Paolo Piazza

Corso di dottorato

K-Teoria

a.a. 2001-02

Riassunto delle lezioni

Contents

1. Lezione 1: fibrati vettoriali e teorema di omotopia.

1.1. Fibrati vettoriali.

Definizione 1. *Un fibrato vettoriale reale di rango k è una terna (E, π, X), dove E e X sono spazi topologici $\pi : E \to X$ è un'applicazione continua suriettiva e per ogni $x \in X$*
(i) $E_x := \pi^{-1}(x)$ ha una struttura di spazio vettoriale reale di dimensione k;
(ii) esiste un intorno U di x e un omeoomorfismo $\varphi_U : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^k$ tale che per ogni $x' \in U$
a) $\varphi_U(E_{x'}) \subseteq \{x'\} \times \mathbb{R}^k$
b) $\varphi_U|_{E_{x'}} : E_{x'} \to \{x'\} \times \mathbb{R}^k$ è un isomorfismo di spazi vettoriali.

E è detto *spazio totale* del fibrato, X è detta *base* del fibrato. Lo spazio vettoriale E_x è detto *fibra di E su x*. Gli intorni U sono detti *intorni banalizzanti*, gli omeoeomorfismi φ_U *banalizzazioni locali*. Se per ogni $x \in X$ l'intorno U può essere scelto uguale ad X, il fibrato vettoriale si dice *banale*.
A volte denoteremo un fibrato vettoriale con il simbolo $(E \to X)$ oppure semplicemente con E.

Definizioni analoghe.
- Fibrati vettoriali C^∞.
- Fibrati vettoriali complessi.
- Se X ed E sono varietà complesse allora (E, π, X) è un fibrato vettoriale complesso *olomorfo* se ogni banalizzazione locale $\varphi_U : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{C}^k$ è biolomorfa.

Dalla definizione di fibrato vettoriale segue che M ammette un ricoprimento $\{U_\alpha\}$ con intorni banalizzanti, che chiameremo *ricoprimento banalizzante*. Per ogni coppia di aperti U_α, U_β del ricoprimento, con $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, e per ogni $x \in U_\alpha \cap U_\beta$ l'applicazione

$$g_{\alpha\beta}(x) = \varphi_{U_\alpha}|_{E_x} \circ \left(\varphi_{U_\beta}^{-1}\Big|_{\{x\}\times\mathbb{R}^k} \right) : \{x\} \times \mathbb{R}^k \to \{x\} \times \mathbb{R}^k$$

è un isomorfismo di spazi vettoriali. Possiamo quindi pensare alle $g_{\alpha\beta}(x)$ come applicazioni continue

$$g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to GL(k, \mathbb{R}) .$$

Queste vengono dette *funzioni di transizione* e verificano le seguenti due proprietà, dette di *cociclo*:
1) $g_{\alpha\beta}^{-1} = g_{\beta\alpha}$ in $U_\alpha \cap U_\beta$,
2) $g_{\alpha\beta} \circ g_{\beta\gamma} = g_{\alpha\gamma}$ in $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$.

Viceversa, sia X uno spazio topologico e $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ un ricoprimento. Supponiamo che per ogni coppia $(\alpha, \beta) \in A \times A$ sia assegnata una funzione continua

$$g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to GL(k, \mathbb{R})$$

e che questa collezione di mappe verifichi le due proprietà di cociclo. Sia $\widehat{E}$ l'unione disgiunta dei $U_\alpha \times \mathbb{R}^k$; introduciamo una relazione d'equivalenza $\mathcal{R}$ in $\widehat{E}$ come segue

$$U_\alpha \times \mathbb{R}^k \ni (x, e)\ \mathcal{R}\ (y, f) \in U_\beta \times \mathbb{R}^k \Leftrightarrow x = y \text{ e } f = g_{\alpha\beta}(x)e$$

Sia E lo spazio quoziente dotato della topologia indotta e sia $\pi : E \to X$ la mappa che associa alla classe d'equivalenza di (x, e) il punto $x \in X$. Uno degli esercizi del *Primo compito a casa* consisteva nel dimostrare che (E, π, X) *è effettivamente un fibrato vettoriale di dimensione k.*

Quindi si può dare una definizione alternativa di fibrato vettoriale come un spazio topologico su cui siano dati un ricoprimento $\{U_\alpha\}$ e una collezione di mappe continue $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to GL(k, \mathbb{R})$ soddisfacenti le due proprieà di cociclo.

Definizione 2. *Siano* (E, π_E, X) *e* (F, π_F, X) *due fibrati vettoriali (sulla stessa base). Una* mappa di fibrati *da* (E, π_E, M) *a* (F, π_F, X) *è un'applicazione continua* $\phi : E \to F$ *che manda omomorficamente fibre in fibre corrispondenti, ovvero tale che per ogni* $x \in X$

1) $\phi(E_x) \subseteq F_x$

2) $\phi|_{E_x} : E_x \to F_x$ *è un omomorfismo di spazi vettoriali.*

Una mappa di fibrati $\phi : E \to F$ si dice *isomorfismo di fibrati* se è un omeoomorfismo e manda isomorficamente fibre in fibre corrispondenti. Si può verificare che se ϕ è continua ed un isomorfismo su ogni fibra, allora ϕ è un omeomorfismo e quindi un isomorfismo di fibrati.

Se $Y \subset X$ allora c'è una naturale nozione di fibrato ristretto ad Y: esso è, per definizione, la tripla $(\pi^{-1}Y, \pi|_{\pi^{-1}Y}, Y)$ e viene brevemente denotato con $E|_Y$.

Definizione 3. *Sia* (E, π, X) *un fibrato vettoriale. Una* sezione *del fibrato è un'applicazione continua* $s : X \to E$ *tale che* $\pi \circ s = id_X$ *ovvero tale che per ogni* $x \in X$ *risulti* $s(x) \in E_x = \pi^{-1}(x)$.

Denotiamo con $C(X, E)$ l'insieme delle sezioni del fibrato (E, π, X). Dato che ogni fibra è una spazio vettoriale, anche $C(X, E)$ è uno spazio vettoriale, con operazioni definite punto per punto. Analogamente si può definire $C^\infty(X, E)$ se (E, π, X) è un fibrato C^∞.

1.2. **Esempi.**

1) Sia M una varietà differenziabile. Per ogni punto $m \in M$ indichiamo con $T_m M$ lo spazio tangente alla varietà M nel punto m. Poniamo $TM = \bigcup_{m \in M} T_m M$ e definiamo $\pi : TM \to M$ ponendo $\pi(v) = m$ se $v \in T_m M$. Si può verificare, utilizzando carte locali per M, che (TM, π, M) è un fibrato vettoriale il cui rango è uguale alla dimensione di M. Tale fibrato vettoriale si dice *fibrato tangente* ad M.

2) Sia $\mathbb{R}P^n$ lo spazio proiettivo reale di dimensione n. Ricordiamo che $\mathbb{R}P^n \cong S^n / \sim$, dove $\sim$ è la relazione che identifica i vettori $\underline{x}$ e $-\underline{x}$. Dotiamo lo spazio proietivo della topologia quoziente. Consideriamo l'insieme

$$E_1\left(\mathbb{R}^{n+1}\right) = \left\{([\underline{x}], \underline{v}) \in \mathbb{R}P^n \times \mathbb{R}^{n+1} : \underline{v} = \lambda \underline{x}\right\}$$

dotato della topologia indotta dalla topologia prodotto, e l'applicazione $\pi : E_1\left(\mathbb{R}^{n+1}\right) \to \mathbb{R}P^n$ definita da $\pi([\underline{x}], \underline{v}) = [\underline{x}]$. La terna $\left(E_1\left(\mathbb{R}^{n+1}\right), \pi, \mathbb{R}P^n\right)$ è un fibrato vettoriale di rango 1. Per verificare la banalità locale procediamo come segue: per ogni $[\underline{x}] \in \mathbb{R}P^n$, sia U_1 un intorno di $\underline{x}$ in S^n tale che l'intesezione di U_1 con la sua immagine tramite l'applicazione antipodale sia vuota; l'aperto $U = U_1 / \sim \subseteq \mathbb{R}P^n$ è un intorno banalizzante di $[\underline{x}]$ e l'omeomorfismo banalizzante $\varphi_U : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}$ è esplicitamente definito da $\varphi_U([\underline{x}], t\underline{x}) = ([\underline{x}], t)$. Il fibrato di rango 1 appena definito è di fatto un fibrato C^∞ ed è detto *fibrato universale* su $\mathbb{R}P^n$.

3) Analogamente, possiamo definire la terna $\left(E_1\left(\mathbb{C}^{n+1}\right), \pi, \mathbb{C}P^n\right)$ che risulta essere un fibrato vettoriale complesso olomorfo di rango 1 sullo spazio proiettivo complesso $\mathbb{C}P^n$.

1.3. **Fibrato indotto da un'applicazione (pull-back).**

Sia f un'applicazione continua di spazi topologici $f : Y \to X$ e sia (E, π, X) un fibrato su X. Definiamo un fibrato su Y come segue.
Si consideri l'insieme

$$f^*E = \{(y, v) \in Y \times E \,|\, f(y) = \pi(v)\}.$$

Esistono due applicazioni naturali $\hat{f}$ e π^{ind}:

$$\hat{f} : f^*E \to E \text{ con } \hat{f}(y, v) = v$$

$$\pi^{ind} : f^*E \to X \text{ con } \pi^{ind}(y, v) = y$$

(f^*E, π^{ind}, N) è un fibrato vettoriale che è, per definizione, il *fibrato indotto da f su Y* o anche *il pull-back di E tramite f*.

Occorre verificare la proprietà di banalità locale. Sia $U \subset X$ un intorno banalizzante per E. $f^{-1}(U)$ è un aperto di Y; poniamo $f^{-1}(U) = \widehat{U}$. Sia $\psi : U \times \mathbb{R}^k \to \pi^{-1}(U)$ una banalizzazione di $\pi^{-1}(U)$. Si definisca:

$$\hat{\psi} : \widehat{U} \times \mathbb{R}^k \to (\pi^{ind})^{-1}(\widehat{U}) \text{ con } \hat{\psi}(y, v) = (y, \psi(f(y), v))$$

Si noti che $\pi(\psi(f(y), v)) = f(y)$ come deve essere. Non è difficile verificare che $\hat{\psi}$ è un omeomorfismo e quindi una banalizzazione locale per f^*E (l'inversa $(\hat{\psi})^{-1} : (\pi^{ind})^{-1}(\widehat{U}) \to \widehat{U} \times \mathbb{R}^k$ è infatti definita da $(\hat{\psi})^{-1}(y, w) = (y, \hat{w})$ con $\psi(f(y), \hat{w}) = w$).

Si può anche dare una definizione di fibrato indotto utilizzando le funzioni di transizione: se $E = \{(U_\alpha, g_{\alpha\beta})\}$, si ponga $f^*E = \{(f^{-1}(U_\alpha), g_{\alpha\beta} \circ f)\}$.

Osservazioni.
1. Se $(E \to X)$ è banale e $f : Y \to X$ è continua allora il fibrato indotto, $(f^*E \to Y)$, è banale.
2. Se $g : Z \to Y$ è continua e $f : Y \to X$ è continua, allora $(f \circ g)^*E$ è isomorfo a $g^*(f^*E)$: $(f \circ g)^*E \cong g^*(f^*E)$.
3. Se $i : Y \hookrightarrow X$ è un'inclusione allora $i^*E \cong E|_Y$.

1.4. **Teorema di omotopia.**

Prima di enunciare questo fondamentale risultato abbiamo bisogno di 2 Lemmi molto importanti; essi vengono utilizzati frequentemente nella teoria dei fibrati vettoriali.

Lemma 1. *(di estensione) Sia X uno spazio topologico compatto di Hausdorff* [1] *e $W \subseteq X$ un sottoinsieme chiuso. Sia $(E \to X)$ un fibrato vettoriale. Allora ogni sezione $s_W : W \to E|_W$ può essere estesa ad una sezione $s \in C(X, E)$.*

Sketch della dimostrazione. Localmente, in una banalizzazione locale, una
estensione esiste sempre per il Teorema di Tietze; poi si usa una partizione dell'unità per mettere insieme queste estensioni locali e definire un'estensione globale s.

La dimostrazione dipende solo dall'esistenza di una partizione dell'unità ed infatti il Lemma vale nell'ipotesi più generale che X sia paracompatto di Hausdorff.

Lemma 2. *Siano E ed F due fibrati su X, X compatto. Sia $W \subseteq X$ un chiuso e supponiamo che esista un isomorfismo di fibrati $\phi : E|_W \to F|_W$. Allora esiste un aperto $U \supseteq W$ ed un morfismo di fibrati $\Phi : E \to F$ che estende ϕ ed è un isomorfismo su U.*

[1] **Tutti i nostri spazi topologici sono di Hausdorff se non specificato diversamente**

Sketch della dimostrazione. L'isomorfismo ϕ può essere pensato come una sezione del fibrato $\mathrm{Hom}(E,F)$ ristretto a W [2]. Per il Lemma precedente esiste un'estensione Φ di ϕ che definisce quindi un morfismo di fibrati $E \to F$. Dato che $\Phi|_W = \phi$ è un isomorfismo, segue facilmente che esiste un aperto U contente W tale che $\Phi|_U$ è un isomorfismo.

Utilizzando questi due Lemmi abbiamo dimostrato in classe il seguente notevole

Teorema 1. *Sia Y compatto e siano f_0, f_1, due applicazioni continue $Y \to X$. Sia $(E \to X)$ un fibrato vettoriale su X. Se f_0 è omotopa a f_1, $f_0 \sim f_1$, allora f_0^*E è isomorfo a f_1^*E.*

Il teorema vale nell'ipotesi più generale che Y sia paracompatto.

[2] $\mathrm{Hom}(E,F)$ è il fibrato su X che ha fibra su x uguale a $\mathrm{Hom}(E_x,F_x)$

2. Lezione 2: come costruire nuovi fibrati.

2.1. Funtori continui.

Abbiamo già incontrato il fibrato $\mathrm{Hom}(E,F)\to X$ costruito a partire da due fibrati vettoriali E ed F. Bisogna verificare che questo è di fatto un fibrato vettoriale. Analogamente vogliamo definire il fibrato duale E^*, il fibrato $\Lambda^* E$ etc...
Saremo categorici. Sia $\mathbf{V}$ la categoria degli spazi vettoriali + applicazioni lineari e consideriamo, in generale, un funtore $\mathbf{T}$ dalla categoria $\mathbf{V}$ in se stessa. Ad esempio $\mathbf{T}(E)=E^*$, il duale, e se $\phi: E\to F$, allora $T(\phi)=\phi^*$, la trasposta di ϕ. Questo è un funtore controvariante. Possiamo anche considerare funtori covarianti, ad esempio, $T(E)=\Lambda^k E$, $T(\phi)=\Lambda^k\phi$, opppure, più in generale. funtori di più variabili

$$\mathbf{T}:\mathbf{V}\times\cdots\mathbf{V}\to\mathbf{V}$$

covarianti in alcune variabili e controvarianti in altre. Ad esempio, $T(E,F)=E\otimes F$, $T(\phi,\psi)=\phi\otimes\psi$. Per fissare le idee consideriamo un funtore covariante di una sola variabile. Diremo che questo funtore è *continuo* se la corrispondenza

$$\mathrm{Hom}(E,F)\ni\phi\longrightarrow T(\phi)\in\mathrm{Hom}(T(E),T(F))$$

è continua per ogni $E,\ F\in\mathbf{V}$. Questa nozione ha senso, dato che $\mathrm{Hom}(E,F)$ ha una naturale topologia per ogni coppia di spazi vettoriali.

Sia $\mathbf{T}:\mathbf{V}\to\mathbf{V}$ un funtore covariante continuo e sia (E,π,X) un fibrato vettoriale. Sia $T(E):=\cup_{x\in X}T(E_x)$ e sia $\pi_T: T(E)\to X$ la suriezione indotta da π. Sia $\phi:E\to F$ una mappa di fibrati su X, allora possiamo definire una mappa $T(\phi):T(E)\to T(F)$ ponendo $T(\phi)|_{T(E_x)}:=T(\phi|_{E_x})$.

Proposizione 1. *La terna $(T(E),\pi_T,X)$ ha una naturale struttura di fibrato vettoriale tale che se $\phi:E\to F$ è una mappa di fibrati, allora $T(\phi):T(E)\to T(F)$ è anche una mappa di fibrati .*

È ovvio che $T(\phi)$ dipende in maniera funtoriale da ϕ. La proposizione si dimostra considerando prima fibrati prodotto, poi fibrati banali ed infine fibrati generali; in quest'ultimo caso si lavora sulle banalizzazioni locali. I dettagli visti a lezione si trovano in [1] oppure a [10].

2.2. Il semigruppo $\mathrm{Vect}(X)$.

Notiamo che, in particolare, dati due fibrati $(E\to X)$ e $(F\to X)$ su X, possiamo definire il fibrato $(E\oplus F\to X)$, detto *somma di Whitney* di $(E\to X)$ e $(F\to X)$.

Definizione 4. *Sia X uno spazio topologico.* $\mathrm{Vect}_k(X)$ *è per definizione l'insieme delle classi di isomorfismo di fibrati vettoriali complessi di rango k. Analogamente si definisce* $\mathrm{Vect}_k^{\mathbb{R}}(X)$*, le classi di isomorfismo di fibrati vettoriali reali di rango k. Poniamo* $\mathrm{Vect}(X)=\cup_k\mathrm{Vect}_k(X)$.

È importante notare che $\mathrm{Vect}(X)$ è un *semigruppo* abeliano rispetto all'operazione $\oplus$, con elemento neutro uguale al fibrato banale $X\times\{0\}$. Notiamo anche che se $f:Y\to X$ è continua allora l'operazione di pull-back induce un morfismo di semigruppi $f^*:\mathrm{Vect}(X)\to\mathrm{Vect}(Y)$. Abbiamo quindi definito un funtore $\mathrm{Vect}(\ \ )$ dalla categoria degli spazi topologici compatti e applicazioni continue alla categoria dei semigruppi abeliani e morfismi di semigruppi.

Il Teorema di omotopia della Lezione 1 ha alcuni notevoli corollari.

Corollario 1. *Se X ed Y sono due spazi compatti ed $f : Y \to X$ è un'equivalenza omotopica* [3] *allora $f^* : \mathrm{Vect}(X) \to \mathrm{Vect}(Y)$ è un isomorfismo di semigruppi*

Corollario 2. *Se X è contraibile* [4] *allora ogni fibrato su X è banale ed esiste quindi un isomorfismo di semigruppi $\mathrm{Vect}(X) \cong \mathbb{N}$.*

2.3. **Incollamento di fibrati.**

Continuiamo con il tema principale di questa lezione: come costruire nuovi fibrati. Siano $X = X_1 \cup X_2$ e $X_1 \cap X_2 = A$ (tutti gli spazi essendo compatti). Supponiamo di avere fibrati vettoriali (E_j, π_j, X_j) e supponiamo che esista un *isomorfismo* di fibrati $\phi : E_1|_A \to E_2|_A$.

Definizione 5. *Il fibrato ottenuto per incollamento di (E_1, π_1, X) e (E_2, π_2, X) tramite ϕ è il fibrato $(E_1 \cup_\phi E_2 \to X)$ che ha come spazio totale*

$$E_1 \cup_\phi E_2 = E_1 \sqcup E_2 / \sim$$

con $e_1 \sim e_2 \Leftrightarrow \pi_1(e_1) = \pi_2(e_2) \in A$ e $e_2 = \phi(e_1)$.

Abbiamo verificato a lezione, utilizzando il Lemma 2 della Lezione 1, che questa definizione produce effettivamente un fibrato vettoriale su X.

Esempio. Sia $X = S^2$ e sia $X_1 = S^2_+$, un emisfero, e $X_2 = S^2_-$, l'altro emisfero, di modo che $A = S^1$, l'equatore. Siano $E_1 = S^2_+ \times \mathbb{C}$ e $E_2 = S^2_- \times \mathbb{C}$; un isomorfismo $\phi : E_1|_A \to E_2|_A$ è semlicemente un isomorfismo di fibrati banali $\phi : S^1 \times \mathbb{C} \to S^1 \times \mathbb{C}$ ed è quindi dato da un'applicazione continua $\phi : S^1 \to GL(1, \mathbb{C}) = \mathbb{C}^*$. Considerando $\phi_\ell(z) = z^{-\ell}$, $z \in S^1$, otteniamo per incollamento un fibrato complesso di rango 1. Il fibrato dato da $\phi(z) = 1/z$ è detto *fibrato di Hopf.*

Utilizzando argomenti analoghi a quelli utilizzati per dimostrare il teorema di omotopia della Lezione 1, abbiamo verificato la seguente

Proposizione 2. *La classe di isomorfismo di $(E_1 \cup_\phi E_2 \to X)$ dipende solo dalla classe di omotopia di $\phi : E_1|_A \to E_2|_A$.*

Sia SX la sospensione (non ridotta) di X: $SX = X \times [0,1]/\partial[0,1] \times X$. Siano Z, W due spazi topologici; denotiamo con $[Z, W]$ le classi di omotopia delle applicazioni continue da Z a W.

Proposizione 3. *Sia X uno spazio compatto ed SX la sua sospensione. Allora esiste una biezione*

$$\mathrm{Vect}_k(SX) \leftrightarrow [X, GL(k, \mathbb{C})]\,. \tag{1}$$

Sketch della dimostrazione. È chiaro che $SX = C^+X \cup C^-X$ con

$$C^+X = [0, 1/2] \times X/\{0\} \times X \qquad \text{e} \qquad C^-X = [1/2, 1] \times X/\{1\} \times X$$

(sono due coni su X). È anche chiaro che $X = C^+X \cap C^-X$.

Un'applicazione $X \to GL(k, \mathbb{C})$ definisce un isomorfismo di fibrati $\phi : X \times \mathbb{C}^k \to X \times \mathbb{C}^k$ e quindi, per incollamento di due fibrati banali sui due coni, un fibrato su SX e quindi un elemento in $\mathrm{Vect}_k(SX)$. La proposizione precedente ci assicura che quest'applicazione è ben definita.

D'altra pate ogni fibrato E di rango k su SX definisce per restrizione un fibrato su ciascun cono. I coni sono però contraibili e quindi questi fibrati sono banali (Corollario 2 di questa lezione). Siano

[3] esiste $g : X \to Y$ tale che $f \circ g \sim \mathrm{id}_X$ e $g \circ f \sim \mathrm{id}_Y$

[4] e cioè X è omotopicamente equivalente ad un punto

$\alpha^{\pm}$ queste due banalizzazioni; pensiamo a X come alla base dei due coni. Allora $\alpha^{+}|_X \circ (\alpha^{-})|_X^{-1}$: $X \times \mathbb{C}^k \to X \times \mathbb{C}^k$ è un isomorfismo di fibrati e corrisponde ad un'applicazione $X \to GL(k, \mathbb{C})$. Associando ad E quest'applicazione $X \to GL(k, \mathbb{C})$ si definisce l'inversa dell'applicazione data dall'incollamento.

Esempio È chiaro che $S^2 = S(S^1)$ e quindi $\mathrm{Vect}_1(S^2) = [S^1, GL(1, \mathbb{C})] = \pi_1(\mathbb{C}^*) = \pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$. In particolare *esistono infiniti fibrati di rango 1 non isomorfi sulla sfera.* Analogamente si hanno le biezioni di insiemi

$$\mathrm{Vect}_k(S^2) = [S^1, GL(k, \mathbb{C})] \equiv \pi_1(GL(k, \mathbb{C})) = \pi_1(U(k)) = \mathbb{Z}$$

dove la terza uguaglianza segue dal fatto che $U(k)$ è un retratto di deformazione di $GL(k, \mathbb{C})$ [5] e la quarta uguaglianza segue dall'isomorfismo $\pi_1(U(j) \cong \pi_1(U(j+1)) \, \forall j \geq 1$. Quest'ultimo isomorfismo segue dalla successione esatta lunga dei gruppi di omotopia associata alla fibrazione naturale $U(j) \to U(j+1) \to S^{2j+1} \subset \mathbb{R}^{2(j+1)} = \mathbb{C}^{j+1}$ con l'ultima mappa uguale all'applicazione che manda una matrice nel suo primo vettore colonna.

Vale la pena osservare (e utilizzeremo questa informazione alla fine della Lezione 5) che la stessa fibrazione può essere utilizzata per dimostrare più in generale che

$$\pi_i(U(j)) \simeq \pi_i(U(j+1)) \,, \quad \pi_i(SU(j)) \simeq \pi_i(SU(j+1)) \; \forall i \leq 2j-1 \,. \tag{2}$$

Induttivamente

$$\pi_i(U(j)) \simeq \pi_i(U(j+q)) \,, \quad \pi_i(SU(j)) \simeq \pi_i(SU(j+q)) \; \forall i \leq 2j-1 \,, \forall q \,. \tag{3}$$

Ad esempio

$$\pi_3(SU(2)) \simeq \pi_3(SU(3)) \tag{4}$$

Sia $U(\infty) = \cup_k U(k)$. Utilizzando l'inclusione naturale $U(j) \to U(j+\ell)$,

$$U(j) \ni A \to \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I_{\ell \times \ell} \end{pmatrix} \in U(j+\ell) \,,$$

vediamo che $U(\infty)$ ha una naturale struttura di gruppo. Dotiamo $U(\infty)$ della topologia del limite induttivo. Allora, per quanto appena visto

$$\pi_i(U(j)) \simeq \pi_i(U(\infty)) \,, \quad \forall i \leq 2j-1 \tag{5}$$

[5] Applicare Gram-Schmidt per definire una retrazione $r : GL(k, \mathbb{C}) \to U(k)$, e cioè un'applicazione tale che $r \circ i = \mathrm{id}_{U(k)}$. Quest'applicazione è di fatto un'equivalenza omotopica: non ci soffermiamo sui dettagli ma è chiaro che basta procedere induttivamente, pensate ad esempio al caso $k = 2$ e come sia possibile deformare con continuità la mappa r che ortonormalizza due vettori all'identità su quei due vettori.

3. Lezione 3: il teorema di classificazione.

3.1. Il fibrato universale sulla Grassmanniana.

Cominciamo con l'introdurre la Grassmanniana dei k-piani in $\mathbb{R}^n$.
Sia $n > k$. Poniamo

$$G_k\left(\mathbb{R}^n\right) = \{\text{sottospazi vettoriali } k\text{−dimensionali di } \mathbb{R}^n\}.$$

Lo spazio $G_k\left(\mathbb{R}^n\right)$ ha una naturale topologia: sia $V_k(\mathbb{R}^n)$ l'aperto di $\mathbb{R}^n \times \times \cdots \times \mathbb{R}^n$ k-volte costituito dalle k-ple di vettori linearmente indipendenti. Esiste una suriezione $\pi : V_k(\mathbb{R}^n) \to G_k(\mathbb{R}^n)$

$$\pi(\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_k) = \mathrm{Span}(\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_k).$$

Dotiamo $G_k(\mathbb{R}^n)$ della topologia quoziente: U è aperto in $G_k(\mathbb{R}^n)$ se e solo se $\pi^{-1}(U)$ è aperto in $V_k(\mathbb{R}^n)$.
$G_k(\mathbb{R}^n)$ è di fatto una varietà differenziabile compatta di dimensione $n(n-k)$. Consideriamo l'insieme

$$E_k\left(\mathbb{R}^n\right) = \{(p, \underline{v}) \in G_k\left(\mathbb{R}^n\right) \times \mathbb{R}^n : \underline{v} \in p\}$$

e l'applicazione $\pi : E_k\left(\mathbb{R}^n\right) \to G_k\left(\mathbb{R}^n\right)$ definita da $\pi\left(p, \underline{v}\right) = p$. La terna $\left(E_k\left(\mathbb{R}^n\right), \pi, G_k\left(\mathbb{R}^n\right)\right)$ è un fibrato vettoriale di rango k e C^∞. Le verifiche di queste affermazioni costituiscono un interessante esercizio del *Primo compito a casa* (con suggerimenti). Si noti che per $k = 1$ riotteniamo l'esempio 2 della prima lezione.
$G_k\left(\mathbb{R}^n\right)$ è detta la Grassmanniana dei k-piani in $\mathbb{R}^n$. $\left(E_k\left(\mathbb{R}^n\right), \pi, G_k\left(\mathbb{R}^n\right)\right)$ è detto *fibrato universale* sulla Grassmanniana.

Analogamente lo spazio $G_k\left(\mathbb{C}^n\right)$ è una varietà complessa compatta di dimensione complessa $n(n-k)$ e la terna $\left(E_n\left(\mathbb{C}^n\right), \pi, G_k\left(\mathbb{C}^n\right)\right)$ è un fibrato vettoriale complesso olomorfo di rango k, detto *fibrato universale* su $G_k(\mathbb{C}^n)$.

Osservazioni.
1. Se consideriamo l'inclusione naturale di $\mathbb{C}^n$ in $\mathbb{C}^{n+j}$, $(z_1, \ldots, z_n) \to (z_1, \ldots, z_n, 0, \ldots, 0)$, allora rimane definita in maniera naturale una mappa $j_{n,n+j} : G_k(\mathbb{C}^n) \to G_k(\mathbb{C}^{n+j})$. È chiaro che $j^*_{n,n+j}(E_k(\mathbb{C}^{n+j})) \simeq E_k(\mathbb{C}^n)$.
2. Se $T \in GL(n, \mathbb{C})$ allora T induce un'applicazione $T_\sharp : G_k(\mathbb{C}^n) \to G_k(\mathbb{C}^n)$, che è un diffeomorfismo.
3. C'è un'applicazione naturale

$$\psi : G_k(\mathbb{C}^n) \to G_{n-k}(\mathbb{C}^n) \tag{6}$$

ottenuta mandando V in $V^\perp$. Quest'applicazione è un diffeomorfismo.
4. Alcuni autori definiscono la Grassmanniana $G_k(\mathbb{C}^n)$ come l'insieme dei sottospazi di *codimensione* k in $\mathbb{C}^n$. Le due definizioni sono compatibili tramite l'applicazione ψ in (6).

I fibrati universali non sono mai banali. Vedremo questo fatto in dettaglio più avanti, quando parleremo di classi caratteristiche. Per il momento accontentiamoci di verificare quest'affermazione per il fibrato universale su $\mathbb{R}P^n$. Prima abbiamo bisogno di un lemma.

Lemma 3. *Un fibrato vettoriale (E, π, X) di rango k è banale se e solo se esistono k sezioni continue $s_1, ..., s_k$ linearmente indipendenti, ovvero tali che $s_1(x), ..., s_k(x)$ siano linearmente indipendenti per ogni $x \in X$.*

Dimostrazione. Supponiamo (E, π, X) banale. Allora esiste una mappa di fibrati $\Phi : E \to X \times \mathbb{R}^k$ che induce un isomorfismo $\Phi_x : E_x \to \{x\} \times \mathbb{R}^k$ su ogni fibra. Sia $\Psi = \Phi^{-1} : X \times \mathbb{R}^k \to E$ e definiamo le applicazioni $s_i : X \to E$ ponendo $s_i(x) = \Psi(x, \underline{e}_i)$ (dove $\underline{e}_i$ è l'i-simo vettore canonico di $\mathbb{R}^k$). Le applicazioni $s_1, ..., s_k$ sono sezioni continue e per costruzione sono linearmente indipendenti. Vicercersa, supponiamo che esistano k sezioni continue $s_1, ..., s_k$ linearmente indipendenti. Definiamo $\Psi : X \times \mathbb{R}^k \to E$ ponendo $\Psi(x, \underline{v}) = v^1 s_1(x) + ... + v^k s_k(x)$. L'applicazione Ψ è continua e induce un isomorfismo su ogni fibra; ne segue che Ψ è un omeomorfismo (questo era un esercizio assegnato a casa) e quindi un isomorfismo di fibrati. Quindi (E, π, X) è banale.

Esempio. Il fibrato $\left(E_1(\mathbb{R}^{n+1}), \pi, \mathbb{R}P^n\right)$ non è banale.
Dimostrazione. Basta far vedere che ogni $s \in C\left(\mathbb{R}P^n, E_1(\mathbb{R}^{n+1})\right)$ si annulla in un punto. Sia $s : \mathbb{R}P^n \to E_1(\mathbb{R}^{n+1})$ una sezione. Sia $p : S^n \to \mathbb{R}P^n$ la proiezione canonica. L'applicazione $q = s \circ p : S^n \to E_1(\mathbb{R}^{n+1})$ è tale che $q(\underline{x}) = ([\underline{x}], t(\underline{x})\underline{x})$, con $t \in C(S^n)$. Inoltre, poiché $q(-\underline{x}) = q(\underline{x})$, si deve avere $t(-\underline{x}) = -t(\underline{x})$. Allora, poiché S^n è connessa e $t \in C^0(S^n)$, deve esistere $\underline{x}_0 \in S_n$ tale che $t(\underline{x}_0) = 0$, ovvero tale che $s([\underline{x}_0]) = ([\underline{x}_0], \underline{0})$. Ne segue che il fibrato universale su $\mathbb{R}P^n$ non è banale.

3.2. **Enunciato del teorema di classificazione.**

Ci si può giustamente domandare perché i fibrati $(E_k(\mathbb{R}^n), \pi, G_k(\mathbb{R}^n))$ sono detti *universali.* Dimostreremo il seguente

Teorema 2. *Sia X uno spazio compatto e sia (E, π, X) un fibrato vettoriale complesso di rango k. Allora esiste $m \geq k$ ed un'applicazione continua $f : X \to G_k(\mathbb{C}^m)$ tale che $f^* E_k(\mathbb{C}^m) \simeq E$.*
Se (E, π, X) ammette n intorni banalizzanti, allora possiamo scegliere $m = nk$.

Detto a parole, ogni fibrato vettoriale è il pull-back tramite un'applicazione continua di un fibrato universale su una Grassmanniana. L'applicazione $f : X \to G_k(\mathbb{C}^m)$ che costruiremo nel corso della dimostrazione del teorema 2 è detta *applicazione classificante* per E. Osserviamo che se $f : X \to G_k(\mathbb{C}^m)$ è classificante per E, allora $j_{m,m+j} \circ f : X \to G_k(\mathbb{C}^{m+j})$ è anche classificante per E (basta applicare le proprietà del fibrato indotto viste durante la prima lezione, prima del paragrafo 1.4).
Come sono collegate due applicazioni classificanti ? La risposta è data dal seguente

Teorema 3. *Sia X uno spazio compatto e siano $f_0 : X \to G_k(\mathbb{C}^m)$, $f_1 : X \to G_k(\mathbb{C}^\ell)$ due applicazioni continue.*
Supponiamo che $f_0^* E_k(\mathbb{C}^m) \simeq f_1^* E_k(\mathbb{C}^\ell)$; allora $j_{m,m+\ell} \circ f_0 : X \to G_k(\mathbb{C}^{m+\ell})$ è omotopa a $j_{\ell,m+\ell} \circ f_1 : X \to G_k(\mathbb{C}^{m+\ell})$:

$$j_{m,m+\ell} \circ f_0 \sim j_{\ell,m+\ell} \circ f_1 \tag{7}$$

Corollario 3. *(Teorema di classificazione) Supponiamo che X ammetta un ricoprimento costituito da n intorni contraibili (ad esempio X è una varietà differenziabile compatta). Allora esiste una biezione*

$$\mathrm{Vect}_k(X) \leftrightarrow [X, G_k(\mathbb{C}^{2nk})] \tag{8}$$

Il corollario è una conseguenza diretta dei due teoremi: ogni fibrato su X ammette gli intorni di cui nell'enunciato come intorni banalizzanti (perché abbiamo visto che un fibrato su uno spazio contraibile è banale) . Sia $f \in [X, G_k(\mathbb{C}^{2nk})]$; allora posssiamo associare ad f la classe di isomorfismo del fibrato $f^* E_k(\mathbb{C}^{2nk})$. L'applicazione è ben definita per il Teorema di omotopia. L'inversa di quest'applicazione si ottiene assegnando ad un fibrato E l'applicazione classificante $j_{nk,2nk} \circ f$, con $f : X \to G_k(\mathbb{C}^{nk})$ l'applicazione classificante per E di cui nel teorema 2. Per il teorema 3 quest'applicazione è ben definita ed è l'inversa dell'applicazione $[X, G_k(\mathbb{C}^{2nk})] \ni f \to f^* E_k(\mathbb{C}^{2nk})$.

Per una varietà compatta X che ammetta un ricoprimento di n-intorni contraibili, la Grassmanniana $G_k(\mathbb{C}^{2nk})$ è detto uno **spazio classificante**.

3.3. Preliminari su sottofibrati, morfismi iniettivi/suriettivi, successioni di fibrati.

Per dimostrare il teorema abbiamo bisogni di alcuni **preliminari** che hanno, comunque, un loro interesse.

Definizione 6.
1) Sia (E, π, X) un fibrato vettoriale di rango k. Un sottoinsieme $G \subseteq E$ è un sottofibrato se $(G, \pi|_G, X)$ è un fibrato vettoriale.
2) Siano (E, π_E, X), (F, π_F, X) due fibrati. Un morfismo di fibrati $\phi : F \to E$ è un monomorfismo (epimorfismo) se $\forall x \in X$ $\phi_x := \phi|_{F_x}$ è iniettiva (suriettiva).

Se F è un sottofibrato di E allora $i : F \hookrightarrow E$ è un monomorfismo. Viceversa:

Proposizione 4. *Se $\phi : F \to E$ è un monomorfismo di fibrati, allora $\phi(F)$ è un sottofibrato di E.*

Dimostrazione. Il problema è locale; possiamo allora supporre che $F = X \times V'$ e $E = X \times V$. Fissiamo $x \in X$ e sia W_x un complementare di $\phi_x(V')$ in V: $V \equiv E_x = W_x \oplus \phi_x(V')$. Sia $G = X \times W_x$; questo è ovviamente un sottofibrato di $E (= X \times V)$; denotiamo con $i : G \to E$ l'inclusione naturale. Sia $\theta : F \oplus G \to E$ il morfismo di fibrati definito da $\theta(f \oplus g) = \phi(g) + i(g)$. È chiaro che θ_x è un isomorfismo. Esiste allora un intorno U di x in X tale che $\theta_U := \theta|_U$ è un isomorfismo. Ma allora $\theta_U(F|_U)$ è un sottofibrato di $\theta_U((F \oplus G)|_U) = E|_U$ (visto che $F|_U$ è un sottofibrato di $(F \oplus G)|_U$). D'altra parte $\theta_U(F|_U) = \phi_U(F|_U) \equiv \phi(F)|_U$. Ne segue che $\phi(F)$ è un sottofibrato.

Osservazioni.
1. Notare che l'argomento appena fornito può anche essere utilizzato per dimostrare che per ogni morfismo $\phi : F \to E$ di fibrati, l'insieme $\{x \in X \mid \phi_x$ è un monomorfismo $\}$ è aperto in X.
2. Notiamo anche che un sottofibrato F di E è localmente un addendo diretto di E; ne segue che $E/F := \cup_{x \in X} E_x/F_x$ ha una naturale struttura di fibrato vettoriale, detto *fibrato quoziente*.

Argomenti simili a quelli utilizzati per dimostrare l'ultima proposizione (congiuntamente all'Osservazione 1) mostrano anche la seguente

Proposizione 5. *Siano $(F \to X)$ e $(E \to X)$ due fibrati e $\phi : F \to E$ un morfismo di fibrati. Supponiamo che $\dim \mathrm{Ker}(\phi_x)$ sia costante in x. Allora*

$$\mathrm{Ker}\phi := \cup_{x \in X} \mathrm{Ker}(\phi_x)\,, \quad \mathrm{Im}\phi := \cup_{x \in X} \mathrm{Im}(\phi_x)\,, \quad \mathrm{coker}\phi := \cup_{x \in X} \mathrm{coker}(\phi_x)$$

sono fibrati vettoriali su X.

È anche importante poter parlare di una metrica su un fibrato $(E \to X)$; questa è una famiglia continua di metriche $h(x)$ su E_x. Più precisamente una metrica h su $(E \to X)$ è una sezione continua del fibrato $\mathrm{Herm}(E)$ delle forme hermitiane su E tale che $h(x)$ sia definita positiva $\forall x \in X$. Localmente una metrica esiste sempre; basta utilizzare una banalizzazione. Per mezzo di una partizione dell'unità possiamo mettere insieme queste metriche locali e definire una metrica h su tutto il fibrato $(E \to X)$.

Sia F un sottofibrato di E e sia h una metrica su E. Definiamo

$$F^{\perp} := \cup_{x \in X} (F_x)^{\perp}.$$

Non è difficile dimostrare che $F^{\perp}$ è un sottofibrato di E.

Definizione 7. *Siano $(E^j \to X)$ fibrati su X e $\alpha^j : E^j \to E^{j-1}$ morfismi di fibrati. La successione di fibrati e morfismi*

$$\cdots \to E^{j-1} \xrightarrow{\alpha_{j-1}} E^j \xrightarrow{\alpha_j} E^{j+1} \to \cdots$$

è esatta se $\forall x \in X$ la successione indotta sulle fibre su x

$$\cdots \to E_x^{j-1} \to E_x^j \to E_x^{j+1} \to \cdots$$

è esatta.

Proposizione 6. *Sia*

$$0 \to E^0 \xrightarrow{\alpha^0} E \xrightarrow{\alpha} E^1 \xrightarrow{\alpha^1} 0$$

una successione esatta corta di fibrati. Allora $E \simeq E^0 \oplus E^1$.

Dimostrazione. E^0 è isomorfo a $\alpha^0(E^0)$ dato che α^0 è un monomorfismo. D'altra parte, sia h una metrica in E; allora $E \simeq \alpha^0(E^0) \oplus (\alpha^0(E^0))^{\perp}$ e, chiaramente, $(\alpha^0(E^0))^{\perp} \simeq E/\alpha^0(E^0)$ che per l'esattezza è uguale a $E/\mathrm{Ker}\alpha$ che è isomorfo a E^1, di nuovo per l'esattezza. Segue la tesi.

Esempio. Sia (E, π, X) un fibrato di rango k su X. Supponiamo che esista un epimorfismo di fibrati $\phi : X \times \mathbb{C}^m \to E$ per $m \geq k$. La dimensione di $\mathrm{Ker}(\phi_x)$ è allora costante e quindi, per la Proposizione 5, $\mathrm{Ker}\phi$ è un sottofibrato. Abbiamo una ovvia successione corta di fibrati

$$0 \to \mathrm{Ker}\phi \hookrightarrow X \times \mathbb{C}^m \xrightarrow{\phi} E \to 0$$

e quindi, per quanto appena visto, un isomorfismo

$$X \times \mathbb{C}^m \simeq E \oplus \mathrm{Ker}\phi \tag{9}$$

Vedremo la prossima lezione che una tale suriezione esiste sempre se X è compatto.

4. Lezione 4: dimostrazione teorema di classificazione. Definizione di K-teoria.

4.1. Dimostrazione teorema di classificazione (sketch).

Il risultato chiave per la costruzione dell'applicazione classificante è il seguente

Lemma 4. *Sia (E, π, X) un fibrato di rango k su X e supponiamo che esistano n intorni banalizzanti. Allora esiste un epimorfismo di fibrati*

$$\phi : X \times \mathbb{C}^{kn} \to E\,.$$

Dimostrazione. Basta vedere che esiste un sottospazio V di $C(X, E)$ di dimensione kn tale che l'applicazione naturale $X \times V \to E$ definita da

$$X \times V \ni (x, s) \to s(x) \in E_x$$

sia suriettiva per ogni $x \in X$. Su un fissato intorno banalizzante U_j possiamo risolvere il problema dato che esistono k sezioni linearmente indipendenti. Sia $\{f_i\}$ una partizione dell'unità subordinata a $\{U_i\}_{i=1}^n$. Estendiamo queste k sezioni utilizzando f_j e otteniamo un sottospazio di dimensione k, sia esso V_j, in $C(X, E)$. Ora consideriamo $V = V_1 \oplus \cdots V_n \subset C(X, E)$. Non è difficile verificare che V ha la proprietà richiesta.

Questo lemma ha delle notevoli conseguenze. Innanzitutto procedendo come nell'ultimo Esempio della lezione precedente otteniamo la seguente

Proposizione 7. *Sia X compatto e sia (E, π, X) un fibrato su X. Supponiamo che E ammetta n intorni banalizzanti. Allora esiste un fibrato F tale che $E \oplus F = X \times \mathbb{C}^{kn}$.*

Il Lemma ci consente anche (e soprattutto !) di costruire la mappa classificante. Infatti se $\phi : X \times \mathbb{C}^{kn} \to E$ è la suriezione di cui nel Lemma 4, allora $\mathrm{Ker}\phi$ è un sottofibrato di rango $nk - k$, con $k = \mathrm{rango} E$. L'applicazione

$$X \ni x \xrightarrow{f} (\mathrm{Ker}\phi_x)^\perp \in G_k(\mathbb{C}^{kn}) \tag{10}$$

è allora continua e $f^*(E_k(\mathbb{C}^{kn})) \simeq E$. Per dimostrare quest'ultimo punto ricordiamo che

$$f^*(E_k(\mathbb{C}^{nk})) = \{(x, (V, \underline{v})) \in X \times E_k(\mathbb{C}^{nk})\,,\, \underline{v} \in V \mid f(x) = V\}$$

Sia $e \in E$ ed $x = \pi_E(x)$. Sappiamo che esiste $\underline{v} \in \mathbb{C}^{kn}$ tale che $\phi(x, \underline{v}) = e$ Definiamo

$$\beta : E \to f^*(E_k(\mathbb{C}^{nk}))$$

associando a $e \in E$ l'elemento $(x, ((\ker \phi_x)^\perp, \underline{v}))$. Questo è l'isomorfismo cercato. Lo sketch della dimostrazione del Teorema 2 è ora completo. In classe abbiamo anche dato una dimostrazione del Teorema 3 che qui però omettiamo.

4.2. Il teorema di classificazione per spazi paracompatti.

Se X è paracompatto non sarà possibile in generale trovare un numero finito di intorni banalizzanti. In questo caso più generale si può ancora trovare uno spazio classificante.

Sia $\mathbb{C}^\infty$ lo spazio vettoriale delle successioni di numeri complessi

$$(z_1, \ldots, z_n, \ldots)$$

con $z_j \neq 0$ soltanto per un numero finito di indici. C'è un'inclusione naturale di $\mathbb{C}^j$ in $\mathbb{C}^\infty$ e una successione di inclusioni $\cdots \subset \mathbb{C}^k \subset \mathbb{C}^{k+1} \subset \cdots$.
Possiamo dotare $\mathbb{C}^\infty$ di una topologia: U è aperto in $\mathbb{C}^\infty$ se e solo se $U \cap \mathbb{C}^k$ è aperto in $\mathbb{C}^k$ $\forall k$. Si dice in questo caso che $\mathbb{C}^\infty$ ha la topologia del limite diretto.

Definizione 8. *La Grassmanniana $G_k(\mathbb{C}^\infty)$ è l'insieme dei k-sottospazi vettoriali di $\mathbb{C}^\infty$ con la topologia del limite diretto indotta dalle inclusioni*

$$\cdots \subset G_k(\mathbb{C}^j) \subset G_k(\mathbb{C}^{j+1}) \subset \ldots$$

Il fibrato universale $E_k(\mathbb{C}^\infty)$ è uguale a

$$E_k(\mathbb{C}^\infty) := \{(V, \underline{v}) \in G_k(\mathbb{C}^\infty) \times \mathbb{C}^\infty \mid \underline{v} \in V\}$$

dotato della topologia indotta dalla topologia prodotto.

Proposizione 8. *$(E_k(\mathbb{C}^\infty) \to G_k(\mathbb{C}^\infty))$ è un fibrato vettoriale di rango k.*

La dimostrazione non è difficile, modulo qualche risultato tecnico sugli spazi paracompatti. Il seguente teorema si dimostra in maniera analoga ai teoremi 2, 3 della lezione precedente:

Teorema 4. *Sia X uno spazio paracompatto e (E, π, X) un fibrato di rango k su X. Allora esiste un'applicazione continua*

$$f : X \to G_k(\mathbb{C}^\infty)$$

tale che $E \simeq f^* E_k(\mathbb{C}^\infty)$.
Se $g : X \to G_k(\mathbb{C}^\infty)$ è un'altra applicazione con questa proprietà allora $f \sim g$.

Corollario 4. *Sia X uno spazio paracompatto. Allora esiste una biezione*

$$\mathrm{Vect}_k(X) \leftrightarrow [X, G_k(\mathbb{C}^\infty)]$$

Per ulteriori dettagli si consulti [10] oppure [8].

4.3. Definizione del gruppo di K-teoria e prime proprietà.

La corrispondenza $X \to \mathrm{Vect}(X)$ definisce un *funtore omotopico controvariante* dalla categoria degli spazi topologici compatti + applicazioni continue [6] alla categoria dei semigruppi abeliani + morfismi di semigruppi.
Dato un semigruppo A è possibile definire in maniera naturale un gruppo $K(A)$ ed un omomorfismo di semigruppi

$$\alpha : A \to K(A)$$

in modo tale che se G è un gruppo e $\gamma : A \to G$ è un morfismo di semigruppi *allora* esiste un'unico morfismo di gruppi

$$\kappa : K(A) \to G$$

tale che $\kappa \circ \alpha = \gamma$. Il gruppo $K(A)$ è detto gruppo di Grothendieck associato al semigruppo.

Essendo la soluzione di un problema universale, se un tale gruppo esiste allora deve essere unico. Per quel che concerne l'esistenza consideriamo $A \times A$ ed introduciamo la seguente relazione di equivalenza:

$$(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow \exists u \in A \mid a + d + u = b + c + u \tag{11}$$

È facile verificare che trattasi effettivamente di una relazione di equivalenza.
$A \times A/\sim$ è un gruppo abeliano con l' operazione di somma indotta da quella di A; l'elemento neutro è uguale alla classe di equivalenza di (a, a), denotata $[a, a]$, e l'inverso di $[a, b]$ è semplicemente $[b, a]$.
Definiamo

$$K(A) := A \times A/\sim \quad \text{ e } \quad \alpha : A \to K(A)\ ,\ \alpha(a) = [a, 0].$$

[6] oppure, più in generale, la categoria degli spazi paracompatti

Se G è un gruppo e $\gamma : A \to G$ un morfismo di semigruppi allora definiamo $\kappa : K(A) \to G$ tramite $\kappa[a,b] = \gamma(a) - \gamma(b)$. κ è ben definito ed è l'unico omomorfismo di gruppi tale che $\kappa \circ \alpha = \gamma$

Notiamo che la corrispondenza appena definita è funtoriale covariante: se B è un semigruppo, $K(B)$ il suo gruppo di Grothendieck con morfismo $\beta : B \to K(B)$ e se $h : A \to B$ è un morfismo di semigruppi allora possiamo definire un'applicazione $k(h) : K(A) \to K(B)$ tramite $k(h)[a,b] = [h(a), h(b)]$. Questo è un morfismo di gruppi ed è tale che $\beta \circ h = k(h) \circ \alpha$.

Definizione 9. *Sia X uno spazio topologico compatto. Il gruppo di K-teoria associato a X è il gruppo abeliano $K(X) := K(\mathrm{Vect}(X))$.*

Abbiamo definito un **funtore omotopico controvariante** *dalla categoria degli spazi topologici compatti + applicazioni continue alla categoria dei gruppi abeliani + morfismi di gruppi.*

Denotiamo la classe di equivalenza $[E, F]$ di una coppia (di classi di isomorfismo) di fibrati tramite la differenza formale $[E] - [F]$.

Osservazioni.

0. È chiaro che se X è un punto p allora $K(p) = \mathbb{Z}$ (infatti $\mathrm{Vect}(p) = \mathbb{N}$ e $K(\mathbb{N}) = \mathbb{Z}$).

1. $K(X)$ è di fatto un anello commutativo unitario, con operazione indotta dal prodotto tensoriale di due fibrati e unità uguale a $[X \times \mathbb{C}]$. In generale denotiamo il fibrato prodotto $X \times \mathbb{C}^N$ con il simbolo $\mathbf{I}^N$.

2. Ogni $\lambda = [E] - [F] \in K(X)$ può essere scritto nella forma $\lambda = [H] - [\mathbf{I}^m]$ per un opportuno $m \in \mathbb{N}$. Infatti, come conseguenza del Lemma 4, abbiamo visto che per ogni fibrato F su X esiste un fibrato F' tale che $F \oplus F' \simeq X \times \mathbb{C}^m := \mathbf{I}^m$. Si ha allora

$$\lambda = [E] - [F] = [E \oplus F'] - [F \oplus F'] = [H] - [\mathbf{I}^m] \text{ con } H = E \oplus F'.$$

3. Notiamo che $\lambda = [E] - [F] = 0$ in $K(X)$ allora esiste G tale che $E \oplus G = F \oplus G$ in $\mathrm{Vect}(X)$. Se G' è tale che $G \oplus G' = \mathbf{I}^m$ allora $E \oplus \mathbf{I}^m = F \oplus \mathbf{I}^m$.

Definizione 10. *Due fibrati E ed F sono stabilmente equivalenti se esistono fibrati banali $\mathbf{I}^n$, $\mathbf{I}^m$ tali che*

$$E \oplus \mathbf{I}^m \simeq F \oplus \mathbf{I}^n\,.$$

Quindi se $[E] = [F]$ in $K(X)$ allora E ed F sono stabilmente equivalenti (e tramite l'aggiunzione dello stesso fibrato banale). Viceversa, se esiste $\mathbf{I}^m$ tale che $E \oplus \mathbf{I}^m = F \oplus \mathbf{I}^m$ allora, ovviamente, $[E] = [F] \in K(X)$.

Definizione 11. *Sia X uno spazio con punto base p e sia $i : p \hookrightarrow X$ l'inclusione: definiamo $\widetilde{K}(X) = \mathrm{Ker}(i^* : K(X) \to K(p))$. Il sottogruppo $\widetilde{K}(X)$ è per definizione il gruppo di K-teoria ridotta di X.*

$\widetilde{K}(X)$ è costituito dalle differenze formali $[E] - [F]$ di fibrati che hanno lo stesso rango su p [7]; infatti tramite l'isomorfismo $K(p) = \mathbb{Z}$ è chiaro che $i^*([E] - [F]) = \dim(E_p) - \dim(F_p)$. È ovvio che la mappa di proiezione $c : X \to p$ induce un morfismo $c^* : K(p) \to \widetilde{K}(X)$ tale che $i^* \circ c^* = \mathrm{id}_{K(p)}$. Ne segue che i^* è suriettiva e che c^* è iniettiva. Otteniamo una successione esatta corta

$$0 \to \widetilde{K}(X) \to K(X) \to K(p) \to 0\ ,$$

e l'applicazione iniettiva c^* induce un isomorfismo $K(X) \simeq \widetilde{K}(X) \oplus K(p) \simeq \widetilde{K}(X) \oplus \mathbb{Z}$.

[7] Se X è connesso allora $\widetilde{K}(X)$ è costituito dalle differenze formali $[E] - [F]$ di fibrati che hanno lo stesso rango.

5. Lezione 5: Equivalenza stabile. Teorema di stabilità e sue conseguenze. Successione esatta in K-teoria.

5.1. Equivalenza stabile.

Sia X compatto. Consideriamo il semigruppo $\mathrm{Vect}(X)$ ed introduciamo la seguente relazione di equivalenza: $E \sim_s F \Leftrightarrow E$ è stabilmente equivalente a F; più esplicitamente

$$E \sim_s F \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, \mathbf{I}^n, \mathbf{I}^m \mid E \oplus \mathbf{I}^m \simeq F \oplus \mathbf{I}^n .$$

Proposizione 9. $\mathrm{Vect}(X)/\sim_s$ *è un gruppo abeliano ed è isomorfo a* $\widetilde{K}(X)$.

Dimostrazione. Denotiamo con $\{E\}_s$ la classe di equivalenza stabile di un fibrato. L'operazione di somma è sempre data dalla somma diretta di due fibrati. L'elemento neutro è $\{X \times \{0\}\}_s = \{\mathbf{I}^\ell\}_s$ e l'inverso di $\{E\}_s$ è $\{E'\}_s$ tale che $E \oplus E' \simeq \mathbf{I}^m$. È ora immediato verificare che $\mathrm{Vect}(X)/\sim_s$ è un gruppo abeliano.
Verifichiamo che è isomorfo a $\widetilde{K}(X)$. Possiamo supporre che X sia connesso (altrimenti lavoriamo separatamente su ogni componente connessa).
C'è un morfismo naturale di semigruppi $\gamma : \mathrm{Vect}(X) \to \mathrm{Vect}(X)/\sim_s$; dato che $\mathrm{Vect}(X)/\sim_s$ è un gruppo ne segue, per universalità, che esiste un unico morfismo di gruppi $\kappa : \widetilde{K}(X) \to \mathrm{Vect}(X)/\sim_s$ tale che $\kappa \circ \alpha = \gamma$, con $\alpha : \mathrm{Vect}(X) \to K(X)$, $\alpha(E) = [E]$. Ogni elemento $[E] - [F] \in K(X)$ può essere scritto come $[H] - [\mathbf{I}^n]$ e κ è dato esplicitamente da $\kappa([H] - [\mathbf{I}^n]) = \{H\}_s$, come subito si verifica. Basta allora dimostrare che la restrizione di κ a $\widetilde{K}(X)$ è un isomomorfismo. La suriettività è ovvia: se $\{E\}_s$ è un elemento di $\mathrm{Vect}(X)/\sim_s$ allora $\{E\}_s = \kappa([E]-\mathbf{I}^{\mathrm{rg}E})$ ed è chiaro che $[E]-\mathbf{I}^{\mathrm{rgE}})$ è un elemento di $\widetilde{K}(X)$. Supponiamo ora che $\kappa([H] - [\mathbf{I}^{\mathrm{rg}H}]) = \{X \times \{0\}\}$. Ciò vuol dire che $\{H\}_s$ è stabilmente equivalente al fibrato nullo e quindi esistono $\mathbf{I}^\ell$, $\mathbf{I}^m$ tali che $H \oplus \mathbf{I}^\ell \simeq \mathbf{I}^m$ e sarà necessariamente $m = \mathrm{rg}H + \ell$. Ma allora $([H] - [\mathbf{I}^{\mathrm{rg}H}]) = ([H \oplus \mathbf{I}^\ell] - [\mathbf{I}^{\mathrm{rg}H} \oplus \mathbf{I}^\ell]) = [\mathbf{I}^m] - [\mathbf{I}^m] = 0$ come volevasi dimostrare.

Osservazione. Notare che l'inversa di κ è l'applicazione $\mathrm{Vect}(X)/\sim_s \to \widetilde{K}(X)$ che associa ad $\{E\}_s$ la classe $[E] - [\mathbf{I}^{\mathrm{rg}E}]$.

5.2. Teorema di stabilità e sue conseguenze.

In questa sezione faremo l'ipotesi che X sia un CW-complesso finito di dimensione n, ad esempio X è una varietà differenziabile compatta di dimensione n [8] . Enunceremo solo i risultati; per le dimostrazioni vi rimando a [8] pag 84 e pagg 99/101.

Se X è un tale spazio compatto allora il teorema di classificazione può essere migliorato: si può infatti dimostrare che l'applicazione che associa ad ogni classe di omotopia $[f] \in [X, G_k(\mathbb{C}^{m+k})]$ la classe di isomorfismo di $f^*E_k(\mathbb{C}^{m+k})$ in $\mathrm{Vect}(X)$ induce una biezione

$$[X, G_k(\mathbb{C}^{m+k})] \leftrightarrow \mathrm{Vect}_k(X)\,, \quad \forall m \,|\, n \leq 2m \tag{12}$$

Questo risultato vale di fatto sotto la sola ipotesi che X sia un CW-complesso di dimensione n, non è necessario supporre che sia finito.
In particolare si ha una biezione

$$[X, G_k(\mathbb{C}^{2k})] \leftrightarrow \mathrm{Vect}_k(X) \quad \text{se} \quad n \leq 2k. \tag{13}$$

Un secondo importante risultato è il seguente teorema, detto *di stabilità*:

[8] si consulti ad esempio [9] per le definizioni e per una giustificazione dell'ultima frase.

Teorema 5. *Sia X un CW-complesso di dimensione n.*
1) Sia $m = [(n-1)/2]$. Sia $k \geq m$ e sia E^k un fibrato di rango k. Allora esiste F^m di rango m ed un isomorfismo

$$E \simeq F^m \oplus \mathbf{I}^{k-m}.$$

2) Sia $\ell = [n/2]$ e sia $k \geq m$. Se E^k ed F^k sono due fibrati di rango k allora

$$E^k \sim_s F^k \Leftrightarrow E^k \simeq F^k.$$

In parole: per fibrati di rango abbastanza grande (e più precisamente di rango $\geq n/2$) l'equivalenza stabile è equivalente all'isomorfismo. Nella letteratura inglese questo teorema è detto *Stable range theorem*, con l'intesa che il rango stabile è un qualsiasi rango $\geq n/2$.
Vediamo alcune conseguenze di questo teorema:

Proposizione 10. *Se X è un CW-complesso compatto e connesso di dimensione n e $k \geq n/2$ allora esiste una biezione di insiemi*

$$[X, G_k(\mathbb{C}^{2k})] \leftrightarrow \widetilde{K}(X)$$

Sketch della dimostrazione. L'applicazione $[X, G_k(\mathbb{C}^{2k})] \to \widetilde{K}(X)$ che realizza questa biezione è

$$[f] \to [f^* E_k(\mathbb{C}^{2k})] - [\mathbf{I}^k].$$

L'applicazione è suriettiva, basta applicare il punto 1) del teorema di stabilità e la Proposizione 9.
L'applicazione è iniettiva: se

$$[f^* E_k(\mathbb{C}^2 k)] - [\mathbf{I}^k] = [g^* E_k(\mathbb{C}^{2k})] - [\mathbf{I}^k]$$

allora $f^* E_k(\mathbb{C}^2 k) \sim_s g^* E_k(\mathbb{C}^{2k})$ e per il teorema di stabilità $f^* E_k(\mathbb{C}^2 k) \simeq g^* E_k(\mathbb{C}^{2k})$. Ma allora per il teorema di classificazione (si veda la formula (13)) ne segue che $[f] = [g]$. La mappa è quindi una biezione.

Riassumendo, per X un CW-complesso di dimensione n connesso e compatto si hanno le biezioni di insiemi

$$\mathrm{Vect}_k(X) \leftrightarrow [X, G_k(\mathbb{C}^{2k})] \leftrightarrow \widetilde{K}(X) \tag{14}$$

Utilizzando questi risultati, la fibrazione $U(k) \to V_k(\mathbb{C}^{2k}) \twoheadrightarrow G_k(\mathbb{C}^{2k})$ e la successione esatta lunga dei gruppi di omotopia ad essa associata è possibile dimostrare che se $j < 2k$ allora si hanno biezioni

$$\widetilde{K}(S^j) \leftrightarrow \pi_j(G_k(\mathbb{C}^{2k})) \leftrightarrow \pi_{j-1}(U(k))$$

la prima essendo data dalla biezione (14) per $X = S^j$. Possiamo anche scrivere, utilizzando l'isomorfismo (5) della fine della Lezione n. 2:

$$\widetilde{K}(S^j) \leftrightarrow \pi_{j-1}(U(\infty)), \ \forall j \geq 1$$

Si può di fatto dimostrare che la biezione

$$\widetilde{K}(S^j) \leftrightarrow \pi_{j-1}(U(k)) \ j < 2k$$

è un *isomorfismo di gruppi*.
Possiamo allora concludere quanto segue:

- $\widetilde{K}(S^1) \simeq \pi_0(U(1)) = 0$
- $\widetilde{K}(S^2) \simeq \pi_1(U(2)) = \mathbb{Z}$. [9]

[9] Tenere presente l'Esempio alla fine delle Lezione n.2

- $\widetilde{K}(S^3) \simeq \pi_2(U(2)) = \pi_2(SU(2)) = \pi_2(S^3) = 0.$ [10]
- $\widetilde{K}(S^4) \simeq \pi_3(U(3)) = \pi_3(SU(3)) = \pi_3(SU(2)) = \pi_3(S^3) = \mathbb{Z}.$ [11]

È importante osservare da questa tabella che c'è una periodicità nei gruppi di $\widetilde{K}$-teoria delle sfere di dimensione ≤ 4:

$$\widetilde{K}(S^0) = \widetilde{K}(S^2) = \widetilde{K}(S^4) = \mathbb{Z}\,, \quad \widetilde{K}(S^1) = \widetilde{K}(S^3) = 0\,.$$

Questo è un fatto del tutto generale che vedremo in dettaglio e generalizzeremo più avanti, quando parleremo del teorema di periodicità di Bott in K-teoria.

Il risultato originale di Bott, una pietra miliare della Matematica, è il seguente

Teorema 6. *(Teorema di periodicità di Bott) Per i gruppi di omotopia del gruppo unitario $U(\infty)$ vale il seguente risultato:*

$$\pi_j(U(\infty)) \simeq \pi_{j+2}(U(\infty)) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } j \text{ è pari} \\ 0 & \text{se } j \text{ è dispari} \end{cases} \tag{15}$$

È chiaro che quanto appena visto, insieme al Teorema di Bott, implica che $\widetilde{K}(S^j) \simeq \widetilde{K}(S^{j+2})$. Dimostreremo tutto ciò (senza usare il teorema di Bott) fra un paio di lezioni.

5.3. Successione esatta in K-teoria.

Consideriamo le seguenti categorie

- **Com** := spazi topologici compatti e applicazioni continue.
- **Com2** := coppie di spazi compatti (X, Y), $Y \subset X$, e applicazioni continue $f : X \to X'$ tali che $f(Y) \subset Y'$.
- **Com+** := spazi compatti con punto base e applicazioni continue che preservano i punti base.

Sono definiti i seguenti funtori naturali:

- **Com2** $\longrightarrow$ **Com+**
- **Com** $\longrightarrow$ **Com2**

Il primo funtore associa alla coppia (X, Y) lo spazio X/Y con punto base Y/Y. Se $Y = \emptyset$ definiamo $X/Y = X^+$, con X^+ che denota l'unione disgiunta di X e di un punto.
Il secondo funtore associa a X la coppia $(X, \emptyset)$

Osserviamo innanzitutto che se $X \in$ **Com+**, con punto base p, allora $\widetilde{K}(X) := \mathrm{Ker}(i^* : K(X) \to K(p))$ definisce un funtore su **Com+** a valori nei gruppi abeliani.

Definizione 12. *Se $(X, Y) \in$ **Com2** poniamo $K(X, Y) := \widetilde{K}(X/Y)$.*

Notiamo che se $Y = \emptyset$ allora, per definizione, $K(X, Y) = \widetilde{K}(X^+) = K(X)$. La nostra definizione è quindi un'estensione di quella data per elementi in **Com**.

Sia (X, Y) una coppia di spazi compatti. Le inclusioni $i : Y \to X$ e $j : (X, \emptyset) \to (X, Y)$ inducono omomorfismi:

$$j^* : K(X, Y) \to K(X)\,, \quad i^* : K(Y) \to K(X)\,.$$

[10] Il secondo isomorfismo vale in generale: $\pi_i(U(n)) = \pi_i(SU(n))\ \forall i \geq 2$, come segue subito dalla successione $SU(n) \to U(n) \to S^1$.

[11] La seconda uguaglianza segue dalla precedente nota, mentre per la seconda si veda (4) alla fine della Lezione n. 2

Proposizione 11. *La successione*

$$K(X,Y) \to K(X) \to K(Y) \tag{16}$$

è esatta

Prima di dimostrare la Proposizione abbiamo bisogno di definire una nuova operazione su un fibrato, il collassamento.
Sia Y un chiuso in X e sia (E, π_E, X) un fibrato di rango k su X. Supponiamo di avere una banalizzazione di $E|_Y$ e cioè un isomorfismo di fibrati

$$\alpha : E|_Y \to Y \times V \tag{17}$$

con V spazio vettoriale di dimensione k. Possiamo allora definire un fibrato $(E/\alpha \longrightarrow X/Y)$ come segue:
sia $p : Y \times V \to V$ la proiezione naturale, definiamo E/α come $E/\sim$ con

$$e \sim e' \Leftrightarrow \pi_E(e) \in Y,\, \pi(e') \in Y \;\text{ e }\; p(\alpha(e)) = p(\alpha(e'))\,.$$

Notiamo che questa relazione d'equivalenza è l'identità fuori da $E|_Y$. Otteniamo in questo modo una collezione di spazi vettoriali su X/Y e l'unica cosa da verificare e la banalità locale in un intorno di Y/Y. Ma questo è chiaro: sappiamo infatti che α può essere esteso ad un isomorfismo $\alpha_U : E|_U \to U \times V$ e questo isomorfismo induce una banalizzazione di E/α in un intorno di Y/Y.

È facile vedere, utilizzando il teorema di omotopia, che la classe d'isomorfismo di $E/\alpha \to X/Y$ dipende solo dalla classe di omotopia di α.
Inoltre, se Y è contraibile allora l'applicazione $p : X \to X/Y$ induce una *biezione* $p^* : \mathrm{Vect}(X/Y) \to \mathrm{Vect}(X)$ con inversa data proprio dal collassamento di un fibrato rispetto ad una qualsiasi banalizzazione su Y (tale banalizzazione esiste sempre dato che Y è contraibile e due banalizzazioni sono necessariamente omotope).
Dimostrazione della Proposizione 52. Il fatto che $\mathrm{Im} j^* \subset \mathrm{Ker} i^*$ è chiaro. Infatti $i^* j^* = (j \circ i)^*$ e $j \circ i = f \circ g$ con $f : (Y, \emptyset) \to (Y, Y)$ e $g : (Y, Y) \to (X, Y)$; dato che $K(Y, Y)$ è banale segue che $i^* j^* = 0$
Sia ora $\zeta \in \mathrm{Ker} i^*$, $\zeta = [E] - [\mathbf{1}^n]$ per qualche n. Dato che per ipotesi $i^*\zeta = 0$ ne segue che esiste $m \in \mathbb{N}$ ed un isomorfismo

$$\alpha : E|_Y \oplus \mathbf{1}^m \longrightarrow Y \times \mathbb{C}^{n+m}\,.$$

Consideriamo $(E \oplus \mathbf{1}^n \longrightarrow X)$; allora è ben definito il collassato di questo fibrato tramite α, $E \oplus \mathbf{1}^n/\alpha \longrightarrow X/Y$. La classe $\eta := [E \oplus \mathbf{1}^n/\alpha] - [\mathbf{1}^{n+m}] \in \widetilde{K}(X/Y) = K(X, Y)$ ed ha immagine ζ tramite j^*. Quindi $\mathrm{Im} j^* = \mathrm{Ker} i^*$ e la proposizione è dimostrata.
La dimostrazione del seguente corollario è l'esercizio n. 4 del *Secondo compito a casa* :

Corollario 5. *Sia Y un sottospazio chiuso di uno spazio compatto X, sia $i : Y \hookrightarrow X$ l'inclusione e sia $r : X \to Y$ una retrazione: $r \circ i = \mathrm{id}_Y$. Allora esiste una successione esatta corta:*

$$0 \longrightarrow K(X,Y) \to K(X) \to K(Y) \to 0$$

indotta da $j : (X, \emptyset) \to (X, Y)$ e $i : Y \hookrightarrow X$. Inoltre $K(X) = A \oplus B$ con $A = j^* K(X, Y)$ e $C = r^* K(Y)$; in particolare $K(X) \simeq K(X, Y) \oplus K(Y)$.

6. Lezione 6 : successioni di fibrati e K-teoria.

6.1. Il gruppo $L_1(X,Y)$.

Consideriamo $D_1(X,Y)$, l'insieme delle triple $(E^1,E^0;\alpha^Y)$ con E_0,E_1 fibrati su X e $\alpha^Y : E^1|_Y \to E^0|_Y$ un *isomorfismo* su Y. C'è una naturale operazione di somma diretta fra gli elementi di $D_1(X,Y)$. Definiamo due triple $(E^1,E^0;\alpha^Y)$, $(F^1,F^0;\beta^Y)$ *isomorfe*, e scriveremo

$$(E^1,E^0;\alpha^Y) \simeq (F^1,F^0;\beta^Y)\,,$$

se esistono isomorfismi $\psi_j : E_j \to F_j$ tali che

$$\beta^Y \circ \psi_1|_Y = \psi_0|_Y \circ \alpha^Y$$

Le classi di isomorfismo vengono denotate con $C_1(X,Y)$; $C_1(X,Y)$ eredita un'operazione di somma diretta rispetto alla quale ha una naturale struttura di semigruppo abeliano. Definiamo una relazione di equivalenza $\sim_L$ nel semigruppo $C_1(X,Y)$ dichiarando

$$(E_1,E_0;\alpha^Y) \sim_L (F_1,F_0;\beta^Y) \tag{18}$$

se esistono *triple elementari* $(G,G;\mathrm{Id})$, $(H,H;\mathrm{Id})$ tali che

$$(E^1\oplus G, E^0\oplus G;\alpha^Y\oplus \mathrm{Id}) \simeq (F^1\oplus H, F^0\oplus H;\beta^Y\oplus \mathrm{Id}) \tag{19}$$

Questa relazione di equivalenza è compatibile con l'operazione di somma diretta e possiamo quindi definire il semigruppo abeliano

$$L_1(X,Y) = C_1(X,Y)/\sim_L\ .$$

Denotiamo la classe di $(E^1,E^0;\alpha^Y)$ tramite $[E^1,E^0;\alpha^Y]$; l'elemento neutro in $L_1(X,Y)$ è dato da $[\mathbf{1}^m,\mathbf{1}^m;\mathrm{Id}]$ per un qualsiasi $m\in\mathbb{N}$.
È chiaro che $(X,Y)\to L_1(X,Y)$ definisce un funtore controvariante da **Com2** alla categoria dei semigruppi abeliani e morfismi di semigruppi (con f^* indotta dal pull-back se $f:(X,Y)\to(X'Y')$).

Osservazioni.
1. Segue facilmente dalla definizione che $[E^1,E^0;\alpha^Y]=0$ in $L_1(X,Y)$ se e solo se esiste $N\in\mathbb{N}$ tale che

$$\alpha^Y\oplus \mathrm{Id} : E^1|_Y\oplus \mathbf{1}^N \longrightarrow E^0|_Y\oplus\mathbf{1}^N$$

si *estende* ad un *isomorfismo globale su tutto* X.
2. È anche molto facile vedere che $L(X,\emptyset)$ si identifica a $K(X)$ tramite l'applicazione $[E^1,E^0]\to [E^1]-[E^0]$.

Proposizione 12. *$L(X,Y)$ è un gruppo abeliano, l'inverso di $[E^1,E^0;\alpha^Y]$ essendo uguale a $[E^0,E^1;(\alpha^Y)^{-1}]$.*

Dimostrazione. Per verificare la proposizione basta dimostrare che

$$\alpha^Y\oplus(\alpha^Y)^{-1} : E^1|_Y\oplus E^0|_Y \longrightarrow E^0|_Y\oplus E^1|_Y$$

si estende ad un isomorfismo su tutto X. Notiamo che la famiglia ad un parametro di isomorfismi di fibrati su Y definita per $t\in[0,\pi/2]$ da

$$R_t(e^1,e^0) = (\cos t\,\alpha^Y e^1 - \sin t\, e^0, \sin t\, e^1 + \cos t\,(\alpha^Y)^{-1}e^0)$$

definisce un'omotopia fra $\alpha^Y\oplus(\alpha^Y)^{-1}$ e l'isomorfismo costante $\psi^Y(e^1,e^0)=(-e^0,e^1)$. È ovvio che ψ^Y è la restrizione di un isomorfismo ψ globalmente definito. Riassumendo: $\alpha^Y\oplus(\alpha^Y)^{-1}$ è omotopo alla restrizione di un isomorfismo globalmente definito. L'asserto segue allora dal seguente:

Lemma 5. *Se $\phi^Y : E^1|_Y \longrightarrow E^0|_Y$ è un monomorfismo (isomorfismo) e se ψ^Y è omotopo attraverso monomorfismi (isomorfismi) alla restrizione di un monomorfismo (isomorfismo) globalmente definito, allora ψ^Y si estende ad un monomorfismo (isomorfismo) definito su tutto X.*

La dimostrazione di questo fatto non è difficile ma è qui omessa (l'abbiamo vista in dettaglio a lezione). Dal Lemma segue la Proposizione.
Abbiamo in definitiva definito un funtore $L_1(\, , \,)$ dalla categoria **Com2** delle coppie di spazi compatti alla categoria dei gruppi abeliani.
Osservazione. Possiamo anche definire $L_1(X, Y)$ come il semigruppo $C_1(X, Y)$ modulo il sottosemigruppo generato dalle terne elementari.

Definizione 13. *Una caratteristica di Eulero è una trasformazione di funtori $\chi : L_1(X, Y) \longrightarrow K(X, Y)$ con la seguente proprietà:*
se $Y = \emptyset$ allora $\chi[E^1, E^0] = [E^1] - [E^0]$

A lezione abbiamo dimostrato il seguente notevole

Teorema 7. *Esiste un'unica caratteristica di Eulero $\chi : L_1(X, Y) \longrightarrow K(X, Y)$ ed è sempre un isomorfismo.*

Sketch della dimostrazione. La dimostrazione viene spezzata in vari passi.

1. Sia $Y = p \in X$ un punto. Allora la successione
$$0 \to L_1(X, Y) \to L_1(X) \to L_1(Y)$$
è esatta.
2. Se una caratteristica di Eulero χ esiste, allora è un isomorfismo se $Y =$ un punto.
3. Si ha un isomorfismo $L_1(X/Y, Y/Y) \simeq L_1(X, Y)$.
4. Se χ esiste allora $\chi : L_1(X, Y) \to K(X, Y)$ è un isomorfismo $\forall (X, Y)$.
5. Se χ esiste allora è unica.
6. Esiste una carateristica di Eulero.

L'unico punto non banale in **1** è l'iniettività della mappa $L_1(X, Y) \to L_1(X)$; ciò si dimostra utilizzando un argomento simile a quello con il quale abbiamo dimostrato che $L_1(X, Y)$ è un gruppo.
2. è una conseguenza di **1** e di argomenti di funtorialità (utilizziamo il fatto che anche $0 \to K(X, Y) \to K(X) \to K(Y)$ è esatta se $Y =$ un punto).
3. non è difficile.
Per **4.** si ragiona come segue: se χ' è una seconda caratteristica di Eulero, allora $\chi \circ (\chi')^{-1}$ è una trasformazione di funtori da $K(\, , \,)$ in se stesso che è l'identità su ogni $K(Z)$. Ma $K(X, Y) = \widetilde{K}(X/Y)$ è un sottogruppo di $K(X/Y)$ e ne segue quindi che $\chi \circ (\chi')^{-1}$ è l'identità su $K(X, Y)$. Ne segue che $\chi = \chi'$.
Rimane da dimostrare che una caratteristica di Eulero esiste (passo **5**). Sia $[E^1, E^0; \alpha^Y] \in L_1(X, Y)$. Poniamo $X_0 = X$, $X_1 = X$, $Z = X_0 \cup_Y X_1$. Per quanto visto nella Lezione 2, esiste il fibrato incollato $E^1 \cup_{\alpha^Y} E^0 \longrightarrow Z$. Notiamo che esiste una retrazione naturale $r_1 : Z \to X_1$ e quindi, per il Corollario 5 una successione esatta corta
$$0 \to K(Z, X_1) \to K(Z) \longrightarrow K(X_1) \longrightarrow 0\,.$$
È ovvio che $K(X, Y) \simeq K(Z, X_1)$. Definiamo $\eta = [E^1 \cup_{\alpha^Y} E^0] - r_1^*[E^1] \in K(Z)$. Si ha, per costruzione, $\eta \in \mathrm{Ker} i^*$. Ma allora per la successione esatta corta esiste un unico elemento in

$K(Z, X_1) = K(X, Y)$ che ha η come immagine. Per definizione $\chi[E^1, E^0; \alpha^Y]$ è questo elemento in $K(X,Y)$. Per controllare che l'applicazione $[E^1, E^0; \alpha^Y] \longrightarrow \chi[E^1, E^0; \alpha^Y]$ definisce effettivamente un morfismo di gruppi dobbiamo fare uso di alcune proprietà naturali che ha l'operazione di incollamento di due fibrati introdotta nella Lezione 2.
Consideriamo in generale $X = X_1 \cup X_2$ e $Y = X_1 \cap X_2$. Una terna $(E^1, E^2; \alpha)$ con E^j fibrato su X_j e α un isomorfismo $\alpha : E^1|_Y \longrightarrow E^2|_Y$ produce $E^1 \cup_\alpha E^2$, il fibrato incollato su X. Si hanno le seguenti proprietà:

- Se $(E \to X)$ è un fibrato su X, $E^j := E|_{X_j}$ e $\mathrm{Id}_Y : E|_Y \to E|_Y$ è l'identità, allora $E^1 \cup_{\mathrm{Id}_Y} E^2 \simeq E$.
- Siano $(E^1, E^2; \alpha)$ i dati di un incollamento e $(F^1, F^2; \beta)$ i dati di un secondo incollamento. Se se esistono isomorfismi $\psi_j : E_j \to F_j$ tali che $\beta \circ \psi_1|_Y = \psi_2|_Y \circ \alpha$ allora $E^1 \cup_\alpha E^2 \simeq F^1 \cup_\beta F^2$.
- Per $(E^1, E^2; \alpha)$ e $(F^1, F^2; \beta)$ sono come sopra si ha

$$E^1 \cup_\alpha E^2 \oplus F^1 \cup_\beta F^2 \simeq E^1 \oplus F^1 \cup_{\alpha \oplus \beta} E^2 \oplus F^2$$

La dimostrazione di questi fatti è elementare. È ovvio che queste proprietà implicano che χ è ben definita. Lo sketch della dimostrazione del teorema 7 è completo.

6.2. **Classi di omotopia di successioni di fibrati di lunghezza 1.**

Abbiamo dimostrato che esiste un isomorfismo di gruppi abeliani

$$\chi : L_1(X, Y) \to K(X, Y).$$

Grazie a questo isomorfismo e all'invarianza per omotopia della K-teoria otteniamo immediatamente che la classe $[E^1, E^0; \alpha^Y]$ associata ad una terna $(E^1, E^0; \alpha^Y)$ dipende solo dalla classe di omotopia dell'isomorfismo $\alpha^Y : E^1|_Y \to E^0|_Y$. Più in generale, se le terne $(E^1, E^0; \alpha^Y)$ e $(F^1, F^0; \beta^Y)$ sono omotope [12], allora $[E^1, E^0; \alpha^Y] = [F^1, F^0; \beta^Y]$ in $L_1(X, Y)$.

Consideriamo l'insieme delle terne (E^1, E^0, α), con $\alpha : E^1 \to E^0$ morfismo di fibrati, tale che la sua restrizione a Y, $\alpha|_Y : E^1|_Y \to E^0|_Y$ sia *un isomorfismo*. È ovvio che è del tutto equivalente considerare le *successioni di fibrati di lunghezza 1*

$$0 \to E^1 \xrightarrow{\alpha} E^0 \longrightarrow 0$$

tali che la loro restrizione a Y

$$0 \to E^1|_Y \xrightarrow{\alpha|_Y} E^0 \longrightarrow 0$$

sia **esatta**.
Sia $C_1^o(X, Y)$ il semigruppo delle classi di omotopia delle successioni di fibrati di lunghezza 1 che sono esatti su Y. Sia $C_1^o(X, X)$ il sottosemigruppo generato dalle successioni di fibrati che sono esatte ovunque. Tenendo presente l'osservazione dopo la Proposizione 12, siamo portati a considerare il semigruppo quoziente $\Theta_1(X, Y) = C_1^o(X, Y)/C_1^o(X, X)$.

Proposizione 13. *Il semigruppo $\Theta_1(X, Y)$ è un gruppo abeliano e l'applicazione $\Theta_1(X, Y) \to L_1(X, Y)$ definita dalla restrizione*

$$[0 \to E^1 \xrightarrow{\alpha} E^0 \longrightarrow 0] \longrightarrow [E^1, E^0; \alpha|_Y]$$

è un isomorfismo di gruppi abeliani.

[12] e cioè esistono fibrati vettoriali H^1, H^0 su $X \times [0,1]$ ed un isomorfismo $h^{Y \times [0,1]} : H^1|_{Y \times [0,1]} \to H^0|_{Y \times [0,1]}$ tali che le restrizioni di $(H^1, H^0; h^{Y \times [0,1]})$ a $t = 0$ e $t = 1$ sono isomorfe alle terne $(E^1, E^0; \alpha^Y)$ e $(F^1, F^0; \beta^Y)$ rispettivamente

Sketch della dimostrazione. Per dimostrare che $\Theta_1(X,Y)$ è un gruppo, occorre verificare che ogni elemento ha un inverso. Consideriamo

$$[0 \to E^1 \xrightarrow{\alpha} E^0 \longrightarrow 0] \in \Theta_1(X,Y).$$

Estendiamo $(\alpha|_Y)^{-1}$ ad un morfismo $\beta : E^0 \to E^1$ e consideriamo la classe

$$[0 \to E^0 \xrightarrow{\beta} E^1 \longrightarrow 0].$$

È facile vedere che questa classe è ben definita, indipendente dalla particolare estensione scelta (segue anche dal Lemma seguente). Bisogna dimostrare che la classe della successione somma

$$[0 \to E^1 \oplus E^0 \xrightarrow{\alpha\oplus\beta} E^0 \oplus E^1 \longrightarrow 0]$$

è omotopa ad una successione esatta su X. Ciò segue dal seguente

Lemma 6. *Sia $0 \to H^1 \to H^0 \to 0$ un complesso su $X \times \{0\} \cup X \times \{1\} \cup Y \times [0,1]$ aciclico su $Y \times [0,1]$. Allora possiamo estendere $0 \to H^1 \to H^0 \to 0$ ad un un complesso su $X \times [0,1]$.*

Assumiamo il lemma (la dimostrazione è facile). È allora chiaro che la somma

$$[0 \to E^1 \oplus E^0 \xrightarrow{\alpha\oplus\beta} E^0 \oplus E^1 \longrightarrow 0]$$

è omotopa ad un isomorfismo; infatti abbiamo visto che $\beta_Y \equiv \alpha|_Y \oplus (\alpha|_Y)^{-1}$ è omotopo ad un isomorfismo costante e quindi estendibile. Applicando il lemma costruiamo un'omotopia dalla successione somma ad una successione che è un isomorfismo ovunque. Quindi $\Theta_1(X,Y)$ è un gruppo.
Per quanto osservato all'inizio di questo paragrafo, l'applicazione restrizione è ben definita da $\Theta_1(X,Y)$ a $L_1(X,Y)$. È chiaramente suriettiva, dato che un isomorfismo su Y può essere sempre esteso ad un morfismo su X e ha nucleo banale (stesso ragionamento di quello fatto per dimostrare che $\Theta_1(X,Y)$ è un gruppo). Ne segue che la restrizione realizza un isomorfismo e lo sketch della dimostrazione è ora completo.

7. Lezione 7 : Operatori di Fredholm e K-teoria. Teorema di Atiyah-Jänich.

7.1. Classi di omotopia di complessi di fibrati di lunghezza n.

Consideriamo $D_n(X,Y)$, l'insieme delle $((n+1)+n)$-ple

$$(E^n, \ldots, E^0; \alpha_n^Y, \ldots, \alpha_1^Y)$$

con E^j fibrati su X e $\alpha_j^Y : E^j|_Y \to E^{j-1}|_Y$ *morfismi* di fibrati su Y tali che la successione

$$\cdots \to E^j|_Y \xrightarrow{\alpha_j^Y} E^{j-1}|_Y \to \cdots \tag{20}$$

sia esatta. C'è una naturale operazione di somma diretta fra gli elementi di $D_n(X,Y)$ e una naturale nozione di isomorfismo (si veda la lezione precedente). Le classi di isomorfismo vengono denotate con $C_n(X,Y)$; $C_n(X,Y)$ eredita un'operazione di somma diretta rispetto alla quale ha una naturale struttura di semigruppo abeliano. Un elemento $(E^n, \ldots, E^0; \alpha_n^Y, \ldots, \alpha_1^Y)$ è detto *elementare* se esiste k tale che $E^k = E^{k-1}$, $E^j = 0$ se $j \notin \{k, k-1\}$ e $\alpha_k^Y = \mathrm{Id}$. Definiamo un semigruppo $L_n(X,Y)$ considerando $C_n(X,Y)$ modulo il sottosemigruppo generato dagli elementi elementari. Dato un elemento in $L_n(X,Y)$, sia esso $[E^n, \ldots, E^0; \alpha_n^Y, \ldots, \alpha_1^Y]$, possiamo definire un elemento in $L_{n+1}(X,Y)$ semplicemente considerando

$$[0, E^n, \ldots, E^0; 0, \alpha_n^Y, \ldots, \alpha_1^Y] \ ;$$

otteniamo in questo modo un'applicazione di semigruppi $j : L_n(X,Y) \to L_{n+1}(X,Y)$.

Proposizione 14. *$\forall n \geq 1$ $L_n(X,Y)$ è un gruppo e l'omomorfismo di inclusione j definisce un isomorfismo*

$$L_1(X,Y) \simeq L_n(X,Y) \tag{21}$$

La dimostrazione, vista a lezione nel caso $n = 2$ non è difficile. Qui notiamo semplicemente che l'inverso dell'isomorfismo di inclusione $L_1(X,Y) \to L_n(X,Y)$ è definito come segue. Sia $[E^n, \ldots, E^0; \alpha_n^Y, \ldots, \alpha_1^Y] \in L_n(X,Y)$. Consideriamo una metrica hermitiana su ogni fibrato; possiamo allora definire i morfismi aggiunti dei morfismi α_k^Y.
Definiamo $F^1 = \oplus E^{2k+1}$, $F^0 = \oplus E^{2k}$,

$$\beta^Y = \left(\oplus \alpha_{2k+1}^Y\right) \oplus \left(\oplus (\alpha_{2k}^Y)^*\right) .$$

La terna $(F^1, F^0; \beta^Y)$ definisce un elemento in $C_1(X,Y)$ e la sua classe in $L_1(X,Y)$ è ben definita, indipendente dalla scelta delle metriche hermitiane (cambiando le metriche si ottiene un morfismo omotopo a β). L'applicazione $R : L_n(X,Y) \to L_1(X,Y)$ definita da

$$[E^n, \ldots, E^0; \alpha_n^Y, \ldots, \alpha_1^Y] \longrightarrow [F^1, F^0; \beta^Y]$$

è l'inversa dell'omomorfismo di inclusione.

Definizione 14. *Un complesso di fibrati di lunghezza n è una successione di fibrati di fibrati di lunghezza n*

$$0 \to E^n \to \cdots \to E^{j+1} \xrightarrow{\alpha_{j+1}} E^j \xrightarrow{\alpha_j} E^{j-1} \to \cdots \to E^0 \to 0$$

tali che $\alpha_j \circ \alpha_{j+1} = 0$ $\forall j$.

Osserviamo che le successioni di lunghezza 1 considerate nel paragrafo precedente sono automaticamente dei complessi.
Possiamo considerare le classi di omotopia $C_n^o(X,Y)$ dei complessi di fibrati di lunghezza n che sono *esatti* quando ristretti ad Y ed il sottosemigruppo $C_n^o(X,X)$ dei complessi che sono esatti su

tutto X. Il semigruppo quoziente è denotato con $\Theta_n(X,Y)$. Si può far vedere, ispirandosi al caso $n=1$, che questo semigruppo abeliano è un gruppo.

Non è difficile dimostrare, per induzione su n, che data una $((n+1)+n)$-pla $(E^n,\ldots,E^0;\alpha_n^Y,\ldots,\alpha_1^Y)$ esiste sempre un complesso di fibrati su X

$$\cdots \to E^{j+1} \xrightarrow{\alpha_{j+1}} E^j \xrightarrow{\alpha_j} E^{j-1} \to \cdots$$

la cui restrizione a Y è proprio $(E^n,\ldots,E^0;\alpha_n^Y,\ldots,\alpha_1^Y)$. Considerando nuovamente l'applicazione restrizione e procedendo come per il caso $n=1$ si dimostra quanto segue:

Proposizione 15. *La restrizione di un complesso in $\Theta_n(X,Y)$ ad Y definisce un isomorfismo di gruppi*

$$\Theta_n(X,Y) \longrightarrow L_n(X,Y).$$

Riassumendo: per ogni coppia di spazi compatti (X,Y)
- la caratteristica di Eulero $\chi : L_1(X,Y) \longrightarrow K(X,Y)$ è un isomorfismo.
- l'inclusione naturale $i : L_1(X,Y) \longrightarrow L_n(X,Y)$ è un isomorfismo $\forall n$.
- l'omomorfismo restrizione $\Theta_n(X,Y) \longrightarrow L_n(X,Y)$ è un isomorfismo $\forall n$.

Concludiamo questa sezione dando la seguente

Definizione 15. *Il supporto di un complesso di fibrati su X*

$$0 \to E^n \to \cdots \to E^{j+1} \xrightarrow{\alpha_{j+1}} E^j \xrightarrow{\alpha_j} E^{j-1} \to \cdots \to E^0 \to 0$$

è l'insieme degli $x \in X$ tali che

$$0 \to E_x^n \to \cdots \to E_x^{j+1} \xrightarrow{\alpha_{j+1}} E_x^j \xrightarrow{\alpha_j} E_x^{j-1} \to \cdots \to E_x^0 \to 0$$

non è esatta.

7.2. **Operatori di Fredholm.**

Sia H uno spazio di Hilbert complesso separabile [13]. Denotiamo con $\mathcal{L}(H)$ l'algebra di Banach delle applicazioni lineari continue con la norma operatoriale. Gli elementi invertibili in quest'algebra formano un insieme aperto $\mathcal{L}^\times(H)$ in $\mathcal{L}(H)$ che è, ovviamente, un gruppo. Il teorema dell'applicazione aperta implica che se $T \in \mathcal{L}(H)$ è una biezione allora $T^{-1} \in \mathcal{L}(H)$ e quindi $T \in \mathcal{L}^\times(H)$.
Analogamente possiamo definire $\mathcal{L}(H_1,H_2)$ per una coppia di spazi di Hilbert e $\mathcal{L}^\times(H_1,H_2)$ che risulta, anche in questa caso, aperto.

Definizione 16. *Un operatore $T \in \mathcal{L}(H)$ è di Fredholm se $\operatorname{Ker} T$ e $\operatorname{coker} T := H/\operatorname{Im} T$ sono di dimensione finita. In tal caso si defisce l'indice di T come*

$$\operatorname{ind} T = \dim \operatorname{Ker} T - \dim \operatorname{coker} T\,.$$

Denotiamo con $\mathcal{F}(H) \equiv \mathcal{F}$ l'insieme degli operatori di Fredholm in $\mathcal{L}(H)$. Dato che $\dim \ker(ST) \leq \dim \operatorname{Ker} S + \dim \operatorname{Ker} T$ e dato che $\dim \operatorname{coker}(ST) \leq \dim \operatorname{coker} S + \dim \operatorname{coker} T$, vediamo che $\mathcal{F}$ è un semigruppo, con elemento neutro uguale all'identità.

[13] Per nozioni standard di Analisi Funzionali potete consultare [?, ReSi]

7.3. **Proprietà degli operatori di Fredholm.**

1. $\operatorname{Im} T$ è chiuso.
Essendo $(\operatorname{Im} T)^{\perp} = \operatorname{Ker} T^*$ ne segue che $\operatorname{Im} T = \operatorname{Ker} T^*$ e quindi

$$\operatorname{ind} T = \dim \operatorname{Ker} T - \dim \operatorname{Ker} T^* \tag{22}$$

In particolare, un operatore autoaggiunto di Fredholm ha indice uguale a zero.
2. $\operatorname{ind}(ST) = \operatorname{ind}(S) + \operatorname{ind}(T)$
3. Sia $\mathcal{K}(H)$ l'ideale degli operatori compatti. Se $C \in \mathcal{K}(H)$ allora $\mathrm{Id}_H + C$ è di Fredholm e $\operatorname{ind}(\mathrm{Id}_H + C) = 0$ [14].
4. $T \in \mathcal{F} \Leftrightarrow T$ è invertibile modulo $\mathcal{K}$ (e cioè esiste $S \in \mathcal{L}(H)$ tale che $(TS - \mathrm{Id}_H) \in \mathcal{K}$ e $(ST - \mathrm{Id}_H) \in \mathcal{K}$). [15]
5. Se $C \in \mathcal{K}$ e $T \in \mathcal{F}$ allora $T + C \in \mathcal{F}$ e $\operatorname{ind}(T + C) = \operatorname{ind}(T)$
6. $\mathcal{F}$ è aperto in $\mathcal{H}$; $\operatorname{ind} : \mathcal{F} \to \mathbb{Z}$ è localmente costante ed induce una biezione

$$\operatorname{ind} : \pi_0(\mathcal{F}) \to \mathbb{Z}\,.$$

In particolare $\operatorname{ind} T_0 = \operatorname{ind} T_1$ se e solo se esiste un cammino continuo $(T(t))_{t\in[0,1]} \in \mathcal{F}$, tale che $T(0) = T_0$ e $T(1) = T_1$
Il fatto che $T_0 \sim T_1$ (T_0 omotopo a T_1 in $\mathcal{F}$) implichi che $\operatorname{ind} T_0 = \operatorname{ind} T_1$ è noto come *invarianza pe omotopia dell'indice.*

Vedremo la dimostrazione di alcune di queste proprietà nel corso del prossimo paragrafo.

7.4. **Il Teorema di Atiyah-Jänich.**

Consideriamo uno spazio topologico compatto X ed un'applicazione continua $T : X \to \mathcal{F}$. L'applicazione T è anche chiamata una *famiglia continua di operatori di Fredholm parametrizzata da X.* Si scrive anche $T = \{T_x\}_{x\in X}$, con $T_x := T(x)$.
Famiglie continue di operatori di Fredholm appaiono in maniera naturale in molti campi della Matematica e della Fisica Teorica.
Consideriamo il semigruppo $[X, \mathcal{F}]$ delle classi di omotopia di applicazioni continue da X in $\mathcal{F}$. L'elemento neutro di questo semigruppo è rappresentato l'applicazione costante $x \to \mathrm{Id}_H$.
Il nostro obiettivo in questa lezione è illustrare il seguente notevole **Teorema di Atiyah-Jänich**:

Teorema 8. *Esiste un morfismo di semigruppi*

$$\operatorname{Ind} : [X, \mathcal{F}] \to K(X) \tag{23}$$

che è una biezione. Inoltre se $f : Y \to X$ è continua allora $\operatorname{Ind}(T \circ f) = f^* \operatorname{Ind} T \in K(Y)$.

In particolare $[X, \mathcal{F}]$ è un gruppo abeliano e $\mathcal{F}$ è uno *spazio classificante* per la K-teoria. Il teorema ci dice anche che l'ostruzione a deformare una famiglia continua di operatori di Fredholm nella famiglia banale $\{(\mathrm{Id}_H)_x\}$ è misurata da una classe di K-teoria associata alla famiglia $T = \{T_x\}$.
Sketch della dimostrazione. Vediamo innanzitutto il fatto che $\operatorname{Im} T$ è chiuso (Proprietà **1.** del paragrafo precedente). Infatti T induce un'applicazione lineare continua iniettiva

$$H/\operatorname{Ker} T \longrightarrow \operatorname{Im} T.$$

[14] C è compatto se l'immagine tramite C di una successione limitata ammette una sottosucessione convergente.
[15] Questa proprietà è anche nota come teorema di Atkinson. Ci dice che $\mathcal{F} = \pi^{-1}\left((\mathcal{L}(H)/\mathcal{K}(H))^{\times}\right)$ con $\pi: \mathcal{L}(H) \to (\mathcal{L}(H)/\mathcal{K}(H))$ la proiezione canonica. L'algebra $\mathcal{L}(H)/\mathcal{K}(H)$ è detta algebra di Calkin e la conclusione è che gli operatori di Fredholm sono l'immagine inversa, tramite la proiezione canonica, degli invertibili dell'algebra di Calkin.

Sia W un complementare di codimensione finita per Im T: $W \oplus \mathrm{Im}\, T = H$. Possiamo definire un operatore

$$\psi_T : H/\mathrm{Ker}\, T \oplus W \to H$$

associando a $[h] \oplus w$ l'elemento $Th + w$. Quest'applicazione ψ_T è un isomorfismo di spazi vettoriali ed è continua. Per il teorema dell'applicazione aperta ne segue che porta chiusi in chiusi, in particolare $\psi_T(H/\mathrm{Ker}\, T) = T(H)$ è chiuso in H. Quindi Im T è chiuso.

Vogliamo definire la *classe indice* $\mathrm{Ind}\, T \in K(X)$ di un'applicazione continua $T : X \to \mathcal{F}$ di cui nell'enunciato del teorema.

Preambolo euristico. Se T_x fosse iniettiva $\forall x$, e quindi ker $T_x = \{0\}$, allora necessariamente $\mathrm{coker}\, T_x$ avrebbe dimensione costante [16] e potremmo quindi considerare

$$\mathrm{coker}\, T = \cup_{x \in X} \mathrm{coker} T_x := \cup_{x \in X} H/T_x(H)\,.$$

Una volta dimostrato che questo è effettivamente un fibrato vettoriale, potremmo definire $\mathrm{Ind}\, T = -[\mathrm{coker} T] \in K(X)$. Questa definizione è del tutto naturale ma ha, ovviamente, lo svantaggio di fare una richiesta irragionevole, i.e. che $\mathrm{Ker}\, T_x = \{0\}\ \forall x$. L'idea alla base della definizione di classe indice è la seguente: a patto di prendere la restrizione di T_x ad un sottospazio $V \subset H$ "un pó più piccolo" di H, e cioè ad un sottospazio V di codimensione finita, possiamo sempre ridurci al caso iniettivo. Vediamo come si possa realizzare quest'idea.

Lemma 7. *Sia $T_0 \in \mathcal{F}$ e sia $V \subset H$ chiuso di codimensione finita tale che $V \cap \mathrm{Ker} T_0 = \{0\}$ [17]. Allora esiste un intorno $\mathcal{U}$ di T_0 in $\mathcal{L}(H)$ tale che $\forall T \in \mathcal{U}$*
(i) $V \cap \mathrm{Ker}\, T = \{0\}$
(ii) $H/T(H) \simeq (T_0 V)^\perp\ \forall T \in \mathcal{U}$.
(iii) $\cup_{T \in \mathcal{U}} H/T(V)$ è isomorfo al fibrato banale $\mathcal{U} \times W$ con $W = (T_0 V)^\perp$.

Dimostrazione del lemma. Consideriamo $W = (T_0 V)^\perp$. È chiaro che $\dim W < \infty$ [18]. Definiamo

$$\phi_T : V \oplus W \to H$$

mandando $v \oplus w$ nel vettore $Tv + w \in H$. La corrispondenza

$$\mathcal{L}(H) \ni T \longrightarrow \phi_T \in \mathcal{L}(V \oplus W, H)$$

è continua (ma non è lineare). Inoltre ϕ_{T_0} è un isomorfismo. Ma allora esiste un intorno $\mathcal{U}$ di T_0 in $\mathcal{L}(H)$ tale che ϕ_T è un isomorfismo $\forall T \in \mathcal{U}$. Le proprietà (i), (ii), (iii) sono allora chiare.

Come corollario di questo Lemma vediamo che $\mathcal{F}$ *è aperto* in $\mathcal{L}(H)$ (si veda la proprietà **6** del paragrafo precedente).

Torniamo alla costruzione della classe di indice. Il passo fondamentale è dato dal seguente

Lemma 8. *Sia $T : X \to \mathcal{F}$ continua. Allora esiste $V \subset H$ chiuso di codimensione finita tale che*
(i) ker $T_x \cap V = \{0\}\ \forall x \in X$.
(ii) $\cup_{x \in X} H/T_x(V)$ è un fibrato vettoriale su X.

[16] Infatti T_x è di Fredholm $\forall x$ e dalla proprietà **6** degli operatori di Fredholm segue che $\mathrm{ind}\, T_x = \dim \mathrm{Ker}\, T_x - \dim \mathrm{coker}\, T_x = 0 - \dim \mathrm{coker}\, T_x$ è costante. Quindi $\dim \mathrm{coker}\, T_x$ ha dimensione costante

[17] Ad esempio $V = (\mathrm{Ker} T_0)^\perp$.

[18] infatti per come abbiamo scelto V sappiamo che $T_0 : V \to T_0(V)$ è una biezione; quindi $\dim W \equiv \dim (T_0 V)^\perp = \dim\ H/T_0(V) = \dim H/V$ che è finito per come è stato scelto V

Dimostrazione. Per ogni $x \in X$ consideriamo $V_x := (\operatorname{Ker} T_x)^{\perp}$. Sia $\mathcal{U}_x \subset \mathcal{F}$ l'intorno di cui al precedente lemma. Sia $U_x \subset X$, $U_x = T^{-1}(\mathcal{U}_x)$. Dalla compattezza di X segue che esiste un sottoricoprimento finito $U_1, U_2, \ldots, U_n$ corrispondente ad intorni $\mathcal{U}_{x_1}, \ldots, \mathcal{U}_{x_n}$ in $\mathcal{F}$. Sia $V = V_{x_1} \cap \ldots \cap V_{x_n}$. Utilizzando il Lemma precedente è chiar che V soddisfa le due proprietà dell'enunciato.

Denotiamo il fibrato $\cup_{x \in X} H/T_x(V)$ con il simbolo H/TV. Denotiamo con H/V il fibrato banale $X \times (H/V)$ di rango uguale alla codimensione di V. Potremmo essere tentati di definire la classe indice come $-[H/TV]$; occorre però tener conto del fatto che ci siamo restritti ad un sottospazio V di H. La seguente definizione è quindi molto naturale:

Definizione 17. *Sia $T : X \to \mathcal{F}$ continua. Allora*

$$\operatorname{Ind} T := [H/V] - [H/TV] \in K(X)$$

La dimostrazione del Teorema di Atiyah-Jänich segue allora dalle seguenti 5 proprietà:

1. $\operatorname{Ind} T$ non dipende dalla scelta di V. (Questa proprietà è stata vista a lezione.)
2. Se T è omotopa a S allora $\operatorname{Ind} T = \operatorname{Ind} S$ in $K(X)$. (Questa proprietà è chiara dall'invarianza per omotopia del gruppo di K-teoria.)
3. $\operatorname{Ind}(TS) = \operatorname{Ind} T + \operatorname{Ind} S$
4. la successione di semigruppi $[X, \mathcal{L}^{\times}(H)] \to [X, \mathcal{F}] \to K(X) \to 0$ è esatta. (La prima applicazione è indotta dall'inclusione $\mathcal{L}^{\times}(H) \subset \mathcal{F}$.)
5. Il gruppo $[X, \mathcal{L}^{\times}(H)]$ è banale (Teorema di Kuiper).

Osservazioni.
1. La funtorialità rispetto alle applicazioni continue $f : Y \to X$ è chiara: una scelta di sottospazio V per T va bene anche per $T \circ f$.
2. Se $x \in X$ e $i : x \to X$ è l'inclusione, allora è facile vedere che $i^*(\operatorname{Ind} T) = \operatorname{ind} T_x$. D'altra parte $i^*(\operatorname{Ind} T)$ è il rango virtuale di $[H/V] - [H/TV]$, e cioè la differenza dei ranghi dei fibrati H/V e H/TV. Gli operatori T_x hanno quindi tutti lo stesso indice *numerico*. Questo era chiaro dalla proprietà **6** enunciata nel paragrafo precedente che qui però non abbiamo utilizzato.
3. Le proprietà (2) e (3) qui sopra eneunciate dimostrano in particolare l'invarianza per omotopia dell'indice numerico degli operatori di Fredholm e il fatto che $\operatorname{ind}(TS) = \operatorname{ind} T + \operatorname{ind} S$.

8. Lezione 8 : Teorema di periodicità in K-Teoria.

8.1. Prodotti in K-teoria.

Abbiamo dato la definizione del gruppo $K(X)$ per X uno spazio compatto (di Hausdorff). Possiamo estendere questa definizione come segue:

Definizione 18. *Sia X localmente compatto. Il gruppo di K-teoria a supporto compatto di X è definito come*

$$K_c(X) := \widetilde{K}(X^+)$$

con $X^+ = (X \sqcup +)$ che denota la compattificazione ad un punto di X.

Esempio. Si ha chiaramente

$$K_c(\mathbb{R}^n) = \widetilde{K}(S^n) = \begin{cases} 0 & \text{per } n \text{ dispari} \\ \mathbb{Z} & \text{per } n \text{ pari} \end{cases}$$

Per quanto visto nelle lezioni precedenti:

$$K_c(X) = K(X^+, +) = L_n(X^+, +) = \Theta_n(X^+, +) \quad \forall n \geq 1 \tag{24}$$

In particolare, grazie all'ultima identificazione, vediamo che $K_c(X)$ è uguale al gruppo abeliano ottenuto quozientando il semigruppo costituito dalle *classi di omotopia di complessi di lunghezza n che sono esatti fuori di un compatto* (o, equivalentemente, *a supporto compatto*) per il sottosemigruppo costituito da quelle *classi di omotopia di complessi che sono esatti ovunque*
Vi ricordo che il *supporto* di un complesso su X è l'insieme degli $x \in X$ tali che

$$0 \to E^n_x \to \cdots \to E^{j+1}_x \xrightarrow{\alpha_{j+1}} E^j_x \xrightarrow{\alpha_j} E^{j-1}_x \to \cdots \to E^0_x \to 0$$

non è esatta.

Sia ora Y compatto e X localmente compatto. Possiamo allora definire un prodotto esterno

$$K_c(X) \otimes K(Y) \longrightarrow K_c(X \times Y) \tag{25}$$

Per definire il prodotto esterno abbiamo bisogno di qualche notazione. Siano p_1, p_2 le proiezioni di $X \times Y$ su X ed Y rispettivamente. Se $E \to X$ e $F \to Y$ sono due fibrati vettoriali allora denotiamo il fibrato $p_1^* E \otimes p_2^* F$ su $X \times Y$ tramite il simbolo $E \boxtimes F$.

Se

$$[0 \longrightarrow E^1 \xrightarrow{\alpha} E^0 \longrightarrow 0] \in K_c(X) \quad \text{e} \quad [0 \longrightarrow F^1 \xrightarrow{\beta} F^0 \longrightarrow 0] \in K(Y),$$

il loro prodotto esterno è, per definizione, l'elemento

$$[0 \longrightarrow E^1 \boxtimes F^1 \xrightarrow{\gamma} E^0 \boxtimes F^1 \oplus E^1 \boxtimes F^0 \xrightarrow{\delta} E^0 \boxtimes F^0 \longrightarrow 0] \in K_c(X \times Y) \tag{26}$$

dove, con ovvia notazione,

$$\gamma = \begin{pmatrix} \alpha \boxtimes \mathrm{Id} & 0 \\ \mathrm{Id} \boxtimes \beta & 0 \end{pmatrix}, \quad \delta = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\mathrm{Id} \boxtimes \beta & \alpha \boxtimes \mathrm{Id} \end{pmatrix}$$

Utilizzando le identificazioni

$$\Theta_1((X \times Y)^+, +) = \Theta_2((X \times Y)^+, +) = K_c(X \times Y)$$

possiamo descrivere il risultato tramite il seguente complesso di lunghezza 1:

$$[0 \to E^1 \boxtimes F^1 \oplus E^0 \boxtimes F^0 \xrightarrow{\zeta} E^0 \boxtimes F^1 \oplus E^1 \boxtimes F^0 \to 0]$$

con

$$\zeta = \begin{pmatrix} \alpha \boxtimes \mathrm{Id} & -\mathrm{Id} \boxtimes \beta^* \\ \mathrm{Id} \boxtimes \beta & \alpha^* \boxtimes \mathrm{Id} \end{pmatrix}$$

È possibile dare una definizione diretta del prodotto esterno, senza utilizzare la descrizione della K-teoria in termini di complessi di fibrati; vedremo questa descrizione più avanti.

Notazione: d'ora in avanti utilizzeremo un'unica notazione, $K(\ )$, per la K-teoria di uno spazio topologico, con l'intesa che se X è localmente compatto, allora $K(X)$ denota la K-teoria a supporto compatto di X.

8.2. **Omomorfismo di Bott e teorema di periodicità.**

Sia X uno spazio compatto. Consideriamo il prodotto esterno

$$K(\mathbb{R}^2) \otimes K(X) \longrightarrow K(\mathbb{R}^2 \times X) \tag{27}$$

Sappiamo che $K(\mathbb{R}^2) = \mathbb{Z}$; $K(\mathbb{R}^2)$ è quindi generato da un elemento b. Sappiamo anzi descrivere questo elemento: se $f : S^1 \to \mathbb{C}$ è la funzione $f(z) = 1/z$ e se $S^2 = B^2_+ \cup B^2_-$ allora

$$b = [H] - [1] \in \widetilde{K}(S^2) = K(\mathbb{R}^2)$$

con

$$H = B^2_+ \times \mathbb{C} \cup_f B^2_- \times \mathbb{C}.$$

Riassumendo: il prodotto per il generatore b di $K(\mathbb{R}^2)$ induce un omomorfismo

$$\beta : K(X) \longrightarrow K(\mathbb{R}^2 \times X)$$

che è detto *omomorfismo di Bott*. Il seguente teorema è noto come *Teorema di periodicità di Bott in K-Teoria*; è uno dei risultati cruciali in K-Teoria.

Teorema 9. *L'omorfismo di Bott $\beta : K(X) \longrightarrow K(\mathbb{R}^2 \times X)$ è un* **isomorfismo**.

Dimostreremo questa teorema costruendo esplicitamente l'inversa $\alpha : K(\mathbb{R}^2 \times X) \longrightarrow K(X)$ di β.

8.3. **Dimostrazione teorema di periodicità: preliminari analitico-funzionali.**

Consideriamo $S^1 \subset \mathbb{C}$ e $L^2(S^1)$. Una base ortonormale di $L^2(S^1)$ è data da $\{e_j := z^j\}$ con $j \in \mathbb{Z}$, $z = e^{i\theta}$. Sia $H_+ \subset L^2(S^1)$, $H_+ := \mathrm{Span}\{e_j\ ,\ j \geq 0\}$ e sia Π_+ la proiezione ortogonale su H_+ in $L^2(S^1)$. Se $f \in C(S^1)$ allora l'operatore di moltiplicazione per f, che denotiamo con M_f, appartiene a $\mathcal{L}(L^2(S^1))$. Consideriamo infine l'operatore

$$T_f = (\Pi_+ \circ M_f)_{|H_+} \in \mathcal{L}(H_+)\,.$$

Proposizione 16. *Se $f(z) \neq 0$ $\forall z \in S^1$ allora $T_f \in \mathcal{L}(H_+)$ è di Fredholm. Inoltre* $\mathrm{ind}\,(T_f) = -W(f,0)$ *con $W(f,0)$ che denota l'indice di allacciamento (winding number) di f in $0 \in \mathbb{C}$.*

La dimostrazione di questa Proposizione è uno degli esercizi (con suggerimento) del terzo compito a casa.

Se $E \simeq \mathbb{C}^n$ è uno spazio vettoriale complesso di dimensione n allora ha senso considerare $L^2(S^1) \otimes E$ che è isomorfo a $L^2(S^1) \oplus \cdots \oplus L^2(S^1)$ n-volte. Se $f : S^1 \to GL(E) \simeq GL(n, \mathbb{C})$ è continua allora possiamo considerare l'operatore di moltiplicazione

$$M_f : L^2(S^1) \otimes E \longrightarrow L^2(S^1) \otimes E$$

che è ovviamente limitato. Possiamo infine far agire diagonalmente Π_+ su $L^2(S^1) \otimes E$ ottenendo un operatore $\Pi_+ : L^2(S^1) \otimes E \to H_+ \otimes E$

Proposizione 17. *Sia* $T_f := (\Pi_+ \circ M_f)_{|H_+ \otimes E}$. *Allora* $T_f \in \mathcal{L}(H_+ \otimes E)$. *Inoltre* T_f *è di Fredholm e* $\inf(T_f) = -W(\det f, 0)$.

L'operatore T_f è detto *l'operatore di Wiener-Hopf associato a* f.
Supponiamo ora di avere uno spazio di parametri X e sia E un fibrato vettoriale su X di rango n. Consideriamo $S^1 \times X$ e sia $s : S^1 \times X \to X$ la proiezione sul secondo fattore. Se è data una sezione $\sigma \in C(S^1 \times X, \mathrm{Iso}(s^*E))$ allora $\sigma(z,x) \in GL(E_x) \simeq GL(n,\mathbb{C})$. Fissato $x \in X$ la funzione $S^1 \ni z \to \sigma(z,x)$ è una funzione continua $\sigma(\cdot,x)$ su S^1 a valori in $GL(E_x) \simeq GL(n,\mathbb{C})$. Per ogni fissato $x \in X$ ha allora senso considerare l'operatore di Wiener-Hopf

$$T_x := T_{\sigma(\cdot,x)} \in \mathcal{L}(H_+ \otimes E_x)\,.$$

Per quanto appena visto questo è un operatore di Fredholm sullo spazio di Hilbert $H_x := H_+ \otimes E_x$. Consideriamo il fibrato di spazi di Hilbert $\mathcal{H} \to X$ con $(\mathcal{H})_x = H_+ \otimes E_x$. Nella dimostrazione del teorema di Atiyah-Janich abbiamo utilizzato il Teorema di Kuiper (si veda la lezione precedente) ; nel suo articolo Kuiper dimostra di fatto un risultato molto più forte e cioè che $\mathcal{L}^+$ *è uno spazio contraibile*. Questo risultato implica in particolare che un fibrato di spazi di Hilbert è sempre banale. (Questo è un fatto del tutto generale; se il gruppo di struttura di una fibrazione è contraibile allora la fibrazione è banale.) Ne segue in particolare che esiste una banalizzazione del nostro fibrato $\mathcal{H} \to X$; fissiamo tale banalizzazione $\mathcal{H} \simeq H \times X$. La famiglia di operatori $\{T_x\}$ diventa allora una *famiglia di operatori di Fredholm sullo spazio di Hilbert* H. Questa famiglia, che denotiamo brevemente con T_σ, è chiaramente continua, dato che σ era una sezione continua; ne segue allora che la famiglia $T_\sigma = \{T_x\}$ definisce una classe indice $\mathrm{Ind}\,(T_\sigma) \in K(X)$.
Conclusione: una sezione continua $\sigma \in C(S^1 \times X, \mathrm{Iso}(s^*E))$ definisce una classe di K-Teoria $\mathrm{Ind}\,(T_\sigma) \in K(X)$.

8.4. **Sketch dimostrazione teorema di periodicità.**

Siano $E \to X$ e $\sigma \in C(S^1 \times X, \mathrm{Iso}(s^*E))$ come nella sezione precedente. Esprimiamo S^1 e S^2 come

$$S^1 = B^2_+ \cap B^2_- \,, \quad S^2 = B^2_+ \cup_{S^1} B^2_-$$

Se $s_\pm : B^2_\pm \times X \to X$ sono le due ovvie proiezioni e $F^\pm = s^*_\pm E$ allora, per incollamento, otteniamo un fibrato

$$F^+ \cup_\sigma F^- \longrightarrow S^2 \times X$$

che dipende solo dalla classe di omotopia di σ a meno di isomorfismi. Abbiamo visto in classe che vale una sorta di viceversa di questa osservazione: *se* $F \in \mathrm{Vect}(S^2 \times X)$ *allora esiste un fibrato* $E \to X$ *e* $\sigma \in C(S^1 \times X, \mathrm{Iso}(s^*E))$ *tale che* $F \simeq (s^*_+E) \cup_\sigma (s^*_-E)$. Ma allora, per la sezione precedente esiste una classe indice $\mathrm{Ind}\,(T_\sigma) \in K(X)$ ottenuta considerando la famiglia di operatori di Wiener-Hopf associata a σ. In definitiva abbiamo definito un'applicazione $\mathrm{Vect}(S^2 \times X) \longrightarrow K(X)$ ed è chiaro che quest'applicazione induce un morfismo di gruppi

$$\alpha' : K(S^2 \times X) \longrightarrow K(X)$$

che per restrizione induce

$$\alpha : K(\mathbb{R}^2 \times X) \longrightarrow K(X).$$

Abbiamo dimostrato in classe che

$$\alpha \circ \beta = \mathrm{Id}_{K(X)}\,, \qquad \beta \circ \alpha = \mathrm{Id}_{K(\mathbb{R}^2 \times X)}$$

il che conclude lo sketch della dimostrazione del teorema di periodicità.

9. Lezione 9: Isomorfismo di Thom e indice topologico.

9.1. **Ancora sul prodotto esterno.** Daremo ora una descrizione alternativa del prodotto esterno in K-Teoria. Sia X localmente compatto ed Y compatto. Sia $X^+ = (X \sqcup +)$ la compattificazione ad un punto di X. Esistono due applicazioni naturali:
$i : Y \hookrightarrow X^+ \times Y$, $i(y) = (y, +)$ e $r : X^+ \times Y \to Y$, $r(x,y) = y$. È chiaro che $r \circ i = \mathrm{Id}_Y$; r è quindi una retrazione. Abbiamo anche l'applicazione $s^+ : X^+ \times Y \to X^+$, $s^+(x,y) = x$. Siano ora $\xi \in K(X) \equiv \widetilde{K}(X^+)$ e $\eta \in K(Y)$. Ne segue che

$$\xi = [E] - [1^m]\,,\ \text{con rango}(E) = m\,,$$

E essendo, ovviamente, un fibrato su X^+. Analogamente $\eta = [F] - [1^n]$ e possiamo prendere $n = m$. Utilizzando le due proiezioni r ed s^+ possiamo definire il prodotto esterno $E \boxtimes F$, un fibrato su $X^+ \times Y$. Definiamo allora il prodotto esterno di ξ e η come segue

$$\xi \boxtimes \eta := [E \boxtimes F] - [E \boxtimes 1^m] - [1^m \boxtimes F] + [1^m \boxtimes 1^m]\,.$$

A priori questa è semplicemente una classe in $K(X^+ \times Y)$. D'altra parte abbiamo la successione esatta corta indotta dalla retrazione r:

$$0 \longrightarrow K(X^+ \times Y, Y) \longrightarrow K(X^+ \times Y) \xrightarrow{i^*} K(Y) \longrightarrow 0$$

È facile verificare che $i^*(\xi \boxtimes \eta) = 0$ e quindi, dalla sucessione esatta corta, che $\xi \boxtimes \eta \in K(X^+ \times Y, Y)$. Dato che

$$K(X^+ \times Y, Y) = \widetilde{K}(X^+ \times Y / Y) = \widetilde{K}((X \times Y)^+) = K(X \times Y)$$

concludiamo che il prodotto esterno $\xi \boxtimes \eta$ è ben definito in $K(X \times Y)$.

Osservazione. Non è difficile rendersi conto, sia con la definizione diretta appena data che con quella con i complessi di fibrati data la lezione precedente, che il prodotto esterno

$$K(X) \otimes K(Y) \xrightarrow{\boxtimes} K(X \times Y)$$

può ancora definirsi quando sia X che Y sono localmente compatti.

Sia X uno spazio compatto e V, W due fibrati vettoriali su X. Sono allora ben definiti i gruppi $K(V), K(W)$. Sia $i : X \to X \times X$ l'applicazione diagonale $i(x) = (x,x)$. Componendo il prodotto esterno

$$K(V) \otimes K(W) \xrightarrow{\boxtimes} K(V \times W)$$

con l'applicazione $i^* : K(V \times W) \longrightarrow K(V \oplus W)$ indotta da i, otteniamo un'applicazione

$$K(V) \otimes K(W) \longrightarrow K(V \oplus W)\,.$$

In particolare, se $V = X \times \{\underline{0}\}$ allora abbiamo un'applicazione naturale

$$K(X) \otimes K(W) \longrightarrow K(W) \tag{28}$$

per ogni fibrato vettoriale W.

Vediamo quindi che $K(W)$ ha una naturale struttura di $K(X)$-modulo per ogni fibrato vettoriale $W \to X$.

9.2. **Complesso di Koszul.**

Consideriamo un fibrato complesso $V \to Z$ con Z localmente compatto. Sia $s \in C(Z, V)$, $s : Z \to V$, una sezione continua e sia $\Lambda^k V \to Z$ la k-ma potenza esterna di V. Il complesso di fibrati vettoriali

$$\cdots \longrightarrow \Lambda^k V \xrightarrow{d_s} \Lambda^{k+1} V \longrightarrow \cdots$$

con $(d_s)_z(\omega_z) := \omega_z \wedge s(z)$, è detto *complesso di Koszul.* È elementare verificare che se $s(z) \neq 0$ allora il complesso di Koszul è esatto in z.

Consideriamo in particolare uno spazio compatto X ed un fibrato $\pi : V \to X$. Abbiamo allora il fibrato indotto $\pi^* V$ su V. Questo fibrato ammette una sezione naturale $s : V \to \pi^* V$ definita da $s(v) = (v, v)$ (per definizione $\pi^* V = \{(v, w) \in V \times V \mid \pi(v) = \pi(w)\}$). È ovvio che $s(v) = 0 \Leftrightarrow v = \underline{0}$. Segue quindi che il complesso di Koszul associato a $\pi^* V \to V$ e s,

$$\cdots \longrightarrow \Lambda^k \pi^* V \xrightarrow{d_s} \Lambda^{k+1} \pi^* V \longrightarrow \cdots$$

è esatto fuori dalla sezione nulla. Ne segue che il complesso di Koszul ha supporto compatto e definisce quindi una classe $\lambda_V \in K(V)$.

9.3. **Enunciato teorema di Thom.**

Sia $\lambda_V \in K(V)$ la classe definita dal complesso di Koszul di un fibrato complesso V su X, X compatto. Consideriamo il prodotto esterno (28) e più precisamente

$$K(X) \ni \xi \longrightarrow \pi^* \xi \boxtimes \lambda_V \in K(V)\,. \tag{29}$$

Otteniamo un omomorfismo

$$\phi : K(X) \longrightarrow K(V) \tag{30}$$

Non è difficile verificare che (30) si riduce all'omomorfismo di Bott se V è il fibrato banale di rango 1. L'omomorfismo appena definito è detto *omomorfismo di Thom.*

Teorema 10. *L'omomorfismo* $\phi : K(X) \longrightarrow K(V)$ *è un* **isomorfismo**.

Osservazione. Il teorema appena enunciato, il *Teorema di isomorfismo di Thom in K-Teoria*, vale anche se X è localmente compatto. Occorre chiarire il fatto che anche in questo caso più generale la classe $\pi^* \alpha \boxtimes \lambda_V \in K(V)$ è ben definita.
La classe α che compare in (29) è definita da un complesso (F^j, α^j) a supporto compatto K in X. È chiaro che $\pi^* \alpha$ è rappresentato dal complesso $(\pi^* F^j, \pi^* \alpha^j)$ con supporto uguale quindi a $\pi^{-1}(K)$ e quindi non-compatto nella direzione delle fibre di V. D'altra parte il complesso di Koszul ha supporto uguale alla sezione nulla di $V \to X$, quindi non compatto solo nella direzione orizzantale del fibrato $V \to X$. Ne segue che l'intersezione dei due supporti è compatta in V e quindi $\pi^* \alpha \boxtimes \lambda_V \in K(V)$ è ben definita.

9.4. **L'indice topologico.**

Sia Y una varietà differenziabile compatta e sia $X \overset{i}{\hookrightarrow} Y$ una sottovarietà regolare. Definiremo ora un morfismo

$$i_! : K(TX) \longrightarrow K(TY) \tag{31}$$

che è fondamentale nella definizione dell'indice topologico. Si noti che questo è un morfismo covariante.

Sia $n - k = \operatorname{codim} X$. Fissiamo una metrica riemanniana su TY e sia $N \to X$ il fibrato normale a X: N è uguale per definizione all'ortogonale di TX in $TY_{|X}$. Per il teorema dell'intorno tubulare sappiamo che esiste un intorno $\mathcal{U}$ di X in Y ed un diffeomorfismo $\mathcal{U} \leftrightarrow N$. Il differenziale dell'immersione i induce un'immersione regolare $TX \hookrightarrow TY$ ed è chiaro che $T\mathcal{U} \equiv TN$ è un intorno tubulare di TX in TY. D'altra parte $TN = \pi^*(N \oplus N)$, con $\pi : TX \to X$ la proiezione naturale. Ne segue che TN ha una naturale struttura complessa data dall'endomorfismo

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Per il Teorema di Thom esiste un isomorfismo di gruppi abeliani

$$\phi : K(TX) \longrightarrow K(TN) .$$

D'altra parte $TN \overset{j}{\hookrightarrow} TY$ è un intorno aperto di TX in TY.
In generale se Z è uno spazio localmente compatto ed $U \overset{\psi}{\hookrightarrow} Z$ è un aperto di Z allora è ben definito un morfismo

$$\psi_* : K(U) \longrightarrow K(Z) ;$$

questo morfismo è semplicemente indotto dalla proiezione naturale

$$Z^+ \longrightarrow Z^+/(Z^+ \setminus U) = U^+ .$$

Applicando questa osservazione a $TN \overset{j}{\hookrightarrow} TY$ otteniamo un morfismo $j_* : K(TN) \longrightarrow K(TY)$.

Il morfismo $i_! : K(TX) \longrightarrow K(TY)$ indotto dall'immersione $i : X \hookrightarrow Y$ è per definizione uguale alla composizione di ϕ e j_*, esplicitamente

$$K(TX) \xrightarrow{\phi} K(TN) \xrightarrow{j_*} K(TY) , \; i_! := j_* \circ \phi .$$

Sia ora X una qualsiasi varietà differenziabile compatta; per il teorema d'immersione di Whitney sappiamo che esiste $n \in \mathbb{N}$ ed un'immersione regolare $i : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Sia $j : \underline{0} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ l'inclusione naturale. Abbiamo due morfismi indotti

$$i_! : K(TX) \longrightarrow K(T\mathbb{R}^n) = K(\mathbb{C}^n) , \quad j_! : K(\text{punto}) \longrightarrow K(T\mathbb{R}^n) = K(\mathbb{C}^n)$$

con il secondo morfimo uguale semplicemente all'isomorfimo di Thom (o meglio di Bott). Vi ricordo che $K(\text{punto}) = \mathbb{Z}$.

Definizione 19. *Sia X una varietà differenziabile compatta. L'indice topologico è per definizione l'omomorfimo*

$$\text{ind}_t : K(TX) \longrightarrow \mathbb{Z}$$

ottenuto dalla composizione

$$K(TX) \xrightarrow{i_!} K(\mathbb{C}^n) \xrightarrow{j_!^{-1}} K(\text{punto}) = \mathbb{Z} ; \qquad \text{ind}_t = j_!^{-1} \circ i_!$$

10. Lezione 10: Operatori pseudodifferenziali (preliminari).

10.1. Trasformata di Fourier.

Denotiamo con $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ un multi-indice. Poniamo

$$|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n\,, \quad \alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_n! \quad \text{e} \quad x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}.$$

Utilizzeremo la notazione

$$D^\alpha = (\frac{1}{\sqrt{-1}})^{|\alpha|} \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}\,.$$

Sia $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset C^\infty(\mathbb{R}^n)$ lo spazio delle funzioni a decrescenza rapida; è un'algebra commutativa rispetto al prodotto dato dalla convoluzione di due funzioni

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy = (g * f)(x).$$

Vi ricordo anche che $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ è uno spazio di Fréchet con seminorme definite da

$$p_{\alpha,\beta}(f) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\beta D^\alpha f|$$

e che $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ è denso in $L^2(\mathbb{R}^n)$.
Sia $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$; la sua trasformata di Fourier, $\mathcal{F}(f) \equiv \hat{f}$, è la funzione

$$\hat{f}(\xi) := \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i<x,\xi>} f(x)dx \tag{32}$$

È immediato verificare che $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$; otteniamo in questo modo un'applicazione lineare

$$\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Teorema 11. *La trasformata di Fourier $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ è un isomorfismo di spazi di Fréchet con inversa data da*

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i<x,\xi>} \hat{f}(\xi)d\xi \tag{33}$$

Per ogni multi-indice α

$$\xi^\alpha \hat{f} = \widehat{(D_x^\alpha f)}\,, \quad D_\xi^\alpha \hat{f} = (-1)^{|\alpha|} \widehat{(x^\alpha f)} \tag{34}$$

Inoltre

$$\widehat{f * g} = \hat{f}\hat{g}\,, \quad \widehat{fg} = \hat{f} * \hat{g} \tag{35}$$

Vale, infine, la formula di Plancharel:

$$(f,g)_{L^2} = (\hat{f},\hat{g})_{L^2} \tag{36}$$

$\mathcal{F}$ si estende quindi ad un isomorfismo di $L^2(\mathbb{R}^n)$ che è una isometria.

10.2. **Spazi di Sobolev.**

Sia $s \in \mathbb{R}$; la norma di Sobolev di ordine s di una funzione $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ è data da

$$\|f\|_s^2 := \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|)^{2s} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \ .$$

Si ottiene una norma equivalente sostituendo al posto di $(1+|\xi|)^{2s}$ l' espressione $(1+|\xi|^2)^s$. Se $s = k \in \mathbb{N}$ allora possiamo ulteriormente sostituire a $(1+|\xi|^2)^s$ l'espressione $\sum_{|\alpha|\le k} |\xi^\alpha|^2$. Utilizzando quest'ultima espressione e le proprietà della trasformata di Fourier scopriamo che una norma equivalente a quella data, sempre nel caso $s = k \in \mathbb{N}$, è

$$\|f\|_k^2 = \sum_{|\alpha|\le k} \int_{\mathbb{R}^n} |D_x^\alpha f|^2 dx \, .$$

La norma C^k di una funzione $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ è data da

$$\|f\|_{C^k} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \sum_{|\alpha|\le k} |D^\alpha f|^2 \, .$$

Definizione 20. *Lo spazio di Sobolev di ordine s è il completamento di $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ rispetto alla norma $\| \ \|_s$.*

Gli spazi di Sobolev sono spazi L^2 ma con una misura diversa da quella di Lebesgue. Notazioni equivalenti per questi spazi di Hilbert sono le seguenti: $L^2_s(\mathbb{R}^n)$ oppure $W^{s,2}(\mathbb{R}^n)$.
I seguenti risultati, dimostrati in dettaglio a lezione, riassumono alcune proprietà fondamentali degli spazi di Sobolev.

Lemma 9. *(Lemma di Sobolev.) Sia $k \in \mathbb{N}$ e sia $s > k + n/2$. Se $f \in H_s(\mathbb{R}^n)$ allora $f \in C^k(\mathbb{R}^n)$ e $\|f\|_{C^k} \le C\|f\|_s$.*

Se $s > t$ allora $(1+|\xi|^2)^s \ge (1+|\xi|^t)^2$ e quindi $\|f\|_s \ge \|f\|_t$. Ne segue che $H_s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H_t(\mathbb{R}^n)$.

Lemma 10. *(Lemma di Rellich.) Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ con supporto contenuto in un compatto $K \subset \mathbb{R}^n$. Sia $s > t$ e supponiamo che $\exists C \mid \ \|f_n\|_s \le C \ \forall n$. Allora esiste una sottosuccessione $\{f_{n_k}\}$ che converge in $H_t(\mathbb{R}^n)$.*

In parole: se $s > t$, una successione limitata in $H_s(\mathbb{R}^n)$ e con supporto uniformemente contenuto in un compatto K ammette una sottosucessione convergente in $H_t(\mathbb{R}^n)$.

Consideriamo, infine, l'applicazione $\mathcal{S} \times \mathcal{S} \longrightarrow \mathbb{C}$ definita da

$$f, g \longrightarrow |(f,g)_{L^2}|.$$

Abbiamo dimostrato che quest'applicazione si estende ad un'applicazione bilineare

$$H_s(\mathbb{R}^n) \times H_{-s}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{C}$$

che identifica $H_{-s}(\mathbb{R}^n)$ con il duale di $H_s(\mathbb{R}^n)$.

11. Lezione 11: Operatori pseudodifferenziali (teoria locale).

Sia $P = \sum_{|\alpha|\leq k} a_\alpha(x) D_x^\alpha$, $a_\alpha \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, un operatore differenziale di ordine k. Il *simbolo* di P è la funzione $\sigma(P) \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ definita da

$$\sigma(P)(x,\xi) = \sum_{|\alpha|\leq k} a_\alpha(x)\xi^\alpha$$

Per semplificare la notazione spesso scriveremo semplicemente $p(x,\xi)$ al posto di $\sigma(P)(x,\xi)$. Il *simbolo principale* di P è la funzione

$$\sigma_{\rm pr}(P)(x,\xi) = \sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(x)\xi^\alpha.$$

Possiamo fare uso delle proprietà della trasformata di Fourier viste nella lezione precedente e scrivere $\forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$(Pf)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i<x,\xi>} p(x,\xi)\hat{f}(\xi)\frac{d\xi}{(2\pi)^{n/2}}\,. \tag{37}$$

Sappiamo dal teorema fondamentale del calcolo che l'inverso di un operatore differenziale (invertibile) non è più un operatore differenziale; la nozione di *operatore pseudodifferenziale* permette di definire un'algebra di operatori che contiene gli operatori differenziali e, se definiti, i loro inversi, le loro potenze complesse etc. L'idea, molto semplice, è quella di sostituire al posto delle funzione $p(x,\xi)$ che compare in (37), e che è ovviamente una funzione polinomiale in ξ, una funzione più generale ma con specifiche proprietà asintotiche in ξ; per analogia con il caso differenziale una tale funzione è detta un *simbolo*. La trattazione che segue tende a minimizzare l'uso delle distribuzioni ed è particolarmente adatta all'estensione che ne daremo alle varietà *compatte*.

11.1. Spazio dei simboli. Definizione di operatore pseudodifferenziale di ordine m.

Definizione 21. *Lo spazio dei simboli di ordine m, $S^m(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)$ è definito come lo spazio vettoriale delle funzioni $p(x,\xi) \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ verificanti le seguenti proprietà*

- *$p(x,\xi)$ ha x-supporto compatto uniformemente in ξ.*
- *$\forall \alpha,\beta\ \exists\, C_{\alpha,\beta}$ tale che*

$$|D_x^\alpha D_\xi^\beta p(x,\xi)| \leq C_{\alpha,\beta}(1+|\xi|)^{m-|\beta|} \tag{38}$$

Notazione. Poniamo

$$S^{-\infty}(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n) := \cap_m S^m(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n) \quad \text{e} \quad S^{\infty}(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n) := \cup_m S^m(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n).$$

Scriveremo spesso S^m al posto di $S^m(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)$.

Definizione 22. *L'operatore pseudodifferenziale associato al simbolo $p(x,\xi) \in S^m(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)$ è l'operatore $p(x,D)$ definito dalla formula*

$$(p(x,D)f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i<x,\xi>} p(x,\xi)\hat{f}(\xi)\frac{d\xi}{(2\pi)^{n/2}}\,;\ f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \tag{39}$$

Non è difficile verificare, ed è un esercizio del terzo compito a casa, che $p(x,D)$ manda $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Denotiamo con $\Psi^m(\mathbb{R}^n)$, o più semplicemente con Ψ^m, lo spazio vettoriale di tutti gli operatori pseudodifferenziali di ordine m. Se $P\in\Psi^m$ denoteremo il simbolo di P con $\sigma(P)$ oppure con p. Abbiamo dimostrato a lezione il seguente importante risultato:

Teorema 12. *Se $P \in \Psi^m(\mathbb{R}^n)$ allora $\forall s \in \mathbb{R}$ l'operatore P si estende ad un operatore continuo $P : H_s(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H_{s-m}(\mathbb{R}^n)$.*

Se necessario denoteremo con P_s quest'estensione. Se $P \in \Psi^{-m}$, $m > 0$ allora $P : H_s(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H_{s+m}(\mathbb{R}^n)$. Tenendo presente il Lemma di Sobolev, questo vuol dire che operatori di ordine negativo regolarizzano. In particolare se $P = p(x, D)$ con $p(x, \xi) \in S^{-\infty}$, allora $P : H_s \to H_t$ $\forall s, t$. Per il Lemma di Sobolev $P : H_s \to C^\infty$ $\forall s$. Un tale operatore è detto **infinitamente regolarizzante** o anche semplicemente regolarizzante.

Diremo che due simboli p e q sono *equivalenti*, e scriveremo $p \sim q$, se $p - q \in S^{-\infty}$. Diremo che due operatori P e Q sono *equivalenti*, e scriveremo $P \sim Q$, se $P - Q$ è un operatore regolarizzante.

Definizione 23. *Sia e sia $p \in S^\infty$. Diremo che p ha sviluppo asintotico uguale a $\sum p_j$ e scriveremo $p \sim \sum p_j$ se $\forall d \in \mathbb{N}$ $\exists k(d)$ tale che $\forall k \geq k(d)$*

$$p - \sum_{j \leq k} p_j \in S^{-d}.$$

In parole, a patto di prendere k abbastanza grande, la differenza $p - \sum_{j \leq k} p_j$ definisce un operatore di ordine arbitrariamente negativo e quindi un operatore arbitrariamente regolarizzante.

Il seguente importante lemma ci permetterà di costruire operatori pseudodifferenziali con specifiche proprietà

Lemma 11. *(Completezza Asintotica). Sia $p_j \in S^{d_j}$, $d_j \to -\infty$. Allora esiste $p \in S^\infty$ tale che $p \sim \sum p_j$.*

11.2. **Lemma di Kuranishi e sue conseguenze. Pseudolocalità.**

Il seguente lemma tecnico riveste un'importanza fondamentale nello sviluppo del calcolo pseudodifferenziale. Gli elementi di volume negli integrali sono intesi normalizzati, e cioè divisi per il fattore $(2\pi)^{n/2}$ come in (37).

Lemma 12. *(Lemma di Kuranishi) Sia $d \in \mathbb{R}$ e sia $a(x, y, \xi) \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ un simbolo in 2+1=3 variabili; quindi $a(x, y, \xi)$ ha supporto compatto nella variabili x e y e $\forall\, \alpha, \beta, \gamma$ $\exists\, C_{\alpha,\beta,\gamma}$ tale che*

$$|D_x^\alpha D_y^\beta D_\xi^\gamma a(x, y, \xi)| \leq C_{\alpha,\beta,\gamma}(1 + |\xi|)^{d-|\gamma|}.$$

Consideriamo l'operatore lineare $A : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ definito dall'integrale iterato

$$(Af)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i<x-y,\xi>} a(x, y, \xi) f(y) dy d\xi.$$

Allora $A \in \Psi^d(\mathbb{R}^n)$ ed il simbolo $\sigma(A)$ di A ha uno sviluppo asintotico

$$\sigma(A)(x, \xi) \sim \sum_\alpha \frac{i^{|\alpha|}}{\alpha!} (D_\xi^\alpha D_y^\alpha a)(x, y, \xi)_{|x=y} \tag{40}$$

Abbiamo discusso in classe i seguenti corollari del Lemma di Kuranishi:

1. Innanzitutto, se $a(x, y, \xi) \equiv 0$ in un intorno U della diagonale $\Delta \subset \mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_y^n$ allora $A \in \Psi^{-\infty}$.

2. Se $K(x, y) \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ ha supporto compatto allora l'operatore

$$P_K(f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x, y) u(y) dy$$

definisce un operatore $P_K \in \Psi^{-\infty}$. Gli operatori integrali con nucleo C^∞ sono quindi operatori pseudodifferenziali infinitamente regolarizzanti.

3. Se nell'enunciato del Lemma $d < -n - k$ allora l'integrale

$$K(x,y) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i<x-y,\xi>} a(x,y,\xi) d\xi$$

definisce una funzione $C^k(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ e si ha

$$Af(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x,y) f(y) dy.$$

K è detto nucleo di Schwartz di A. Se in particolare $d = -\infty$ allora il necleo di Schwartz è C^∞ e $A \in \Psi^{-\infty}$. Per d arbitrario il nucleo di Schwartz è ancora definito come *distribuzione.*

4. Un operatore è detto ϵ-locale se $\forall u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ $\operatorname{supp}(Au) \subset \{x \,|\, d(x, \operatorname{supp} u) < \epsilon\}$. Se $P \in \Psi^d$ allora $P \sim P_\epsilon$ con P_ϵ un operatore in Ψ^d che è ϵ-locale.

5. Se $\chi_1, \chi_2 \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $P \in \Psi^d$ allora anche l'operatore $\widetilde{P}$ definito da $\widetilde{P}(f) := \chi_1 P(\chi_2 f)$ è un operatore in Ψ^d.

6. (Pseudolocalità.)
A differenza degli operatori differenziali gli operatori pseudodifferenziali non conservano il supporto di una funzione. Basta pensare al caso di un operatore integrale con nucleo C^∞. Si dice anche che gli operatori pseudodifferenziali non sono *locali*: essi godono però di una proprietà più debole, detta pseudolocalità. Vediamo di cosa si tratta. Sia $P \in \Psi^d$ e sia $u \in H_s$. Supponiamo che in un aperto $V \subset \mathbb{R}^n$ si abbia $u_{|_V} \in C^\infty$; *allora* $Pu_{|_V} \in C^\infty$. Nel linguaggio delle distribuzioni questo vuol dire che P conserva il supporto singolare.

11.3. **Composizione. Aggiunto formale. Diffeomorfismi.**

Sia $P \in \Psi^d$. Diremo che P ha supporto contenuto nel compatto $K \subset \mathbb{R}^n$ se
(i) $\operatorname{supp} Pf \subset K$ $\forall f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$
(ii) $\operatorname{supp} u \cap K = \emptyset \Longrightarrow Pu = 0$.

Denotiamo con Ψ_K^d il sottospazio degli operatori a supporto in K. Il Lemma di Kuranishi viene anche e soprattutto utilizzato per dimostrare i suguenti tre teoremi fondamentali. Il primo afferma che lo spazio vettoriale $\Psi_K^* := \cup_d \Psi_K^d$ ha una struttura di algebra.

Teorema 13. *Sia* $P = p(x,D) \in \Psi_K^d$ *e* $Q = q(x,D) \in \Psi_K^{d'}$. *Allora* $P \circ Q \in \Psi_K^{d+d'}$ *e*

$$\sigma(P \circ Q) \sim \sum_\alpha \frac{i^{|\alpha|}}{\alpha!} (D_\xi^\alpha p)(D_x^\alpha q)\,. \tag{41}$$

Il secondo risultato afferma che esiste una naturale involuzione in Ψ_K^d:

Teorema 14. *Sia* $P = p(x,D) \in \Psi_K^d$. *Allora esiste un unico operatore* P^*, *detto aggiunto formale di* P, *tale che*

$$(Pf, g)_{L^2} = (f, P^* g)_{L^2}\,, \quad \forall f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \text{ e con supporto in } K\,.$$

Si ha inoltre

$$P^* \in \Psi_K^d \quad \text{ e } \quad \sigma(P^*) \sim \sum_\alpha \frac{i^{|\alpha|}}{\alpha!} (D_\xi^\alpha D_x^\alpha \overline{p})\,. \tag{42}$$

Fino ad ora abbiamo lavorato in $\mathbb{R}^n$; se $U \subset \mathbb{R}^n$ è un aperto di $\mathbb{R}^n$ allora è chiaro che è ancora ben definito lo spazio dei simboli $S^d(U \times \mathbb{R}^n)$ e lo spazio vettoriale $\Psi^d(U)$. Tenendo presente la teoria globale che stiamo per sviluppare, possiamo denotare lo spazio dei simboli tramite $S^d(T^*U)$ co

$T^*U = U \times \mathbb{R}^n$ lo spazio cotangente. Possiamo anche definire $\Psi^*_K(U)$ con K sottoinsieme compatto di U. I due teoremi appena enunciati si estendono senza difficoltà a $\Psi^*_K(U)$.

Supponiamo ora che $\phi : U \to V$ sia un diffeomorfismo fra due aperti di $\mathbb{R}^n$. Sia $P \in \Psi^d_K(U)$. Definiamo un operatore $\phi_* P : C^\infty_c(V) \to C^\infty_c(V)$ come segue:

$$((\phi_* P)f)(y) = (P(f \circ \phi)(\phi^{-1}(y)) .$$

Il seguente teorema ci permetterà di globalizzare i risultati locali alle varietà differenziabili.

Teorema 15. *$\phi_* P \in \Psi^d_{\phi(K)}(V)$ e per il simbolo $\sigma(\phi_* P)$ si ha*

$$\sigma(\phi_* P)(\phi(x), \eta) \sim \sum_\alpha \frac{1}{\alpha!} \phi_\alpha(x, \xi) D^\alpha_\xi p(x, (\phi')^t(x)\eta) . \tag{43}$$

con ϕ' uguale alla matrice Jacobiana di ϕ e $\phi_\alpha(x, \xi)$ polinomiale in ξ di grado $\leq |\alpha|/2$ e $\phi_0(x, \xi) \equiv 1$.

Riassumendo: se denotiamo con $(\ )^*$ il passaggio all'aggiunto formale e se $\phi : U \to V$ è un diffeomorfismo allora

$$\Psi^d_K(U) \circ \Psi^{d'}_K(U) \subset \Psi^{d+d'}_K(U) ; \quad (\ )^* : \Psi^d_K(U) \to \Psi^d_K(U) ; \quad \phi_* : \Psi^d_K(U) \to \Psi^d_{\phi(K)}(V) \tag{44}$$

e dalle formule (41), (42), (15) deduciamo che per i simboli principali valgono le seguenti notevoli formule:

$$\sigma_{\mathrm{pr}}(P \circ Q) = \sigma_{\mathrm{pr}}(P)\sigma_{\mathrm{pr}}(Q) \qquad \sigma_{\mathrm{pr}}(P^*) = \overline{\sigma_{\mathrm{pr}}(P)} , \tag{45}$$

$$\sigma_{\mathrm{pr}}(\phi_* P)(y, \eta) = \sigma_{\mathrm{pr}}(P)(\phi_1(y), J(y)\eta) \tag{46}$$

con $\phi_1 = \phi^{-1}$ e $J(y) = ((\phi_1'(y))^{-1})^t$.

Quanto appena visto può essere generalizzato senza difficoltà ad operatori che agiscono su funzioni a valori vettoriali. Tenendo presente che dovremo fra poco generalizzare ad operatori che agiscono su sezioni di fibrati vettoriali su varietà differenziabili, adottiamo qui una notazione un pò artificiale.

Sia quindi U un aperto di $\mathbb{R}^n$ e sia $\mathbf{I}^k \to U$ il fibrato banale $\mathbf{I}^k \equiv U \times \mathbb{C}^k \to U$. Le sezioni di $\mathbf{I}^k \to U$ sono le funzioni a valori in $\mathbb{C}^k$. Analogamente le funzioni a valori matrici in $\mathcal{M}_{k \times \ell}(\mathbb{C})$ sono le sezioni del fibrato banale $\mathrm{Hom}(\mathbf{I}^k, \mathbf{I}^\ell)$. $C^\infty(U, \mathbf{I}^k)$ sono le funzioni vettoriali che sono C^∞.

Un operatore pseudodifferenziale di ordine d, $P : C^\infty_c(U, \mathbf{I}^k) \longrightarrow C^\infty(U, \mathbf{I}^\ell)$, è definito da un simbolo $p(x, \xi)$ con $p(\ ,\ ) \in C^\infty(T^*U, \mathrm{Hom}(\mathbf{I}^k, \mathbf{I}^\ell))$, $p(\ ,\ ) = (p_{ij}(\ ,\ ))$ ed almeno un elemento della matrice ha ordine d. Per definizione $P = (p_{ij}(x, D))$. Denotiamo questo spazio di operatori con $\Psi^*(U, \mathbf{I}^k, \mathbf{I}^\ell)$. I risultati appena dimostrati valgono ancora per questi operatori. Per quel che concerne P^*; esso è definito tramite i prodotti scalari L^2

$$\int_U < f(x), g(x) > dx , \qquad f, g \in C^\infty_c(U, \mathbf{I}^j)$$

con $<\ ,\ >$ uguale al prodotto hermitiano canonico in $\mathbb{C}^j$. Si ha

$$\sigma_{\mathrm{pr}}(P^*) = (\overline{\sigma_{\mathrm{pr}}(P)})^t . \tag{47}$$

12. Lezione 12: Teoria globale. Operatori pseudodifferenziali classici. Operatori ellittici.

12.1. Operatori su varietà. Fibrati vettoriali.

Sia M una varietà differenziabile di dimensione n. Per semplicità supporremo direttamente M compatta e orientabile, anche se molte definizioni si estendono senza difficoltà al caso generale. Fissiamo una metrica riemanniana g su M e denotiamo con dg la forma di volume associata. Sia $P : C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M)$ un operatore lineare. Sia $(\mathcal{O}, \kappa : \mathcal{O} \longrightarrow U \subset \mathbb{R}^n)$ una carta locale e sia $\kappa_1 = \kappa^{-1}$. Abbiamo due applicazioni naturali, di inclusione e di restrizione:

$$i_{\mathcal{O}} : C_c^\infty(\mathcal{O}) \longrightarrow C^\infty(M)\,, \qquad r_{\mathcal{O}} : C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(\mathcal{O})\,.$$

L'inclusione è data estendendo una funzione uguale a zero fuori dal suo supporto. Sia

$$P_{\mathcal{O}} = r_{\mathcal{O}} \circ A \circ i_{\mathcal{O}}\,, \qquad P_{\mathcal{O}} : C_c^\infty(\mathcal{O}) \longrightarrow C^\infty(\mathcal{O})$$

e sia $P_U : C_c^\infty(U) \to C^\infty(U)$ l'operatore lineare definito dalla seguente composizione

$$C_c^\infty(U) \xrightarrow{\kappa^*} C_c^\infty(\mathcal{O}) \xrightarrow{P_{\mathcal{O}}} C^\infty(\mathcal{O}) \xrightarrow{\kappa_1^*} C^\infty(U)$$

Definizione 24. *Diremo che l'operatore lineare $P : C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M)$ appartiene a $\Psi^d(M)$, lo spazio degli operatori pseudodifferenziali di ordine d, se per ogni carta locale $(\mathcal{O}, \kappa : \mathcal{O} \longrightarrow U \subset \mathbb{R}^n)$ l'operatore indotto P_U è in $\Psi^d(U)$. La definizione è ben posta grazie al teorema (15).*

Osservazione. Analogamente, passando a carte locali, possiamo definire lo spazio vettoriale degli operatori differenziali di ordine d $\mathrm{Diff}^d(M)$ su M; è ovvio che

$$\mathrm{Diff}^d(M) \subset \Psi^d(M)\,.$$

Sia $P \in \Psi^d(M)$ e sia $x \in \mathcal{O} \subset M$; definiamo il simbolo principale di P calcolato in $\sum \xi^j d\kappa_j(x) \in T_x^*M$ come il simbolo pricipale di A_U calcolato in $(\kappa(x), \xi) \in T^*U$. Uno degli esercizi del terzo compito a casa consisteva nel verificare che il simbolo principale di P è globalmente definito come funzione C^∞ su T^*M: $\sigma_{\mathrm{pr}}(P) \in C^\infty(T^*M)$. L'esercizio è semplice ed utilizza (46).

Siano ora $E \to M$ e $F \to M$ due fibrati vettoriali su M, di rango k ed ℓ rispettivamente. Passando a banalizzazioni locali su carte locali e tenendo presente quanto detto alla fine della lezione precedente, possiamo definire in maniera analoga lo spazio $\Psi^d(M; E, F)$ degli operatori lineari

$$P : C^\infty(M, E) \longrightarrow C^\infty(M, F)$$

che sono pseudodifferenziali di ordine d. Occorrerà richiedere che per ogni banalizzazione locale di E e di F su $\mathcal{O}$ l'operatore indotto P_U sia in $\Psi^d(U; \mathbf{I}^k, \mathbf{I}^\ell)$. Non è difficile dimostrare (ma è un minimo laborioso) che se $P \in \Psi^d(M; E, F)$ allora è ben definito il simbolo principale di P che è una sezione del fibrato $\mathrm{Hom}(\pi^*E, \pi^*F) \longrightarrow T^*M$ con $\pi : T^*M \to M$:

$$\sigma_{\mathrm{pr}}(P) \in C^\infty(T^*M, \mathrm{Hom}(\pi^*E, \pi^*F))\,. \tag{48}$$

La stessa definizione ci permette di definire lo spazio $\mathrm{Diff}^d(M; E, F)$. Classici esempi di operatori differenziali su varietà differenziabili sono l'operatore di differenziazione esterna $d : \Omega^k(M) \equiv C^\infty(M, \Lambda^k(T^M)) \longrightarrow \Omega^{k+1}(M) = C^\infty(M, \Lambda^{k+1}(T^*M))$ oppure l'operatore di derivazione covariante lungo un campo vettoriale X: $\nabla_X : C^\infty(M, TM) \longrightarrow C^\infty(M, TM)$. Vedremo altri notevoli esempi fra un paio di lezioni.

12.2. Operatori pseudodifferenziali classici. Spazi di Sobolev.

Per le applicazioni alla geometria che vogliamo dare , ed in particolare per le connessioni che stabiliremo con la K-Teoria, è comodo restringersi ad una sottoclasse di operatori pseudodifferenziali, gli operatori pseudodifferenziali *classici*.

Sia $U \subset \mathbb{R}^n$ un aperto; lo spazio dei *simboli classici* di ordine d, $S^d_{\mathrm{cl}}(U \times \mathbb{R}^n)$ è definito come il sottospazio vettoriale di $S^d(U \times \mathbb{R}^n)$ costituito dai simboli che hanno un'espansione asintotica

$$p \sim \sum_{j \geq 0} p_j \quad \text{con } p_j \text{ omogenea di grado } d-j \text{ per } |\xi| \geq C$$

Lo spazio $\Psi^d_{\mathrm{cl}}(U)$ è definito usando questi particolari simboli.
Utilizzando carte locali possiamo anche definire $\Psi^d_{\mathrm{cl}}(M)$ per M una varietà riemanniana M ed è chiaro che se $P \in \Psi^d_{\mathrm{cl}}(M)$ allora $\sigma_{\mathrm{pr}}(P)$ è una funzione che è omogenea di grado d nelle fibre di T^*M (per $|\xi| \geq C$). Infine, se E ed F sono due fibrati vettoriali allora è ben definito $\Psi^d_{\mathrm{cl}}(M; E, F)$ e se $\omega \in T^*_x M$, $|\omega| > C$, e $\lambda > 0$ allora

$$\sigma_{\mathrm{pr}}(P)(\lambda\omega) = \lambda^d \sigma_{\mathrm{pr}}(P)(\omega) \quad \text{in} \quad \mathrm{Hom}(E_x, F_x) \tag{49}$$

È ovvio che

$$\mathrm{Diff}^d(M; E, F) \subset \Psi^d_{\mathrm{cl}}(M; E, F) \subset \Psi^d(M; E, F).$$

Nella lezione precedente abbiamo definito gli spazi di Sobolev $H_s(\mathbb{R}^n)$. Possiamo definire in maniera analoga spazi di Sobolev per funzioni a valori in $\mathbb{C}^k$, una volta fissata la metrica hermitiana standard di $\mathbb{C}^n$; denotiamo questi spazi di Hilbert con $H_s(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^k)$. Sia ora M una varietà differenziabile compatta e sia $\{\phi_j\}$ una partizione dell'unità subordinata ad un ricoprimento di M tramite carte locali $(\mathcal{O}_j, \kappa_j : \mathcal{O}_j \to U_j)$. La norma di Sobolev di $f \in C^\infty(M)$ è per definizione

$$\|f\|_s : \sum_j \|\kappa_1^*(f\phi_j)\|_s \quad \text{dove} \quad \kappa_1 = \kappa^{-1}\,.$$

Questa norma dipende dalle scelte fatte; tuttavia scelte diverse danno norme equivalenti. $H_s(M)$ è per definizione il completamento di $C^\infty(M)$ rispetto a questa norma.
Se $E \to M$ è un fibrato vettoriale con metrica hermitiana allora possiamo analogamente definire $H_s(M, E)$. Per gli spazi di Sobolev $H_s(M, E)$ valgono il Lemma di Sobolev ed il Lemma di Rellich (senza ipotesi sul supporto dato che M è compatta). Il Lemma di Rellich può essere rienunciato come segue: *se $s > t$ l'inclusione $H_s(M, E) \hookrightarrow H_t(M, E)$ è un* **operatore compatto**.

Passando a carte locali non è difficile dimostrare, a partire dal risultato locale, che $P \in \Psi^d_{\mathrm{cl}}(M; E, F)$ si estende ad un operatore **continuo** $P : H_s(M, E) \longrightarrow H_{s-d}(M, F)$ $\forall s \in \mathbb{R}$.

È chiaro infine che se E, F e G sono fibrati vettoriali su M allora

$$\Psi^d_{\mathrm{cl}}(M; E, F) \circ \Psi^{d'}_{\mathrm{cl}}(M; F, G) \subset \Psi^{d+d'}_{\mathrm{cl}}(M; E, G) \tag{50}$$

Se E ed F sono due fibrati hermitiani allora per $P \in \Psi^d_{\mathrm{cl}}(M; E, F)$ è ben definito $P^* \in \Psi^d_{\mathrm{cl}}(M; F, E)$ tale che

$$\int_M < Pe, f >_F dg = \int_M < e, P^* f >_E dg$$

e si ha $\sigma_{\mathrm{pr}}(P^*) = \sigma_{\mathrm{pr}}(P)^*$.

Osservazione. Le stesse proprietà di composizione, continuità etc... valgono per gli operatori in $\Psi^*(M; E, F)$, non necessariamente classici.

Definizione 25. *Sia* $P \in \Psi^d_{\rm cl}(M;E,F)$ *e sia* S^*M *il fibrato sferico definito dalla metrica riemanniana in* T^*M. *Sia* $\pi_S : S^*M \longrightarrow M$. *Il simbolo principale asintotico è la sezione* $\widehat{\sigma}_{\rm pr}(P) \in C^\infty(S^*M, {\rm Hom}(\pi_S^*E, \pi_S^*F)$ *definita da*

$$\widehat{\sigma}_{\rm pr}(P)(\omega) = \lim_{t\to+\infty} \frac{\sigma_{\rm pr}(P)(t\omega)}{t^d}, \quad \omega \in S^*M \tag{51}$$

Il simbolo principale asintotico definisce per omogeneità un sezione di $C^\infty(T^*M\backslash 0, {\rm Hom}(\pi^*E, \pi^*F))$. Denotiamo $C^\infty(T^*M \setminus 0, {\rm Hom}^d(\pi^*E, \pi^*F))$ lo spazio delle sezioni che sono omogenee di grado d fuori dalla sezione nulla. Una tale sezione definisce un operatore in $\Psi^d_{\rm cl}(M;E,F)$; basta utilizzare una partizione dell'unità $\{\psi_j\}$ subordinata ad un ricoprimento di carte locali (per ogni carta sarà anche necessario utilizzare delle funzioni cut-off in $|\omega|$, $\omega \in T^*M$, per estendere il simbolo in maniera C^∞ da $T^*M \setminus 0$ a T^*M).

Proposizione 18. $\forall m \in \mathbb{R}$ *la seguente successione è esatta:*

$$0 \longrightarrow \Psi^{m-1}_{\rm cl}(M;E,F) \hookrightarrow \Psi^m_{\rm cl}(M;E,F) \xrightarrow{\widehat{\sigma}_{\rm pr}(\,)} C^\infty(T^*M \setminus 0, {\rm Hom}^m(\pi^*E, \pi^*F)) \longrightarrow 0 \tag{52}$$

12.3. **Operatori ellittici. Esistenza della parametrice.**

Definizione 26. *Sia* $P \in \Psi^d_{\rm cl}(M;E,F)$. P *è un operatore ellittico se* $\widehat{\sigma}_{\rm pr}(P)$ *è invertibile.*

Si noti che, in particolare, E ef F devono avere lo stesso rango. *Vedremo la prossima lezione numerosi esempi di operatori differenziali ellittici.*

Teorema 16. *Sia* $P \in \Psi^d_{\rm cl}(M;E,F)$ *ellittico. Allora esiste* $Q \in \Psi^{-d}_{\rm cl}(M;F,E)$ *tale che*

$$P \circ Q \sim {\rm Id}\,, \qquad Q \circ P \sim {\rm Id} \tag{53}$$

e cioè, esplicitamente, tale che

$$P \circ Q = {\rm Id} + R_r\,, \quad Q \circ P = {\rm Id} + R_l\,, \qquad R_r \in \Psi^{-\infty}_{\rm cl}(M;F,F)\,, R_l \in \Psi^{-\infty}_{\rm cl}(M;E,E) \tag{54}$$

L'applicazione lineare Q è detta una *parametrice* per P o anche un' *inversa modulo operatori infinitamenti regolarizzanti* o anche, brevemente, una *pseudoinversa* di P.

Sketch della dimostrazione. Per ipotesi il simbolo principale asintotico di P è un omomorfismo invertibile. Sia q_1 un'inversa e sia ancora q_1 la sua estensione per omogeneità. Sia $Q_1 \in \Psi^{-d}_{\rm cl}(M;F,E)$ l'operatore definito da questo simbolo. Consideriamo $Q_1 \circ P \in \Psi^0_{\rm cl}(M;E,E)$. Dalla formula per i simboli principali di una composizione, $\widehat{\sigma}_{\rm pr}(Q_1 \circ P) = \widehat{\sigma}_{\rm pr}(Q_1)\,\widehat{\sigma}_{\rm pr}(P)$ da cui segue, per costruzione, che $\widehat{\sigma}_{\rm pr}(Q_1 \circ P) = {\rm Id}$. Quindi $\widehat{\sigma}_{\rm pr}(Q_1 \circ P - {\rm Id}) = 0$ da cui, dalla successione esatta (52), $Q_1 \circ P - {\rm Id} = R \in \Psi^{-1}_{\rm cl}(M;E,E)$ che riscriviamo come

$$Q_1 \circ P = {\rm Id} + R\,, \quad R \in \Psi^{-1}_{\rm cl}(M;E,E).$$

Abbiamo quindi trovato un'inversa sinistra di P modulo *un resto* in $\Psi^{-1}_{\rm cl}$. Procediamo ora a rendere questo resto sempre più regolarizzante. Consideriamo la serie parziale di Neumann $\sum_{j\geq 0}^N (-1)^j R^j$. Questa somma definisce un operatore in $\Psi^0_{\rm cl}(M;E,E)$; sia $Q_N := \sum_{j\geq 0}^N (-1)^j R^j \circ Q_1$. Allora

$$Q_N \in \Psi^{-d}_{\rm cl}\,, \quad \text{e} \quad Q_N \circ P = 1 - R^{N+1} \quad \text{con} \quad R^{N+1} \in \Psi^{-(N+1)}_{\rm cl}.$$

Abbiamo allora costruito un inversa sinistra di P, Q_N, modulo un resto in $\Psi^{-(N+1)}_{\rm cl}$. Procedendo induttivamente possiamo costruire un'inversa sinistra di P modulo un elemento in $\Psi^{-\infty}_{\rm cl}$. Non è difficile dimostrare che questa pseudoinversa sinistra è anche una pseudoinversa destra.

13. Lezione 13: Proprietà fondamentali degli operatori ellittici.

13.1. Teorema di regolarità. Indice di un operatore ellittico. Disuguaglianza di Gärding.

Il Teorema (16) ha alcune fondamentali conseguenze.

Teorema 17. *(Regolorità ellittica.) Sia $P \in \Psi^d_{\mathrm{cl}}(M;E,F)$ ellittico e sia $f \in H_s(M,E)$. Sia $V \subset M$ un aperto e supponiamo che $Pf_{|_V} \in C^\infty$ allora $f_{|_V} \in C^\infty$. In particolare, se $f \in H_s(M,E)$ e $Pf = 0$ allora $f \in C^\infty(M,E)$.*

Dimostrazione. Per il teorema (16) possiamo scrivere $f = QPf - R_l f$ con $R_l \in \Psi^{-\infty}_{\mathrm{cl}}$. Già sappiamo che $R_l f \in C^\infty(M,E)$. D'altra parte $Q \in \Psi^{-d}_{\mathrm{cl}}$ e quindi vale per Q la proprietà di pseudolocalità; ne segue che $QPf_{|_V} \in C^\infty$ e quindi la tesi.

Teorema 18. *(Proprietà di Fredholm.) Sia $P \in \Psi^d_{\mathrm{cl}}(M;E,F$ ellittico. Allora $\forall s \in \mathbb{R}$ l'estensione*

$$P_s : H_s(M,E) \to H_{s-d}(M,F)$$

è un operatore di Fredholm e l'indice di P_s è indipendente da s.

Dimostrazione. Basta dimostrare che P_s ammette un'inversa modulo operatori compatti. Sia $Q \in \Psi^{-d}_{\mathrm{cl}}(M;F,E)$ una pseudoinversa di P e sia Q_{d-s} la sua estensione a $H_{s-d}(M,F)$. Allora $Q_{s-d}P_s = \mathrm{Id} + (R_l)_s$. Ma R_l è infinitamente regolarizzante e quindi $(R_l)_s : H_s(M,E) \longrightarrow H_t(M,E)$ $\forall t \in \mathbb{R}$. In particolare $(R_l)_s : H_s(M,E) \to H_{s+1}(M,E)$. Dal Lemma di Rellich sappiamo che l'inclusione $H_{s+1}(M,E) \to H_s(M,E)$ è compatta; dato che gli operatori compatti sono un ideale ne concludiamo che $(R_l)_s$ è un operatore compatto. Analogamente si costruisce un'inversa destra di P_s modulo compatti. Ne segue che P_s è di Fredholm ed è quindi ben definito

$$\mathrm{ind}\, P_s := \dim \mathrm{Ker} P_s - \dim \mathrm{coker} P_s = \dim \mathrm{Ker} P_s - \dim \mathrm{Ker}(P_s)^* .$$

Utilizzando il teorema di regolarità ellittica e la dualità fra Spazi di Sobolev si dimostra che l'indice non dipende da s.

Teorema 19. *(Disuguaglianza di Gärding.) Sia $P \in \Psi^d_{\mathrm{cl}}(M;E,F)$ ellittico. $\forall s \in \mathbb{R}$ $\exists C_s$ tale che*

$$\|f\|_s \leq C_s(\|Pf\|_{s-d} + \|f\|_{s-d}) \tag{55}$$

Dimostrazione. Possiamo scrivere $f = QPf - R_l f$. Ne segue che $\|f\|_s \leq (\|QPf\|_s + \|R_l f\|_s)$. Ma $Q \in \Psi^{-d}_{\mathrm{cl}}$ e quindi continuo da $H_{s-d}(M,F) \to H_d(M,E)$ e dato che $R_l \in \Psi^{-\infty}_{\mathrm{cl}}$ otteniamo immediatamente la tesi.

Osservazione. La disuguaglianza di Gärding gioca un ruolo fondamentale nello studio delle proprietà spettrali degli operatori ellittici.

13.2. Operatori ellittici formalmente autoaggiunti.

Sia $P \in \Psi^d_{\mathrm{cl}}(M;E,E)$ un operatore pseudodifferenziale ellittico di ordine d. P è detto formalmente autoaggiunto se $P = P^*$.

Teorema 20. *Sia $P \in \Psi^d_{\mathrm{cl}}(M;E,E)$, $P : C^\infty(M,E) \longrightarrow C^\infty(M,E)$, ellittico formalmente autoaggiunto. Allora esiste una decomposizione L^2-ortogonale*

$$C^\infty(M,E) = \mathrm{Ker} P \oplus \mathrm{Im} P \tag{56}$$

Sketch della dimostrazione. Sicuramente esiste una decomposizione ortogonale $L^2(M,E) = \mathrm{Ker}P \oplus (\mathrm{Ker}P)^{\perp}$. Notiamo che, per definizione, $H_0(M,E) = L^2(M,E)$. Sia $u \in C^{\infty}(M,E) \subset L^2(M,E)$; allora

$$u = u_0 + u_1\ ,\ \ u_0 \in \mathrm{Ker}P\ ,\ \ u_1 \in (\mathrm{Ker}P)^{\perp}\ ;$$

ma $u_0 \in C^{\infty}(M,E)$ per regolarità ellittica e quindi $u_1 \in C^{\infty}(M,E)$. Basta dimostrare che $u_1 = Pw_1$ con $w_1 \in C^{\infty}(M,E)$.
Consideriamo $P_0 : L^2(M,E) \to H_{-d}(M,E)$ e identifichiamo $(H_{-d}(M,E))^* \equiv H_d(M,E)$; per l'ipotesi $P = P^*$ e usando questa identificazione scopriamo che il trasposto di P_0, che va quindi da $H_d(M,E)$ a $L^2(M,E)$ è uguale all'estensione P_d di P stesso. Ma allora

$$(\mathrm{Ker}P_0)^{\perp} = ((\mathrm{Im}P_d)^{\perp})^{\perp} = \mathrm{Im}P_d\,,$$

dato che P_d è di Fredholm (quindi ad immagine chiusa). Ne segue che $u_1 = Pw_1$ con $w_1 \in H_d(M,E)$. Abbiamo visto che $u_1 \in C^{\infty}(M,E)$; per regolarità ellittica segue che $w_1 \in C^{\infty}(M,E)$ e la dimostrazione è completa.

14. **Lezione 14: Teorema di Hodge e sue conseguenze.**

In questa lezione vedremo delle importanti applicazioni geometriche della teoria sviluppata fino ad ora.

14.1. **Complessi ellittici.**

Definizione 27. *Siano $V_1,\dots,V_\ell$ fibrati vettoriali su M e supponiamo di avere $\forall j$ un operatore $P_j \in \mathrm{Diff}^d(M;V_j,V_{j+1})$. La successione*

$$\cdots \longrightarrow C^{\infty}(M,V_j) \xrightarrow{P_j} C^{\infty}(M,V_{j+1}) \longrightarrow \cdots \tag{57}$$

è un complesso di operatori differenziali di ordine d se $P_{j+1}\circ P_j = 0$. Il complesso è detto ellittico se $\forall x \in M$ e $\forall \omega \in T^*_xM \setminus 0$ la successione dei simboli

$$\cdots \longrightarrow (V_j)_x \xrightarrow{\sigma_{\mathrm{pr}}(P_j)(\omega)} (V_{j+1})_x \longrightarrow \cdots \tag{58}$$

è esatta

Denotiamo un tale complesso con $\{V_*,P_*\}$. Definiamo il k-mo *gruppo di coomologia* $\mathbb{H}^k(\{V_*,P_*\})$ del complesso $\{V_*,P_*\}$ come lo spazio vettoriale quoziente

$$\mathbb{H}^k(\{V_*,P_*\}) := \mathrm{Ker}P_k/\mathrm{Im}P_{k-1}\,.$$

Supponiamo che ogni fibrato V_j sia dotato di una metrica hermitiana. È allora ben definito P_j^* che è ancora un operatore differenziale di ordine d. L'operatore $\Delta_j := P_j^*P_j + P_{j-1}P_{j-1}^*$ è allora un operatore differenziale di ordine $2d$ che è formalmente autoaggiunto e manda $C^{\infty}(M,V_j)$ in se stesso.

La seguente Proposizione è di facile dimostrazione:

Proposizione 19. *Il complesso $\{V_j,P_j\}$ è ellittico se e solo se l' operatore Δ_j è ellittico $\forall j$.*

14.2. **Teorema di Hodge generalizzato. Indice di un complesso ellittico.**

Teorema 21. *(Decomposizione di Hodge). Sia $\{V_j, P_j\}$ un complesso ellittico. Allora $\forall j$ il sottospazio* $\mathrm{Ker}\Delta_j$ *ha dimensione finita e vale la seguente decomposizione L^2-ortogonale:*

$$C^\infty(M, V_j) = \mathrm{Ker}\Delta_j \oplus \mathrm{Im}P_{j-1} \oplus \mathrm{Im}P_j^* \,. \tag{59}$$

Sketch della dimostrazione. Sappiamo che Δ_j è ellittico formalmente autoaggiunto. Per il Teorema abbiamo la decomposizione ortogonale $C^\infty(M, V_j) = \mathrm{Ker}\Delta_j \oplus \mathrm{Im}\Delta_j$. Dalla definizione di Δ_j segue che $\mathrm{Im}\Delta_j \subset \mathrm{Im}P_j^* + \mathrm{Im}P_{j-1}$. Osserviamo che dalla definizione di aggiunto e dal fatto che $P_j \circ P_{j-1} = 0$ segue che $\mathrm{Im}P_j^* \perp \mathrm{Im}P_{j-1}$. Inoltre $\mathrm{Ker}\Delta_j = \mathrm{Ker}P_j \cap \mathrm{Ker}P_{j-1}^*$; infatti un'inclusione è ovvia e l'altra segue dal fatto che se $u \in \mathrm{Ker}\Delta_j$ allora $(\Delta_j u, u) = \|P_j u\|^2 + \|P_{j-1}^* u\|^2 = 0$. Da queste due osservazioni segue che $\mathrm{Im}P_j^* + \mathrm{Im}P_{j-1} \subset \Delta_j$ da cui l'uguaglianza $\mathrm{Im}P_j^* + \mathrm{Im}P_{j-1} = \Delta_j$ e, nuovamente per la prima osservazione, la tesi.

Teorema 22. *(Isomorfismo di Hodge) Per ogni j esiste un isomorfismo di spazi vettoriali:*

$$\mathrm{Ker}\Delta_j \simeq \mathbb{H}^j(\{V_*, P_*\}) := \mathrm{Ker}P_j/\mathrm{Im}P_{j-1} \tag{60}$$

Sketch della dimostrazione. Abbiamo verificato che $\Delta_j = \mathrm{Ker}P_j \cap \mathrm{Ker}P_{j-1}^*$. Consideriamo la mappa

$$\phi : \mathrm{Ker}\Delta_j \longrightarrow \mathrm{Ker}P_j/\mathrm{Im}P_{j-1}$$

che associa a $v \in \mathrm{Ker}\Delta_j$ la sua classe $[v]$ nel quoziente. Quest'applicazione è iniettiva, perché se $\phi(v) = 0$ allora $v \in \mathrm{Im}P_{j-1}$ e quindi $v = 0$ dato che $\mathrm{Im}P_{j-1} \cap \mathrm{Ker}\Delta_j = 0$. Dimostriamo che ϕ è anche suriettiva. Sia $[v] \in \mathrm{Ker}P_j/\mathrm{Im}P_{j-1}$. Possiamo decomporre $v = v_0 + \Delta_j v_1$ con $v_0 \in \mathrm{Ker}\Delta_j$. Si ha $\phi(v_0) = [v]$ (da cui la tesi). Infatti: dato che $v \in \mathrm{Ker}P_j$ ne segue che $P_j v_0 + P_j \Delta_j v_1 = 0$; ma $P_j v_0 = 0$ e quindi ne deduciamo che $P_j P_j^* P_j v_1 = 0$ (vi ricordo che $P_j P_{j-1} = 0$). Facendo il prodotto scalare di $P_j P_j^* P_j v_1$ con $P_j v_1$ ed utilizzando la definizione di aggiunto (e cioè integrando per parti) otteniamo $\|P_j^* P_j v_1\|^2 = 0$ da cui $\Delta_j v_1 = P_{j-1} P_{j-1}^* v_1$. Ma allora $[v] = [v_0] = \phi(v_0)$ come si voleva.

Definizione 28. *Sia $\{V_j, P_j\}$ un complesso ellittico; l'indice del complesso è definito come*

$$\mathrm{ind}\,(\{V_*, P_*\}) := \sum_j (-1)^j \dim \mathbb{H}^j(\{V_*, P_*\}) \in \mathbb{Z}\,.$$

Osservazione. La nozione di indice di un complesso ellittico è una semplice generalizzazione dell'indice di un singolo operatore ellittico. Se $P : C^\infty(M, E) \to C^\infty(M, F)$ è un operatore ellittico, allora $0 \to C^\infty(M, E) \xrightarrow{P} C^\infty(M, F) \to 0$ è un complesso ellittico e l'indice dell'operatore P è uguale all'indice del complesso.

14.3. **Esempi notevoli: de Rham, Dolbeault, l'operatore-segnatura.**

Esempio 1. (Complesso di *de Rham.*)
Sia M una varietà riemanniana compatta e sia $\Lambda^k M := \Lambda^k(T^*M)$. Le sezioni di questo fibrato sono le forme differenziali di grado k: $C^\infty(M, \Lambda^k M) \equiv \Omega^k(M)$. L'operatore di differenziazione esterna $d_j : \Omega^j(M) \to \Omega^{j+1}(M)$ definisce un complesso $\{\Lambda^* M, d_*\}$, detto il *complesso di de Rham*:

$$\cdots \longrightarrow C^\infty(M, \Lambda^k M) \xrightarrow{d_k} C^\infty(M, \Lambda^{k+1} M) \longrightarrow \cdots$$

Non è difficile verificare (ed era un esercizio del terzo compito a casa) che se $\omega_x \in T_x^* M$ e $\alpha \in \Lambda_x^k M$ allora

$$(\sigma_{\mathrm{pr}}(d_k)(\omega_x))(\alpha) = \sqrt{-1}\omega_x \wedge \alpha\,.$$

È allora un semplice esercizio di algebra lineare verificare che *il complesso di de Rham è ellittico.* La comologia di questo complesso non è altro che la coomologia di de Rham $H^j_{\mathrm{dR}}(M)$. L'operatore Δ_j è detto operatore di Laplace-Beltrami sulle forme di grado j. Le forme differenziali in $\mathrm{Ker}\Delta_j$ sono dette *forme differenziali armoniche* di grado j. Il teorema di Hodge ci dice in questo caso che

$$\Omega^j(M) = \mathrm{Ker}\Delta_j \oplus d\Omega^{j-1} \oplus d^*\Omega^{j+1}$$

e che

$$\mathrm{Ker}\Delta_j \simeq H^j_{\mathrm{dR}}(M).$$

Notiamo infine che per il teorema di de Rham (che identifica $H^j_{\mathrm{dR}}(M)$ alla coomologia singolare di M):

$$\mathrm{ind}\,(\{\Lambda^* M, d_*\}) = \chi(M)\,. \tag{61}$$

In parole, *l'indice del complesso di de Rham è uguale alla caratteristica di Eulero-Poincaré di M,* un fondamentale invariante topologico della varietà M.

Osservazione. Consideriamo

$$d + d^* : \Omega^{\mathrm{pari}}(M) \to \Omega^{\mathrm{dispari}}(M).$$

Non è difficile verificare che questo operatore è ellittico [19]. È anche relativamente semplice dimostrare [20] che

$$\mathrm{ind}\,(\{\Lambda^* M, d_*\}) = \mathrm{ind}\,(d + d^*_{|_{\Omega^{\mathrm{pari}}}}).$$

L'indice del complesso di de Rham è quindi uguale all'indice di un operatore ellittico. Un enunciato del tutto analogo vale per ogni complesso ellittico.

Dualità di Poincaré.

In generale sia V uno spazio vettoriale di dimensione n, con prodotto scalare q. Si scelga $\{e_i\}$ una base ortonormale di V, e si fissi un'orientazione tramite $\mathrm{vol} := e_1 \wedge \cdots \wedge e_n$. Sia $< \cdot, \cdot >$ il prodotto scalare indotto su ΛV. Possiamo definire per ogni k l'applicazione $*$ di Hodge:

$$\begin{array}{cccc} * : & \Lambda^k V & \to & \Lambda^{n-k} V \\ & e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k} & \mapsto & sign(\sigma) e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_{n-k}} \end{array}$$

dove $\sigma(1) = i_1, \ldots, \sigma(k) = i_k, \sigma(k+1) = j_1, \ldots, \sigma(n) = j_{n-k}$. Si verifica senza difficoltà che

$$*^2 = (-1)^{k(n-k)} \tag{62}$$

e che :

$$u \wedge *v =< u, v > \mathrm{vol}\,, \forall u, v \in \Lambda^k V\,, \quad w \wedge v =< *w, v > \mathrm{vol}\,, \forall w \in \Lambda^{n-k} V, v \in \Lambda^k V$$

Torniamo alla nostra varietà riemanniana di dimensione n e supponiamo in aggiunta che M sia orientabile. Sia $\mathrm{dvol} \in C^\infty(M, \Lambda^n M)$ la forma di volume indotta dalla metrica . Per ogni $x \in M$ rimane definita un'applicazione lineare

$$*_x : \Lambda^k_x M \to \Lambda^{n-k}_x M$$

che induce un'applicazione di fibrati:

$$* : \Lambda^k M \to \Lambda^{n-k} M$$

[19] Basta utilizzare il fatto che il simbolo di d^* è dato dall'aggiunto del simbolo di d, uguale quindi all'aggiunto della moltiplicazione esterna per ω_x che è uguale all'operatore di contrazione (moltiplicazione interna) per ω_x

[20] la dimostrazione è nello stesso spirito di quella che stabiliva che $L_n(X, Y) \simeq L_1(X, Y)$ (si veda la sezione 7.1)

Già sappiamo che date due k-forme ω e α è ben definito il prodotto scalare L^2:

$$(\omega,\alpha)_{L^2} := \int_M <\omega,\alpha> \mathrm{dvol}\,.$$

Possiamo ora dare un'espressione esplicita, in termini di d e $*$, per l'operatore d^*, aggiunto formale di $d : \Lambda^k M \to \Lambda^{k+1} M$ rispetto a $(\cdot,\cdot)_{L^2}$. Per definizione $(d\omega,\beta)_{L^2} = (\omega, d^*\beta)_{L^2}$ per ω una k-forma e β una $(k+1)$-forma. Sia $\omega \in \Lambda^k M$ e $\alpha \in \Lambda^{n-k-1}$. Per il teorema di Stokes:

$$\int_M <*d\omega,\alpha> \mathrm{dvol} = \int_M d\omega\wedge\alpha = (-1)^{k+1}\int_M \omega\wedge d\alpha = \int_M (-1)^{k+1} <*\omega, d\alpha> \mathrm{dvol}$$

Dato che $*^2 = (-1)^{k(n-k)}$ otteniamo la formula cercata:

$$d^* = (-1)^{nk+n+1} * d * \,. \tag{63}$$

Dalle formula (62) (63) segue che $*\Delta_k = \Delta_{n-k}*$ e quindi che $\mathrm{Ker}\Delta_k \simeq \mathrm{Ker}\Delta_{n-k}$. Ricordando il teorema di Hodge e ancora una volta l'isomorfismo di de Rham $H^*_{\mathrm{dR}}(M) \simeq H^*(M,\mathbb{R})$ otteniamo infine il seguente notevole

Corollario 6. *(Dualità di Poincaré). Sia M una varietà compatta orientabile di dimensione n. Allora $\forall k \in 0,\dots,n$ esiste un isomorfismo*

$$H^k(M,\mathbb{R}) \simeq H^{n-k}(M,\mathbb{R}).$$

Esempio 2. (Operatore di segnatura)
Sia M una varietà compatta orientabile di dimensione $2k$. Sia $\tau = (\sqrt{-1})^{p(p-1)+k}*$, $\tau : \Lambda^p_{\mathbb{C}} M \to \Lambda^{n-p}_{\mathbb{C}} M$ con $\Lambda^p_{\mathbb{C}} M \equiv \Lambda^p M \otimes \mathbb{C}$. Si ha $\tau^2 = 1$ ed inoltre $(d+d^*)\tau = -\tau(d+d^*)$. Sia

$$\Lambda^{\pm}_x M = \{\omega \in \Lambda^*_x M \otimes \mathbf{C} \;:\; \tau\omega = \pm\omega\}$$

Da quanto detto $C^\infty(M,\Lambda^*_{\mathbb{C}} M) = C^\infty(M,\Lambda^+_{\mathbb{C}} M) \oplus C^\infty(M,\Lambda^-_{\mathbb{C}} M)$. Definiamo **l'operatore di segnatura**

$$D_{\mathrm{segn}} : C^\infty(M,\Lambda^+_{\mathbb{C}} M) \longrightarrow C^\infty(M,\Lambda^-_{\mathbb{C}} M)$$

come segue:

$$D_{\mathrm{segn}} = d + d^* \,|_{C^\infty(M,\Lambda^+_{\mathbb{C}} M)}\,.$$

L'operatore di segnatura è un operatore differenziale ellittico del primo ordine. Si può dimostrare, utilizzando il teorema di Hodge, che l'indice dell'operatore di segnatura è uguale a zero se k è dispari. Sia ora $k = 2\ell$ e quindi M di dimensione 4ℓ. È ben definita la forma bilineare simmetrica $H^{2\ell}(M,\mathbb{R}) \times H^{2\ell}(M,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ che associa ad $\alpha,\ \beta \in H^{2\ell}(M,\mathbb{R})$ il numero $<\alpha\cup\beta,[M]>$. La segnatura di questa forma bilineare è per definizione la segnatura di M e si denota con $\sigma(M)$. È un invariante topologico estremamente importante delle varietà di dimensione 4ℓ. Facendo uso ancora una volta del Teorema di Hodge è possibile dimostrare che

$$\mathrm{ind}\,(D_{\mathrm{segn}}) = \sigma(M)\,. \tag{64}$$

Scopriamo che, anche in questo secondo esempio, l'indice del nostro particolare operatore ellittico ha un importante significato geometrico

Esempio 3. (Complesso di *Dolbeault.*) Sia M una varietà *complessa* di dimensione complessa n. Consideriamo il fibrato tangente reale $T(M)$ e la sua complessificazione $T(M)\otimes\mathbb{C}$. Questo è un fibrato complesso di dimensione complessa $2n$. Analogamente $T^*M\otimes\mathbb{C}$ è un fibrato complesso di dimensione complessa $2n$. Sia $x \in M$ e consideriamo una carta locale complessa intorno a x con coordinate complesse $(z_1,\dots,z_n)$. Scriviamo $z_j = x_j + \sqrt{-1}y_j$. Una base locale di $T^*M|_U$ è data da $dx_1, dy_1, \dots, dx_n, dy_n$; questa è anche una base per $T^*M|_U \otimes \mathbb{C}$. Poniamo

$$dz_j = dx_j + \sqrt{-1}dy_j, \quad d\overline{z}_j = dx_j - \sqrt{-1}dy_j \tag{65}$$

che costituisce un'altra base complessa di $T^*M|_U \otimes \mathbb{C}$. Localmente esiste una decomposizione

$$T^*M|_U \otimes \mathbb{C} = \Lambda^{1,0}M|_U \oplus \Lambda^{0,1}M|_U$$

con il primo addendo a destra generato da $\{dz_j\}$ ed il secondo da $\{d\overline{z}_j\}$. Dato che M è complessa ne segue che questa decomposizione è globale: $T^*M \otimes \mathbb{C} = \Lambda^{1,0}M \oplus \Lambda^{0,1}M$. Abbiamo anche

$$\Lambda^k(T^*M \otimes \mathbb{C}) = \oplus_{p+q=k}\Lambda^{p,q}(M)$$

con $\Lambda^{p,q}(M)$ generato localmente da forme del tipo

$$dz_{i_1} \wedge \cdots \wedge dz_{i_p} \wedge d\overline{z}_{j_1} \wedge \cdots \wedge d\overline{z}_{j_q}\ .$$

Le sezioni C^∞ di $\Lambda^{p,q}M$ sono le forme differenziali di tipo (p,q); questo spazio di sezioni è solitamente denotato con $\Omega^{p,q}(M)$. Sia

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}_j} := \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x_j} + \sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial y_j})\,, \quad \frac{\partial}{\partial z_j} := \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x_j} - \sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial y_j}).$$

SianO $I = (i_1,\dots,i_p)$ e $J = (j_1,\dots,j_q)$ due multi-indici. Definiamo l'operatore

$$\overline{\partial} : C^\infty(M, \Lambda^{p,q}(M)) \longrightarrow C^\infty(M, \Lambda^{p,q+1}(M))$$

in maniera analoga all'operatore di derivazione esterna: localmente poniamo con ovvia notazione

$$\overline{\partial}(\sum_{I,J}\omega_{I,J}dz^I \wedge d\overline{z}^J) = \sum_{I,J}\sum_{\ell=1}^{n}(\frac{\partial}{\partial \overline{z}_\ell}\omega_{I,J})d\overline{z}_\ell \wedge dz^I \wedge d\overline{z}^J$$

È facile verificare che $\overline{\partial}^2 = 0$. Se necessario denoteremo quest'operatore con $\overline{\partial}_{p,q}$
Fissiamo p e consideriamo la successione

$$\cdots \longrightarrow C^\infty(M, \Lambda^{p,q}(M)) \xrightarrow{\overline{\partial}} C^\infty(M, \Lambda^{p,q+1}(M)) \longrightarrow \cdots \tag{66}$$

Per costruzione questo è un complesso di operatori differenziali di ordine 1 detto *complesso di Dolbeault.* Si verifica senza difficoltà che

$$(\sigma_{\rm pr}(\overline{\partial})(\omega_x))(\,\cdot\,) = \sqrt{-1}\omega_x^{0,1} \wedge (\,\cdot\,)$$

con $T_x^*M \ni \omega_x = \omega_x^{1,0} + \omega_x^{0,1}$ rispetto alla decomposizione di un covettore reale in termini di covettori complessi di tipo $(1,0)$ e $(0,1)$. Ne segue che *il complesso di Dolbeault è ellittico.* Fissiamo una metrica hermitiana su $\Lambda^{1,0}M$; questa induce una metrica hermitiana su $\Lambda^{p,q}M$ e quindi un prodotto L^2. Il Teorema di Hodge generalizzato visto la scorsa lezione implica la seguente decomposizione, detta di Hodge-Dolbeault,

$$\Omega^{p,q}(M) = {\rm Ker}\Box_{p,q} \oplus \overline{\partial}\Omega^{p,q-1}(M) \oplus \overline{\partial}^*\,\Omega^{p,q+1}$$

con $\Box_{p,q} = \overline{\partial}^*_{p,q}\overline{\partial}_{p,q} + \overline{\partial}_{p,q-1}\overline{\partial}^*_{p,q-1}$. Inoltre

$${\rm Ker}\Box_{p,q} \simeq {\rm Ker}\overline{\partial}_{p,q}/{\rm Im}\overline{\partial}_{p,q-1}$$

A destra c'è la coomologia di Dolbeault di tipo (p,q) che per il Teorema di Dolbeault è isomorfa alla coomologia a valori nel fascio delle $(p,0)$-forme olomorfe. In particolare se $p=0$ allora la coomologia di Dolbeault è isomorfa alla coomologia a valori nel fascio $\mathcal{O}$ delle funzioni olomorfe. Riassumendo

$$\mathrm{Ker}\square_{0,q} \simeq \mathrm{Ker}\overline{\partial}_{0,q}/\mathrm{Im}\overline{\partial}_{0,q-1} \simeq H^q(M,\mathcal{O}). \tag{67}$$

Per l'indice analitico del complesso di Dolbeault $\{\Lambda^{0,*},\overline{\partial}_{0,*}\}$ troviamo allora

$$\mathrm{ind}\,(\{\Lambda^{0,*},\overline{\partial}_{0,*}\}) = \sum_j (-1)^j \dim H^j(M,\mathcal{O})\,.$$

Il membro a destra di questa ugualglianza è un invariante geometrico della varietà M, particolarmente importante in geometria algebrica; esso prende il nome di *genere aritmetico* e viene denotato con $\chi(M,\mathcal{O})$. Riassumendo:

$$\mathrm{ind}\,(\{\Lambda^{0,*},\overline{\partial}_{0,*}\}) = \chi(M,\mathcal{O}). \tag{68}$$

Osservazione. Come nel caso del complesso di de Rham, l'indice del complesso di Dolbeault è uguale all'indice dell'operatore ellittico

$$\overline{\partial} + \overline{\partial}^*_{|_{\Omega^{0,\mathrm{pari}}}}$$

15. **Lezione 15: Indice analitico. Teorema di Atiyah-Singer. Formula coomologica.**

In quest'ultima lezione enunceremo finalmente il teorema di Atiyah-Singer nella sua versione K-teoretica, dando uno sketch molto breve della dimostrazione; introdurremo poi oppurtune classi caratteristiche per i fibrati complessi ed enunceremo la formula coomologica per l'indice.

15.1. **Proprietà di stabilità dell'indice di un operatore ellittico.**

Abbiamo visto (Lezione 13) che il simbolo principale asintotico $\widehat{\sigma}_{\rm pr}(\ )$ definisce una successione esatta corta

$$0 \longrightarrow \Psi^{m-1}_{\rm cl}(M;E,F) \hookrightarrow \Psi^{m}_{\rm cl}(M;E,F) \xrightarrow{\widehat{\sigma}_{\rm pr}(\ )} C^\infty(T^*M\setminus 0, {\rm Hom}^m(\pi^*E,\pi^*F)) \longrightarrow 0 \tag{69}$$

Sappiamo anche che dato un elemento in $C^\infty(T^*M\setminus 0, {\rm Hom}^m(\pi^*E,\pi^*F))$ possiamo definere un operatore pseudodifferenziale $\Psi^m_{\rm cl}(M;E,F)$ ad esso associato (leggere intorno alla Proposizione (18)). Rimane quindi definita un'applicazione

$$\mathrm{Op}: C^\infty(T^*M\setminus 0, {\rm Hom}^m(\pi^*E,\pi^*F)) \to \Psi^m_{\rm cl}(M;E,F)\,.$$

Quest'applicazione, un'inversa destra di $\widehat{\sigma}_{\rm pr}(\ )$, non è unica perché dipende ovviamente dalle scelte fatte (partizione dell'unità, funzioni cut-off etc..); tuttavia scelte diverse producono operatori che differiscono per un operatore di ordine strettamente minore di d. Notiamo infine che esiste una biezione $C^\infty(S^*M, {\rm Hom}(\pi_s^*E,\pi_S^*F)) \leftrightarrow C^\infty(T^*M\setminus 0, {\rm Hom}^m(\pi^*E,\pi^*F))$ con la quale possiamo introdurre in maniera naturale una topologia in $C^\infty(T^*M\setminus 0, {\rm Hom}^m(\pi^*E,\pi^*F))$.

Supponiamo ora che P_1 e P_2 siano due operatori ellittici in $\Psi^d(M;E,F)$. Se $\widehat{\sigma}_{\rm pr}(P_1)=\widehat{\sigma}_{\rm pr}(P_2)$ allora $P_1=P_2+K$ con $K\in\Psi^{d-1}_{\rm cl}(M;E,F)$. Otteniamo allora

$$\mathrm{ind}\,P_1 = \mathrm{ind}\,(P_1)_s = \mathrm{ind}\,((P_2)_s+K_s) = \mathrm{ind}\,(P_2)_s = \mathrm{ind}\,P_2 \tag{70}$$

dove abbiamo utilizzato il fatto che $K_s: H_s(M,E)\to H_{s-d}(M,F)$ è compatto [21]. Vi ricordo, si veda la Sezione 7.3, che l'indice di un operatore di Fredhom è invariante per l'aggiunzione di un operatore compatto.

Siano P_1 e P_2 in $\Psi^d_{\rm cl}(M;E,F)$ ellittici e supponiamo che i simboli principali asintotici siano omotopi attraverso simboli invertibili in $T^*M\setminus 0$: $\widehat{\sigma}_{\rm pr}(P_1)\sim\widehat{\sigma}_{\rm pr}(P_2)$. Sotto queste ipotesi segue che $\mathrm{ind}\,(P_1)=\mathrm{ind}\,(P_2)$; per dimostrare questa proprietà baster'̆tilizzare l'invarianza per omotopia dell'indice di un operatore di Fredholm e la continuità della mappa

$$\mathrm{Op}: C^\infty(T^*M\setminus 0, {\rm Hom}^d(\pi^*E,\pi^*F)) \to \mathcal{L}(H_s,H_{s-d})\,.$$

Quest'ultimà proprietà segue dalla dimostrazione (non riportata in queste note ma fatta a lezione) della continuità degli operatori pseudodifferenziali fra spazi di Sobolev.

Riassumendo

$$P_1,P_2\in\Psi^d_{\rm cl}\ \text{ellittici},\quad \widehat{\sigma}_{\rm pr}(P_1)\sim\widehat{\sigma}_{\rm pr}(P_2)\ \Rightarrow \mathrm{ind}\,(P_1)=\mathrm{ind}\,(P_2) \tag{71}$$

In parole: l'indice di un operatore ellittico dipende solo dalla classe di omotopia del simbolo principale dell'operatore. Storicamente è stata proprio questa proprietà a far congetturare da parte di Gelfand la possibilità di esprimere l'indice in termini coomologici. [22]

---

[21] essendo K di ordine $d-1$ ne segue che K_s fattorizza tramite l'inclusione compatta $H_{s-d+1}(M,F)\hookrightarrow H_{s-d}(M,F)$

[22] Che questa congettura di Gelfand sia all'origine del teorema di Atiyah-Singer mi è stato però smentito personalmente da Singer stesso; storicamente la vera ispirazione di Atiyah e Singer è stata l'integralità del genere $\widehat{A}$ per varietà spin. Atiyah e Singer erano convinti (giustamente !) che quest'integralità fosse dovuta al fatto che il genere

Osservazione. L'ordine d non gioca di fatto alcun ruolo; dimostriamo anzi che possiamo sempre ridurci al caso $d=0$. Facciamo prima vedere che $\forall d \in \mathbb{R}$ esiste un operatore $\Lambda^d_E \in \Psi^d_{\mathrm{cl}}(M;E,E)$ che induce un isomorfismo $H_s(M,E) \leftrightarrow H_{s-d}(M,E)$; a tal fine consideriamo un simbolo $\sigma = \sigma^* \in C^\infty(T^*M \setminus 0, \mathrm{Hom}^d(\pi^*E, \pi^*E))$, ad esempio $\sigma(\omega_x) := \|\omega_x\|^d \mathrm{Id}_{E_x}$, con $\omega_x \in T^*_x M$. Sia $Q := \mathrm{Op}(\sigma)$. Dato che $\sigma = \sigma^*$ ne segue che $\mathrm{ind}\,(Q) = \mathrm{ind}\,(Q^*) = -\mathrm{ind}\,(Q)$, quindi $\mathrm{ind}\,(Q) = 0$. Ma allora (esercizio terzo compito a casa) esiste $K \in \Psi^{-\infty}_{\mathrm{cl}}$ tale che $\Lambda^d_E := Q + K$ induce un isomorfismo $H_s \to H_{s-d}$ $\forall s \in \mathbb{R}$. Sia ora P un operatore ellittico di ordine d . Consideriamo l'operatore $\Lambda^{s-d}_F \circ P \circ \Lambda^{-s}$; è chiaro che

$$\Lambda^{s-d}_F \circ P \circ \Lambda^{-s} \in \Psi^0(M,E,F)\,, \quad \text{e} \quad \mathrm{ind}\,(P) = \mathrm{ind}\,(\Lambda^{s-d}_F \circ P \circ \Lambda^{-s})$$

come si voleva.

15.2. Operatori pseudodifferenziali ellittici e K-Teoria.

Sia X localmente compatto. Vi ricordo che

$$K(X) := \widetilde{K}(X^+)$$

con $X^+ = (X \sqcup +)$ uguale alla compattificazione ad un punto di X.
Abbiamo visto varie caratterizzazioni di $K(X)$:

$$K(X) = K(X^+,+) = L_n(X^+,+) = \Theta_n(X^+,+) \quad \forall n \geq 1 \tag{72}$$

In particolare $K(X)$ è uguale al gruppo abeliano ottenuto quozientando il semigruppo $C_n(X)$ costituito dalle *classi di omotopia di complessi di lunghezza n a supporto compatto* per il sottosemigruppo $C_{n,\emptyset}(X)$ costituito dalle *classi di omotopia di complessi con supporto vuoto* (e cioè esatti ovunque).

Supponiamo in particolare che X sia uguale ad un fibrato vettoriale $V \xrightarrow{\pi} M$ su uno spazio compatto M. Per noi V sarà uguale a T^*M, con M una varietà differenziabile compatta senza bordo ma possiamo procedere per il momento in tutta generalità. Consideriamo due fibrati E_1 e E_0 su M e siano π^*E_j i fibrati indotti su V. Sia $m \in \mathbb{R}$; diremo che un morfismo di fibrati

$$\pi^*E_1 \xrightarrow{\alpha} \pi^*E_0$$

è (positivamente) omogeneo di grado m se

$$\alpha_{tv} \;=\; t^m \alpha_v\,, \quad \forall v \in V\,, \forall t > 0\,.$$

Ad esempio, se $P \in \Psi^m_{\mathrm{cl}}(M;E_1,E_0)$ allora il simbolo principale omogeneo $\widehat{\sigma}_{\mathrm{pr}}(P)$ definisce un morfismo $\pi^*E_1 \to \pi^*E_0$ di fibrati su T^*M che è omogeneo di grado m.

È chiaro che un morfismo omogeneo è determinato dalla sua restrizione al fibrato sferico $SV = \{v \in V \mid \|v\| = 1\}$, dove abbiamo fissato una metrica in V.

Denotiamo con ${}^mC_n(V)$ il semigruppo delle classi di omotopia di complessi di lunghezza n che sono omogenei di grado m ed a supporto compatto; le omotopie sono da intendersi lungo complessi omogenei di grado m. Denotiamo con ${}^mC_{n,\emptyset}(V)$ il sottosemigruppo costituito dai complessi la cui restrizione a SV è indotta da un complesso su M che ha supporto vuoto.

Proposizione 20. *Esiste un isomorfismo di gruppi abeniani:*

$$K(V) \simeq {}^mC_n(V)/{}^mC_{n,\emptyset}(V) \tag{73}$$

$\widehat{A}$ fosse l' indice di un operatore ellittico. Non abbiamo parlato di varietà spin in questo corso ma posso rimandarvi alle note delle lezioni del corso dell'anno scorso dove queste tematiche sono sviluppate in gran dettaglio.

Sketch della dimostrazione. Sia $\{E_j, \alpha_j\}$ un complesso a supporto compatto su V; sia $L \subset V$ il supporto di tale complesso. Sia $B_\rho(V)$ un fibrato in dischi di raggio ρ contenente L. La classe di K-teoria determinata da $\{E_j, \alpha_j\}$ dipende solo dalla restrizione di $\{E_j, \alpha_j\}$ a $B_\rho(V)$; d'altra parte $B_\rho(V)$ è contraibile a M visto come sezione nulla di V. Ma allora se denotiamo con $F_j \to M$ la restrizione di E_j alla sezione nulla, avremo isomorfismi $\gamma_j : E_j \to \pi^* F_j$. Sia α'_j la restrizione di $\gamma_{j+1}\alpha_j\gamma_j^{-1}$ a $S_\rho(V)$ ed estendiamo tale morfismo per omogeneità di grado m fuori da $S_\rho(V)$. Otteniamo con un piccolo abuso di notazione

$$\alpha'_j : \pi^* F_j \to \pi^* F_{j+1}$$

e quindi, in conclusione, un complesso $\{\pi^* F_j, \alpha'_j\}$ che è per costruzione omogeneo di grado m. Possiamo definire un morfismo

$$\lambda : K(V) \to {}^m C_n(V)/{}^m C_{n,\emptyset}(V)$$

tramite

$$\lambda[\{E_j, \alpha_j\}] := [\{\pi^* F_j, \alpha'_j\}]\,.$$

λ induce l'isomorfismo desiderato.

Osservazione. Sia X una varietà differenziabile. Abbiamo definito la K-teoria $K(X)$ tramite fibrati vettoriali nella categoria degli spazi topologici ed applicazioni continue. Tuttavia, se $[V] \in K(X)$, allora esiste W fibrato C^∞ su X tale che $[W] = [V]$. Infatti V è classificato da un'applicazione continua f in una grassmanniana; le grassmanniane sono varietà C^∞ e dato che X è per ipotesi anch'essa una varietà C^∞ possiamo approssimare f con un'applicazione differenziabile ϕ. Il pull-back del fibrato universale tramite ϕ definisce un fibrato C^∞, W, tale che $[W] = [V]$.

Sia ora $\alpha \in K(T^*M)$, M varietà differenziabile compatta senza bordo. Per l'osservazione precedente e per la Proposizione (20), con $n = 1$, sappiamo che esistono fibrati C^∞ F_1, F_0 su M ed un omomorfismo

$$a : \pi^* F_0 \to \pi^* F_1$$

che è omogeneo di grado m, un isomorfismo fuori da un compatto e tale che $[\pi^* F_0 \xrightarrow{a} \pi^* F_1] = \alpha \in K(TM)$. Si noti che necessariamente a è un isomorfismo fuori dalla sezione nulla, perché altrimenti, per omogeneità, non potrebbe essere a supporto compatto. Per quanto visto nella sezione 15.1 esiste un operatore $A \in \Psi^m_{\mathrm{cl}}(M; F_0, F_1)$ tale che $\widehat{\sigma}_{\mathrm{pr}}(A) = a$. Possiamo ovviamente prendere $m = 0$.

Riassumendo, abbiamo dato uno sketch della dimostrazione del seguente risultato:

Teorema 23. *$\forall\, \alpha \in K(T^*M)$ esistono fibrati F_0, F_1 su M e $A \in \Psi^0_{\mathrm{cl}}(M; F_0, F_1)$ ellittico tale che*

$$\alpha = [\pi^* F_0 \xrightarrow{\widehat{\sigma}_{\mathrm{pr}}(A)} \pi^* F_1] \tag{74}$$

15.3. **L'omomorfismo indice analitico.**

Sia M una varietà differenziabile compatta senza bordo. Introduciamo una metrica riemanniana e identifichiamo T^*M con TM.

Definizione 29. *Definiamo l'indice analitico*

$$\mathrm{ind}_a : K(TM) \to \mathbb{Z}$$

associando a

$$K(TM) \ni [\pi^* F_0 \xrightarrow{\widehat{\sigma}_{\mathrm{pr}}(A)} \pi^* F_1] = \alpha \quad \textit{l'intero} \quad \mathrm{ind}\,(A)\,. \tag{75}$$

Proposizione 21. *L'applicazione indice analitico (75) è ben definita ed un omomorfismo di gruppi.*

Sketch della dimostrazione. È chiaro che l'indice è additivo per somme dirette. Occorre verificare che è ben definito in ${}^0C_1(M)/{}^0C_{1,\emptyset}(M)$ e che non dipende dalla scelta dell'operatore A. Se

$$[\pi^* F_0 \xrightarrow{a} \pi^* F_1] \;\in\; {}^0C_{1,\emptyset}(M)$$

allora a è indotto da un isomorfismo $\phi : F_0 \to F_1$; è allora chiaro che A è l'operatore di ordine 0 indotto da ϕ, $(Af)(x) = \phi(s(x))$, in particolare $\mathrm{ind}\,(A) = 0$ come si voleva. Il fatto che l'indice analitico non dipenda dalla classe di omotopia del complesso segue da (71); l'indipendenza dalla scelta di A segue dallo stesso ragionamento utilizzato in (70).

15.4. **Enunciato del teorema di Atiyah-Singer. Sketch della dimostrazione.**

Nella lezione 9 abbiamo definito l'indice topologico $\mathrm{ind}_t : K(TM) \to \mathbb{Z}$. Il seguente teorema è fondamentale in Matematica:

Teorema 24. *(Teorema di Atiyah-Singer [4].) Sia M una varietà differenziabile compatta senza bordo. L'indice topologico è uguale all'indice analitico:*

$$\mathrm{ind}_t(\alpha) = \mathrm{ind}_a(\alpha)\,, \quad \forall \alpha \in K(TM)\,. \tag{76}$$

Idea della dimostrazione. L'indice topologico gode di 2 importanti proprietà:

(A1). Se $M =$ punto allora $K(TM) = \mathbb{Z}$ e $\mathrm{ind}\,_t = \mathrm{Id}_{\mathbb{Z}}$.

(A2). Sia $i : M \to N$ un'immersione regolare e sia $i_! : K(TM) \to K(TN)$ l'omomorfsimo indotto; allora $\mathrm{ind}\,_t(i_!\alpha) = \mathrm{ind}\,_t(\alpha)$ $\forall \alpha \in K(TM)$.

La prima proprietà è una semplice conseguenza delle definizione; la seconda segue da proprietà funtoriali dell'isomorfismo di Thom.

Abbiamo dimostrato in classe il seguente risultato di unicità:
Supponiamo che per ogni varietà compatta senza bordo M sia dato un omomorfismo $\phi^M : K(TM) \to \mathbb{Z}$ verificante (A1) e (A2). Allora $\phi = \mathrm{ind}\,_t$.
L'indice analitico verifica banalmente (A1). La difficoltà della dimostrazione è tutta concentrata nella verifica del secondo assioma. Occorre "seguire" analiticamente la costruzione dell'omomorfismo $i_!$ e verificare che l'indice analitico rimane invariato. Una certa proprietà di moltiplicatività per l'indice (ricordate che occorre passare ad un intorno tubulare di M in N) gioca un ruolo cruciale in questa verifica.

15.5. **Classi di Chern. Carattere di Chern. Classe di Todd.**

Introduzione. Sia M una superficie orientabile compatta senza bordo e sia $\chi(M)$ la sua caratteristica di Eulero-Poincaré. Abbiamo visto che $\chi(M)$ è uguale all'indice analitico del complesso di de Rham; sappiamo d'altra parte che $\chi(M)$ è anche uguale, per il teorema di Gauss-Bonnet, all'integrale della curvatura gaussiana. Per il teorema di Atiyah-Singer sappiamo infine che $\chi(M)$ è uguale all'indice topologico del complesso di de Rham. L'indice topologico e l'integrale della curvatura gaussiana sono due entità geometriche che coincidono per quanto appena detto. Ci domandiamo più in generale se sia possibile esprimere l'indice topologico tramite una formula integrale nello spirito della formula di Gauss-Bonnet. La risposta è affermativa ed è il contenuto della formulazione coomologica del teorema di Atiyah-Singer. Storicamente è stata la formula coomologica ad essere dimostrata per prima utilizzando tecniche di cobordismo [3]; la formulazione K-teoretica è venuta qualche anno più tardi, così come il passaggio dalla formula K-teoretica alla formula coomologica [5]. Per poter enunciare la formula coomologica occorre introdurre opportune *classi caratteristiche* per fibrati vettoriali. Queste classi caratteristiche misurano la non-banalità del fibrato.

Sia $E \to M$ un fibrato vettoriale complesso di rango k. Sappiamo dal teorema di classificazione che esiste un'applicazione continua

$$f : M \longrightarrow G_k(\mathbb{C}^\infty) \quad \text{tale che} \quad E \simeq f^*(E_k(\mathbb{C}^\infty)) .$$

È possibile dare una decomposizione cellulare esplicita della grassmanniana $G_k(\mathbb{C}^\infty)$ (tramite le *celle di Shubert*); questa decomposizione cellulare è descritta ad esempio in [10]. A partire dalla decomposizione cellulare si può calcolare l'anello di coomologia singolare di $G_k(\mathbb{C}^\infty)$ ed il risultato è il seguente:

$$H^*(G_k(\mathbb{C}^\infty), \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[c_1, \dots, c_k] , \quad c_j \in H^{2j}(G_k(\mathbb{C}^\infty, \mathbb{Z})) .$$

Definizione 30. *La j-ma classe di Chern del fibrato $(E \to M)$ è la classe di coomologia*

$$c_j(E) := f^*(c_j) \in H^{2j}(M, \mathbb{Z}) ,$$

f essendo un'applicazione classificante per $(E \to M)$. La classe di Chern totale è definita come

$$c(E) = 1 + c_1(E) + \dots + c_k(E)$$

Ad esempio, se $(L \to M)$ è un fibrato di rango 1 allora $c(L) = 1 + c_1(L)$.

Le classi di Chern soddisfano una serie di proprietà [23]: funtorialità rispetto all'operazione di pull-back, normalizzazione [24] e la seguente proprietà di moltiplicatività [25]:

$$c(E \oplus F) = c(E) \cup c(F) \equiv c(E)\, c(F) \tag{77}$$

Supponiamo in particolare che E sia la somma diretta di k fibrati di rango 1: $E = L_1 \oplus \dots \oplus L_k$. Poniamo $x_i := c_1(L_i) \in H^2(M, \mathbb{Z})$; per (77) si ha allora:

$$c(E) = \prod (1 + x_i)$$

e quindi

$$c_j(E) = \sum_{i_1 < \dots < i_j} x_{i_1} \cdots x_{i_j} .$$

Scopriamo quindi che *in questo caso le classi di Chern sono le funzioni simmetriche elementari nelle classi di Chern dei fibrati L_j.*

Supponiamo ancora che $E = L_1 \oplus \dots \oplus L_k$. Definiamo il carattere di Chern di E come la classe di *coomologia razionale*

$$\mathrm{Ch}(E) := \sum_{i=1}^{k} e^{x_i} \in H^*(M, \mathbb{Q})$$

dove pensiamo di sviluppare ogni esponenziale in serie di potenze. La somma è ovviamente finita dato che la coomologia di M si annulla in grado maggiore di $\dim M$. Il carattere di Chern è una classe di coomologia *pari*. Raggruppando i termini omogenei possiamo esprimere il carattere di Chern come somma di funzioni simmetriche di grado 0,1,2 etc. Ogni funzione simmetrica è però

[23] Anzi, queste proprietà individuano univocamente le classi di Chern. Questa teorema di unicità è importante; ci sono infatti vari modi di introdurre queste classi ed è rassicurante sapere che sono tutti compatibili. L'anno scorso, ad esempio, abbiamo introdotto le classi di Chern analiticamente, utilizzando una connessione su E

[24] la classe totale del fibrato universale su $\mathbb{C}P^1$ è uguale ad una precisa 2-classe di coomologia

[25] Per una dimostrazione nell'ambito della nostra definizione si consulti [7]

esprimibile in termini delle funzioni simmetriche elementari e cioè, in questo caso, in funzione delle classi di Chern di E. È elementare verificare, ad esempio, che

$$\mathrm{Ch}(E) = k + c_1(E) + \frac{1}{2}(c_1^2(E) - 2c_2(E)) + \cdots$$

Se E non è somma di fibrati di rango 1 prendiamo questo sviluppo come definizione del carattere di Chern.

Il carattere di Chern definisce un omomorfismo di gruppi

$$\mathrm{Ch} : K(M) \to H^{\mathrm{pari}}(M, \mathbb{Q}), \quad \mathrm{Ch}([V] - [W]) = \mathrm{Ch}(V) - \mathrm{Ch}(W).$$

Un risultato importante in K-teoria afferma che il carattere di Chern induce un isomorfismo

$$K(M) \otimes \mathbb{Q} \leftrightarrow H^{\mathrm{pari}}(M, \mathbb{Q}).$$

La dimostrazione è non banale ed utilizza la celebre successione spettrale di Atiyah-Hirzebruch ([2] [6])

Esiste un'altra importante classe caratteristica, la classe di Todd. Se $E = L_1 \oplus \cdots L_k$ e $x_j = c_1(L_j)$ allora definiamo

$$\mathrm{Td}(E) := \prod \frac{x_i}{1 - e^{-x_j}} \in H^*(M, \mathbb{Q}).$$

Anche in questo caso stiamo implicitamente sviluppando ogni fattore in serie di potenze; raggruppando i termini omogenei possiamo esprimere la classe di Todd in termini delle funzioni simmetriche elementari delle x_j, i.e. in termini elle classi di Chern di E. Quest'epressione ha senso in generale e la adottiamo come definizione. Ad esempio

$$\mathrm{Td}(E) = 1 + \frac{1}{2}c_1(E) + \frac{1}{12}(c_1^2(E) + c_2(E)) + \cdots$$

15.6. **Formulazione coomologica del teorema di Atiyah-Singer.**

Sia M una varietà differenziabile compatta senza bordo. Fissiamo su M una metrica riemanniana. Siano

$$B_1^*M \xrightarrow{\pi_B} M, \quad S^*M \xrightarrow{\pi_S} M$$

il fibrato in dischi di raggio 1 ed il fibrato in sfere rispettivamente; è ovvio che $\partial B_1^*(M) = S^*M$ ed è quindi ben definita

$$\Sigma M = B_1^*(M) \cup_{S^*M} B_1^*(M) \xrightarrow{\pi_\Sigma} M,$$

una fibrazione in sfere di dimensione $n+1$ su M.

Sia $P \in \Psi^d_{\mathrm{cl}}(M; F_0, F_1)$ un operatore ellittico e sia $\widehat{\sigma}_{\mathrm{pr}}(P) \in C^\infty(S^*M, \mathrm{Hom}(\pi_S^*F_0, \pi_S^*F_1))$ il simbolo principale asintotico di P. Per alleggerire la notazione denotiamo il simbolo principale asintotico con p. Dato che P è ellittico p ha valori negli isomorfismi fra $\pi_S^*F_0$ e $\pi_S^*F_1$. Possiamo allora incollare $\pi_B^*F_0 \to B_1^*M$ con $\pi_B^*F_1 \to B_1^*M$ tramite p ottenendo un fibrato vettoriale

$$\Sigma(p) \to \Sigma M.$$

Sia $\mathrm{Ch}(\Sigma(p)) \in H^*(\Sigma M, \mathbb{Q})$ il carattere di Chern di questo fibrato e sia $\mathrm{Td}(T^*M \otimes \mathbb{C})$ la classe di Todd del fibrato tangente complessificato.

Teorema 25. *(Formula dell'indice di Atiyah-Singer) Sia M una varietà differenziabile compatta senza bordo di dimensione n Sia $P \in \Psi^d_{\mathrm{cl}}(M; F_0, F_1)$ un operatore ellittico con simbolo principale asintotico p.*

$$\mathrm{ind}\, P = (-1)^{n(n+1)/2} < \mathrm{Ch}(\Sigma(p)) \cup \pi_\Sigma^* \mathrm{Td}(T^*M \otimes \mathbb{C}), [\Sigma M] > .$$

Osservazioni.

1. Ci sono altre formulazioni della formula di Atiyah-Singer; quella che abbiamo scelto minimizza i requisiti di topologia algebrica. Ad esempio, se M è orientabile, si può dare una formula integrale direttamente su M utilizzando l'isomorfismo di Thom in coomologia ([10]). Più precisamente: applicando il charattere di Chern seguito dall'inverso dell'isomorfimo di Thom in coomologia alla classe di K-teoria $[p] \in K(T^*M)$ otteniamo una classe $\phi^{-1}(\mathrm{Ch}[p]) \in H^*(M,\mathbb{Q})$ e la formula di Atiyah-Singer diventa

$$\mathrm{ind}\,(P) = (-1)^{n(n+1)/2} < \phi^{-1}(\mathrm{Ch}[p]) \cup \mathrm{Td}(T^*M \otimes \mathbb{C}), [M] > . \tag{78}$$

2. Utilizzando l'isomorfismo di de Rham possiamo esprimere l'indice di P come l'integrale del prodotto esterno di due forme differenziali

$$\mathrm{ind}\,(P) = (-1)^{n(n+1)/2} \int_M \phi^{-1}(\mathrm{Ch}[p]) \wedge \mathrm{Td}(T^*M \otimes \mathbb{C}) . \tag{79}$$

3. Se $P = d + d^*_{|\Omega^{\mathrm{pari}}}$ allora sappiamo per il teorema di Hodge-de Rham che $\mathrm{ind}\,(P) = \chi(M)$ e applicando la formula di Atiyah-Singer otteniamo una formula integrale per la caratteristica di Eulero-Poincaré; questa formula generalizza la formula di Gauss-Bonnet ed è nota come *formula di Chern-Gauss-Bonnet.* L'integrando si riduce ad una ben precisa classe caratteristica reale di TM detta *classe di Eulero.*

4. Sia M di dimensione 4ℓ e sia P uguale all'operatore di segnatura, $P = D_{\mathrm{segn}}$. Sappiamo, sempre dal teorema di Hodge-de Rham, che l'indice di P è uguale alla segnatura di M. Applicando la formula di Atiyah-Singer otteniamo una formula integrale per la segnatura nota come *formula della segnatura di Hirzebruch.* Anche in questo caso l'integrando si riduce ad una ben precisa classe caratteristica reale di TM detta *classe L di Hirzebruch.*

5. Sia M complessa e sia $P = \overline{\partial} + \overline{\partial}^*|_{\Omega^{0,\mathrm{pari}}}$. Sappiamo dal teorema di Hodge-Dolbeault che l'indice di P è uguale al genere aritmetico $\chi(M,\mathcal{O})$ di M. Applicando la formula di Atiyah-Singer otteniamo la seguente formula integrale, detta di Riemann-Roch-Hirzebruch, per il genere aritmetico:

$$\chi(M,\mathcal{O}) = \int_M \mathrm{Td}(\Lambda^{1,0}(M)) .$$

6. Il teorema dell'indice di Atiyah-Singer viene anche utilizzato nell'ambito di alcune equazioni *non-lineari* della geometria differenziale. Mi riferisco ad esempio alle equazioni di Yang-Mills in teoria di gauge, alle equazioni di Seiberg-Witten, ed alle equazioni che definiscono le curve pseudo-olomorfe di Gromov. In ognuno di questi casi è di grande interesse studiare lo spazio delle soluzioni del problema. In questi esempi lo spazio delle soluzioni ha, sotto opportune ipotesi, la struttuta di varietà differenziabile; per il teorema di Sard-Smale il calcolo della dimensione dello spazio delle soluzioni è ricondotto al calcolo dell'indice di un qualche operatore ellittico (il linearizzato dell'operatore non-lineare in questione) ed il teorema di Atiyah-Singer viene proprio utilizzato per dare una formula geometrica per questa dimensione.

References

[1] M. Atiyah. *K-Theory*, Benjamin, New York, 1967.
[2] M. Atiyah e F. Hirzebruch.
[3] M. Atiyah e I. Singer. Bulletin of AMS
[4] M. Atiyah e I. Singer. The index of elliptic operators I. *Annals of Mathematics*
[5] M. Atiyah e I. Singer. The index of elliptic operators III. *Annals of Mathematics*
[6] P. Hilton.
[7] F. Hirzebruch. *Topological methods in Algebraic Geometry.* Springer-Verlag etc.

[8] D. Husemmoler. *Fibre bundles*, GTM Vol. 20, Springer-Verlag, 1975.
[9] J. Milnor. *Morse theory*, Ann. Math. Studies 51, Princeton University Press, Princeton 1963.
[10] J. Milnor e J.D. Stasheff. *Characteristic classes*, Ann. Math. Studies 51, Princeton University Press, Princeton 1974.
[11] N. Reed e B. Simon. *Methods of Modern Mathematical Physics I.* Acad. Press.