, otteniamo

$$M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_V) = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(\mathrm{Id}_V)^{-1} \tag{4}$$

In parole: la matrice del cambiamento di base, da $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$ è l'inversa della matrice del cambio di base da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$

Un corollario immediato di quanto visto è la formula che lega le matrici che rappresentano un'applicazione $\varphi\colon V \to V$ rispetto a basi diverse $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ (scelte sia come basi di partenza che come basi di arrivo). Se indichiamo con A la matrice che rappresenta φ nella base $\mathcal{B}$ (scelta quindi come base di partenza e base di arrivo), con A' la matrice che rappresenta φ nella base $\mathcal{B}'$ e con B la matrice del cambio di base dalla base $\mathcal{B}$ alla base $\mathcal{B}'$, allora

$$A' = B^{-1} \cdot A \cdot B \quad \text{e quindi} \quad A = B \cdot A \cdot B^{-1}$$

La dimostrazione di una di queste due (equivalenti) formule a partire dalla formula (3) è particolarmente semplice. Dimostriamo ad esempio la seconda. Iniziamo con l'osservare che si ha:

$$A = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\varphi); \qquad A' = M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}'}(\varphi); \qquad B = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(\mathrm{Id}_V); \qquad B^{-1} = M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_V)$$

Dunque,

$$\begin{aligned} A &= M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\varphi) \\ &= M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_V \circ \varphi \circ \mathrm{Id}_V) \\ &= M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(\mathrm{Id}_V) \cdot M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}'}(\varphi) \cdot M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_V) \\ &= B \cdot A' \cdot B^{-1} \end{aligned}$$

Analogamente si dimostra la formula più generale a pagina 153 del libro (formula (8.4)). Fatelo come esercizio.

Facciamo ora uso del linguaggio appena introdotto per risolvere rapidamente un esercizio già visto. Vedremo che la soluzione è di fatto suggerita dalla notazione.

Esercizio. Sia $V = \mathbb{R}^3$. È facile verificare che l'applicazione lineare definita da

$$F(1,1,0) = (1,2,-1)\,, \quad F(0,1,1) = (-1,1,1)\,, \quad F(0,0,1) = (-1,0,1)$$

è ben definita [1].
Consideriamo la base canonica

$$\mathcal{E} = \{\underline{e}_1 := (1,0,0), \underline{e}_2 := (0,1,0), \underline{e}_3 := (0,0,1)\}$$

in $\mathbb{R}^3$.
Determinare la matrice A associata ad F con la seguente scelta di basi

$$\text{base di partenza} = \mathcal{E}\,, \quad \text{base di arrivo} = \mathcal{E}$$

Soluzione. Indichiamo con $\mathcal{E}$ la base canonica di $\mathbb{R}^3$ e con $\mathcal{E}'$ la base $\{\underline{e}'_1, \underline{e}'_2, \underline{e}'_3\}$, dove

$$\underline{e}'_1 = (1,1,0); \qquad \underline{e}'_2 = (0,1,1); \qquad \underline{e}'_3 = (0,0,1).$$

La matrice che vogliamo determinare è $M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(F)$. Il testo dell'esercizio ci dà $M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}'}(F)$ e $M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}'}(\mathrm{Id})$. Infatti, dai dati dell'esercizio leggiamo direttamente

$$M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}'}(F) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}\,, \quad M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}'}(\mathrm{Id}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}\,.$$

Sappiamo che

$$M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(F) = M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}'}(F) \cdot M^{\mathcal{E}'}_{\mathcal{E}}(\mathrm{Id}) \quad \text{e che} \quad M^{\mathcal{E}'}_{\mathcal{E}}(\mathrm{Id}) = M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}'}(\mathrm{Id})^{-1}$$

Ma allora

$$M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(F) = M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}'}(F) \cdot M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}'}(\mathrm{Id})^{-1}$$

e si tratta ora di fare i conti.

Vediamo un altro esempio:

Esercizio. Sia V lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ con base canonica $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$ fissata. Sia P l'applicazione lineare $P : V \longrightarrow V$ definita da

$$P\underline{e}_1 = 2\underline{g}_1 - 2\underline{g}_3\,, \qquad P\underline{e}_2 = \underline{g}_2 + \underline{g}_3\,, \qquad P\underline{e}_3 = \underline{g}_1 + \underline{g}_2 + \underline{g}_3\,, \tag{5}$$

con $\{\underline{g}_1 = (2,0,1)\,, \underline{g}_2 = (1,3,0)\,, \underline{g}_3 = (0,1,2)\}$. È subito visto che questi 3 vettori costituiscono una base di $\mathbb{R}^3$. Determinare la matrice associata a P in questa base (quindi, base di partenza = base di arrivo = base $\{\underline{g}_1, \underline{g}_2\, \underline{g}_3\}$).
Soluzione. Sia $\mathcal{E}$ la base canonica di $\mathbb{R}^3$ e $\mathcal{G}$ la base $\{\underline{g}_1 = (2,0,1)\,, \underline{g}_2 = (1,3,0)\,, \underline{g}_3 = (0,1,2)\}$. Cerchiamo $M^{\mathcal{G}}_{\mathcal{G}}(P)$. I dati forniti nel problema ci forniscono $M^{\mathcal{G}}_{\mathcal{E}}(P)$ e $M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{G}}(\mathrm{Id})$. Infatti

$$M^{\mathcal{G}}_{\mathcal{E}}(P) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{e} \quad M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{G}}(\mathrm{Id}) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

Ma allora, per la formula magica,

$$M^{\mathcal{G}}_{\mathcal{G}}(P) = M^{\mathcal{G}}_{\mathcal{E}}(P) \cdot M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{G}}(\mathrm{Id})$$

e basterà ora fare il prodotto. Vi faccio notare ancora una volta che con questa notazione l'esercizio si risolve quasi da solo.

Vediamo un ultimo esempio, anch'esso già trattato:

---

[1] i tre vettori $\{(1,1,0); (0,1,1); (0,0,1)\}$ sono una base di $\mathbb{R}^3$

Esercizio. Sia V lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$. Scrivere la matrice associata nella base canonica di $\mathbb{R}^3$ alla proiezione P_2 sul piano π di equazione $-x_1 + x_2 + x_3 = 0$ parallelamente alla retta r generata dal vettore $(1,2,1)$ (scriveremo brevemente $\mathbb{R}(1,2,1)$ per questa retta).
Suggerimento: c'è una base $\{\underline{g}_1, \underline{g}_2, \underline{g}_3\}$ di $\mathbb{R}^3$ per cui la matrice associata a P_2 è estremamente facile a scriversi. Qual è questa base ?[2]

Soluzione. Per trovare la matrice associata a P_2 nella base canonica ragioniamo come segue. Consideriamo una base $\mathcal{G} = \{\underline{g}_1, \underline{g}_2, \underline{g}_3\}$ fatta nel seguente modo: $\underline{g}_1$ e $\underline{g}_2$ sono vettori di π, mentre $\underline{g}_3$ è un vettore di r. Allora, per definizione di proiezione su un piano di $\mathbb{R}^3$ parallelamente ad una retta data, si ha

$$P_2(\underline{g}_1) = \underline{g}_1;\ P_2(\underline{g}_2) = \underline{g}_2;\ P_2(\underline{g}_3) = \underline{0}.$$

Riscriviamo queste relazioni come segue:
$P_2(\underline{g}_1) = 1\underline{g}_1 + 0\underline{g}_2 + 0\underline{g}_3$
$P_2(\underline{g}_2) = 0\underline{g}_1 + 1\underline{g}_2 + 0\underline{g}_3$
$P_2(\underline{g}_3) = 0\underline{g}_1 + 0\underline{g}_2 + 0\underline{g}_3$.

Ne segue che la matrice che rappresenta la proiezione P_2 rispetto alla base $\{\underline{g}_1, \underline{g}_2, \underline{g}_3\}$ scelta sia come base di partenza che di arrivo è la matrice

$$M^{\mathcal{G}}_{\mathcal{G}}(P_2) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

La matrice $M^{\text{can.}}_{\text{can.}}(P_2)$ che rappresenta la proiezione P_2 nella base canonica di $\mathbb{R}^3$ si ottiene a partire da $M^{\mathcal{G}}_{\mathcal{G}}(P_2)$ con un cambio di base, utilizzando la formula magica. Quindi:

$$M^{\text{can.}}_{\text{can.}}(P_2) = M^{\text{can.}}_{\mathcal{G}}(\text{Id}) \cdot M^{\mathcal{G}}_{\mathcal{G}}(P_2) \cdot M^{\mathcal{G}}_{\text{can.}}(\text{Id}) = M^{\text{can.}}_{\mathcal{G}}(\text{Id}) \cdot M^{\mathcal{G}}_{\mathcal{G}}(P_2) \cdot (M^{\text{can.}}_{\mathcal{G}}(\text{Id}))^{-1},$$

dove $M^{\text{can.}}_{\mathcal{G}}(\text{Id})$ è la matrice del cambio di base dalla base canonica alla base $\mathcal{G}$, ovvero è la matrice che ha per colonne le coordinate dei vettori $\{\underline{g}_1, \underline{g}_2, \underline{g}_3\}$ rispetto alla base canonica si $\mathbb{R}^3$. Per determinare esplicitamente $M^{\text{can.}}_{\mathcal{G}}(Id)$ dobbiamo pertanto determinare esplicitamente una base $\{\underline{g}_1, \underline{g}_2, \underline{g}_3\}$. Come abbiamo detto, i vettori $\underline{g}_1$ e $\underline{g}_2$ devono formare una base di π. Li determiniamo pertanto risolvendo l'equazione che definisce π: da $-x_1 + x_2 + x_3 = 0$ ricaviamo $x_1 = x_2 + x_3$, ovvero

$$\begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha + \beta \\ \alpha \\ \beta \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} + \beta \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$$

Una base $\{\underline{g}_1, \underline{g}_2\}$ per π è pertanto

$$\underline{g}_1 = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}; \qquad \underline{g}_2 = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$$

[2] Per rispondere a questa domanda interrogatevi su come agisce P_2 sui vettori del piano π e sui vettori della retta r.

Infine, $\underline{g}_3$ deve essere un vettore (non nullo) appartenente alla retta r. È chiaro che una possibile scelta di $\underline{g}_3$ è

$$\underline{g}_3 = \left| \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 1 \end{array} \right|$$

Con queste scelte di $\underline{g}_1, \underline{g}_2, \underline{g}_3$ troviamo

$$M_{\text{can.}}^{\text{can.}}(P_2) = \left| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right| \cdot \left| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right| \cdot \left| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right|^{-1} = \left| \begin{array}{ccc} 3/2 & -1/2 & -1/2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{array} \right|$$