Paolo Piazza

Corso di Topologia Algebrica

a.a. 2013-14

Appunti di K-Teoria

Contents

1 Capitolo 1: fibrati vettoriali

1.1 Definizione di fibrato vettoriale.

Definizione 1. Un *fibrato vettoriale* C^∞ di rango k è una terna (E, π, M), dove E e M sono varietà C^∞, $\pi : E \to M$ è un'applicazione C^∞ suriettiva, tale che per ogni $m \in M$

(i) la fibra $E_m = \pi^{-1}(m)$ ha una struttura di spazio vettoriale di dimensione k;

(ii) esiste un intorno U di m e un diffeomorfismo $\varphi_U : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^k$ tale che per ogni $m' \in U$

a) $\varphi_U(E_{m'}) \subseteq \{m'\} \times \mathbb{R}^k$

b) $\varphi_U|_{E_{m'}} : E_{m'} \to \{m'\} \times \mathbb{R}^k$ è un isomorfismo di spazi vettoriali.

La varietà M è detta *base* del fibrato; la varietà E è detta *spazio totale* del fibrato.
Gli intorni U sono detti *intorni banalizzanti*, i diffeomorfismi φ_U *banalizzazioni locali.*
Se per ogni $m \in M$ l'intorno U può essere scelto uguale ad M, il fibrato vettoriale si dice *banale.*

Notazione. Denoteremo spesso il fibrato (E, π, M) con $(E \to M)$, oppure, semplicemente con E.

Definizioni analoghe.

- Fibrati vettoriali nella categoria degli spazi topologici e applicazioni continue.
- Fibrati vettoriali su $\mathbb{C}$.
- Se M ed E sono varietà complesse (quindi le carte $\psi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{C}^n$ hanno valori in $\mathbb{C}^n$ e le funzioni di transizione $\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1} : \psi_\alpha(U_\alpha) \subseteq \mathbb{C}^n \to \psi_\beta(U_\beta) \subseteq \mathbb{C}^n$ sono biolomorfe) allora (E, π, M) è un fibrato vettoriale complesso *olomorfo* se ogni banalizzazione locale $\varphi_U : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{C}^k$ è biolomorfa.

1.2 Funzioni di transizione.

Dalla definizione segue che M ammette un ricoprimento $\{U_\alpha\}$ con intorni banalizzanti, che chiameremo *ricoprimento banalizzante.* Per ogni coppia di aperti U_α, U_β del ricoprimento, con $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, e per ogni $m \in U_\alpha \cap U_\beta$ l'applicazione

$$g_{\alpha\beta}(m) = \varphi_{U_\alpha}|_{E_m} \circ \left(\varphi_{U_\beta}^{-1}\Big|_{\{m\}\times\mathbb{R}^k} \right) :$$
$$\{m\} \times \mathbb{R}^k \to \{m\} \times \mathbb{R}^k$$

è un isomorfismo di spazi vettoriali.
Allora possiamo pensare alle $g_{\alpha\beta}(m)$ come applicazioni

$$g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to GL(k, \mathbb{R}).$$

Queste vengono dette *funzioni di transizione* e verificano due proprietà:
1) $g_{\alpha\alpha}(m) = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^k}\ \forall m \in U_\alpha \cap U_\beta$,

2) $g_{\alpha\beta} \circ g_{\beta\gamma} = g_{\alpha\gamma}$ in $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$.

Se M è una varietà differenziabile e se sono dati un ricoprimento $\{U_\alpha\}$ di M e mappe $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to GL(k, \mathbb{R})$ soddisfacenti le proprietà 1) e 2), allora è possibile definire un fibrato vettoriale (E, π, M) che ammetta le $g_{\alpha\beta}$ come funzioni di transizione. Precisamente, consideriamo l'insieme $\widehat{E}$ ottenuto prendendo l'unione disgiunta di tutti gli intorni $U_\alpha \times \mathbb{R}^k$; introduciamo una relazione d'equivalenza $\mathcal{R}$ in $\widehat{E}$ come segue

$$U_\alpha \times \mathbb{R}^k \ni (x, e)\, \mathcal{R}\, (y, f) \in U_\beta \times \mathbb{R}^k \Leftrightarrow x = y \text{ e } f = g_{\alpha\beta}(x)e$$

Sia E lo spazio quoziente dotato della topologia indotta e sia $\pi : E \to M$ la mappa che associa alla classe d'equivalenza di (x, e) il punto $x \in M$. Non è difficile dimostrare che (E, π, M) ha una naturale struttura di fibrato vettoriale.

Quindi si può dare una definizione alternativa di fibrato vettoriale, come una varietà M su cui siano dati un ricoprimento $\{U_\alpha\}$ e una collezione di mappe differenziabili $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to GL(k, \mathbb{R})$ soddisfacenti le proprietà 1) e 2).

1.3 Morfismi di fibrati.

Definizione 2. Siano (E, π, M) e (F, π', M) due fibrati vettoriali (sulla stessa base). Una *mappa di fibrati* (o un *morfismo di fibrati*) da (E, π, M) a (F, π', M) è un'applicazione differenziabile $f : E \to F$ che manda omomorficamente fibre in fibre corrispondenti, ovvero tale che per ogni $m \in M$

1) $f(E_m) \subseteq F_m$

2) $f|_{E_m} : E_m \to F_m$ è un omomorfismo di spazi vettoriali.

Una mappa di fibrati $f : E \to F$ si dice *isomorfismo di fibrati* se è un diffeomorphismo e manda isomorficamente fibre in fibre corrispondenti, ovvero se per ogni $m \in M$

$$f|_{E_m} : E_m \to F_m$$

è un isomorfismo di spazi vettoriali. Un'analoga definizione vale nel caso topologico (richiederemo semplicemente che f sia continua e, nel caso di un isomorfismo, che sia un omeomorfismo).
Il seguente lemma è di facile dimostrazione (esercizio del *quarto compito a casa*).

Lemma 1. *Siano (E, π_E, M) e (F, π_F, M) due fibrati vettoriali. Sia $f : E \to F$ un morfismo di fibrati e supponiamo che $f|_{E_m}$ sia un isomorfismo per ogni $m \in M$. Allora f è un isomorfismo di fibrati (e cioè f è anche un diffeomorfismo).*

1.4 Esempi notevoli.

Esempio 1. Sia M una varietà differenziabile. Per ogni punto $m \in M$ indichiamo con T_mM lo spazio tangente alla varietà M nel punto m. Poniamo

$$TM = \bigcup_{m \in M} T_mM$$

e definiamo $\pi : TM \to M$ ponendo $\pi(x) = m$ se $x \in T_mM$. Si verifica che (TM, π, M) è un fibrato vettoriale il cui rango è uguale alla dimensione di M. Tale fibrato vettoriale si dice *fibrato tangente* ad M. Per ulteriori informazioni sul fibrato tangente potete consultare [**?**].

Esempio 2. Sia $\mathbb{R}P^n$ lo spazio proiettivo di dimensione n. Ricordiamo che $\mathbb{R}P^n \cong S^n/\sim$, dove $\sim$ è la relazione che identifica i vettori $\underline{x}$ e $-\underline{x}$. Sappiamo che $\mathbb{R}P^n$ è una varietà differenziabile compatta. Consideriamo l'insieme

$$E_1\left(\mathbb{R}^{n+1}\right) = \left\{([\underline{x}], \underline{v}) \in \mathbb{R}P^n \times \mathbb{R}^{n+1} : \underline{v} = \lambda \underline{x}\right\}$$

e l'applicazione $\pi : E_1\left(\mathbb{R}^{n+1}\right) \to \mathbb{R}P^n$ definita da $\pi([\underline{x}], \underline{v}) = [\underline{x}]$. La terna $\left(E_1\left(\mathbb{R}^{n+1}\right), \pi, \mathbb{R}P^n\right)$ è un fibrato vettoriale di rango 1. Facciamo vedere come trovare banalizzazioni locali: per ogni $[\underline{x}] \in \mathbb{R}P^n$, consideriamo U_1, un intorno di $\underline{x}$ in S^n ad intesezione vuota con la sua immagine tramite la mappa antipodale; l'aperto $U = U_1/\sim \subseteq \mathbb{R}P^n$ è un intorno banalizzante di $[\underline{x}]$ e il diffeomorfismo $\varphi_U : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}$ definito da $\varphi_U([\underline{x}], t\underline{x}) = ([\underline{x}], t)$ è una banalizzazione locale.
Analogamente la terna $\left(E_1\left(\mathbb{C}^{n+1}\right), \pi, \mathbb{C}P^n\right)$ è un fibrato vettoriale complesso olomorfo di rango 1.

Esempio 3. Sia $n > k$. Poniamo

$$G_k\left(\mathbb{R}^n\right) = \{\text{sottospazi vettoriali } k\text{−dimensionali di } \mathbb{R}^n\}.$$

Lo spazio $G_k\left(\mathbb{R}^n\right)$ ha una naturale topologia: sia $V_k(\mathbb{R}^n)$ l'aperto di $\mathbb{R}^n \times \times \cdots \times \mathbb{R}^n$ k-volte costituito dalle k-ple di vettori linearmente indipendenti. Esiste una suriezione $\pi : V_k(\mathbb{R}^n) \to G_k(\mathbb{R}^n)$

$$\pi(\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_k) = \operatorname{Span}(\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_k).$$

Dotiamo $G_k(\mathbb{R}^n)$ della topologia quoziente: U è aperto in $G_k(\mathbb{R}^n)$ se e solo se $\pi^{-1}(U)$ è aperto in $V_k(\mathbb{R}^n)$. $G_k(\mathbb{R}^n)$ ha una naturale struttura di varietà differenziabile compatta di dimensione $n(n-k)$. Consideriamo l'insieme

$$E_k\left(\mathbb{R}^n\right) = \left\{(p, \underline{v}) \in G_k\left(\mathbb{R}^n\right) \times \mathbb{R}^n : \underline{v} \in p\right\}$$

e l'applicazione $\pi : E_k\left(\mathbb{R}^n\right) \to G_k\left(\mathbb{R}^n\right)$ definita da $\pi(p, \underline{v}) = p$. La terna $\left(E_k\left(\mathbb{R}^n\right), \pi, G_k\left(\mathbb{R}^n\right)\right)$ è un fibrato vettoriale di rango k e C^∞. Le verifiche di tutte queste affermazioni costituiscono un interessante esercizio. Si noti che per $k = 1$ riotteniamo l'esempio 2.
$G_k\left(\mathbb{R}^n\right)$ è detta la Grassmanniana dei k-piani in $\mathbb{R}^n$. $\left(E_k\left(\mathbb{R}^n\right), \pi, G_k\left(\mathbb{R}^n\right)\right)$ è detto *fibrato universale* sulla Grassmanniana.

Esempio 4. Analogamente lo spazio $G_k\left(\mathbb{C}^n\right)$ è una varietà complessa compatta di dimensione complessa $n(n-k)$ e la terna $\left(E_n\left(\mathbb{C}^n\right), \pi, G_k\left(\mathbb{C}^n\right)\right)$ è un fibrato vettoriale complesso olomorfo di rango k, detto *fibrato universale* su $G_k(\mathbb{C}^n)$.

Osservazioni.
1. Se $T \in GL(n, \mathbb{C})$ allora T induce un'applicazione $T_\sharp : G_k(\mathbb{C}^n) \to G_k(\mathbb{C}^n)$, che è un diffeomorfismo.
2. C'è un'applicazione naturale

$$\psi : G_k(\mathbb{C}^n) \to G_{n-k}(\mathbb{C}^n) \tag{1}$$

ottenuta mandando V in $V^\perp$. Quest'applicazione è un diffeomorfismo.
3. Alcuni autori definiscono la Grassmanniana $G_k(\mathbb{C}^n)$ come l'insieme dei sottospazi di *codimensione* k in $\mathbb{C}^n$. Le due definizioni sono compatibili tramite l'applicazione ψ in (1).

1.5 Sezioni di un fibrato.

Definizione 3. Sia (E, π, M) un fibrato vettoriale. Una *sezione* C^∞ del fibrato è un'appl. differenziabile $s : M \to E$ tale che $\pi \circ s = \mathrm{Id}|_M$ ovvero tale che per ogni $m \in M$ risulti $s(m) \in E_m = \pi^{-1}(m)$.

Denotiamo con $C^\infty(M, E)$ l'insieme delle sezioni C^∞ del fibrato (E, π, M). Si noti che, poiché ogni fibra è una spazio vettoriale, anche $C^\infty(M, E)$ è uno spazio vettoriale, le cui operazioni sono definite punto per punto. Notiamo anche che $C^\infty(M, E)$ ha una naturale struttura di $C^\infty(M)$-mudulo.

Proposizione 1. *Un fibrato vettoriale (E, π, M) di rango k è banale se e solo se esistono k sezioni C^∞ $s_1, ..., s_k$ linearmente indipendenti, ovvero tali che $s_1(m), ..., s_k(m)$ siano linearmente indipendenti per ogni $m \in M$.*

Dimostrazione.
$\boxed{\Rightarrow}$ Supponiamo (E, π, M) banale. Allora esiste una mappa di fibrati $\Phi : E \to M \times \mathbb{R}^k$ che induce un isomorfismo $\Phi : E_m \to \{m\} \times \mathbb{R}^k$ su ogni fibra. Sia $\Psi = \Phi^{-1} : M \times \mathbb{R}^k \to E$ e definiamo le applicazioni $s_i : M \to E$ ponendo $s_i(m) = \Psi(m, \underline{e}_i)$ (dove $\underline{e}_i$ è l'i -simo vettore canonico di $\mathbb{R}^k$). Le applicazioni $s_1, ..., s_k$ sono sezioni C^∞ e per costruzione sono linearmente indipendenti.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supponiamo che esistano k sezioni C^∞ $s_1, ..., s_k$ linearmente indipendenti. Definiamo $\Psi : M \times \mathbb{R}^k \to E$ ponendo $\Psi(m, \underline{x}) = x^1 s_1(m) + ... + x^k s_k(m)$. L'applicazione Ψ è C^∞ e induce un isomorfismo su ogni fibra. Allora non è difficile vedere, questo è il Lemma 1, che Ψ è un diffeomorfismo. Quindi (E, π, M) è banale. $\square$

Osservazione. Notiamo che la dimostrazione stabilisce l'esistenza *locale* di k sezioni linearmente indipendenti su ogni aperto banalizzante. Si dice che queste sezioni costituiscono una **base locale**.

Esempio. Il fibrato $\left(E_1\left(\mathbb{R}^{n+1}\right), \pi, \mathbb{R}P^n\right)$ non è banale.

Dimostrazione. Basta far vedere che ogni $s \in C^\infty\left(\mathbb{R}P^n, E_1\left(\mathbb{R}^{n+1}\right)\right)$ si annulla in un punto. Sia $s : \mathbb{R}P^n \to E_1\left(\mathbb{R}^{n+1}\right)$ una sezione. Sia $p : S^n \to \mathbb{R}P^n$ la proiezione canonica. L'applicazione $q = s \circ p : S^n \to E_1\left(\mathbb{R}^{n+1}\right)$ è tale che $q(\underline{x}) = ([\underline{x}], t(\underline{x})\underline{x})$, con $t \in C^\infty(S^n)$. Inoltre, poiché $q(-\underline{x}) = q(\underline{x})$, si deve avere $t(-\underline{x}) = -t(\underline{x})$. Allora, poiché S^n è connessa e in particolare $t \in C^0(S^n)$, deve esistere $\underline{x}_0 \in S_n$ tale che $t(\underline{x}_0) = 0$, ovvero tale che $s([\underline{x}_0]) = ([\underline{x}_0], \underline{0})$. $\square$

Possiamo dare anche una definizione alternativa di sezione. Sia (E, π, M) un fibrato vettoriale, con ricoprimento $\{U_\alpha\}$ e funzioni di transizione $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to GL(k, \mathbb{R})$. Una *sezione* C^∞ del fibrato è allora una collezione $\{s_\alpha\}$ di mappe $s_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}^k$ differenziabili tali che per ogni coppia di aperti U_α e U_β non disgiunti e per ogni $m \in U_\alpha \cap U_\beta$ risulti

$$s_\alpha(m) = g_{\alpha\beta}(m)\, s_\beta(m).$$

Le due definizioni sono equivalenti come ora mostreremo.
Sia s una sezione C^∞ (nel senso della prima definizione). Occorre verificare che esiste una collezione $\{s_\alpha\}$ di mappe che soddisfa le condizioni richieste nella seconda definizione. Sia $m \in M$ e siano U_α un intorno di m banalizzante e φ_α una banalizzazione locale su U_α. Se $\underline{e}_1, ..., \underline{e}_k$ sono i vettori della base canonica di $\mathbb{R}^n$, $\varphi_\alpha^{-1}(m, \underline{e}_1), ..., \varphi_\alpha^{-1}(m, \underline{e}_k)$ sono una base di E_m. Quindi esistono k numeri, che chiamo

$$s_\alpha^1(m), ..., s_\alpha^k(m)$$

tali che

$$s(m) = \sum_{i=1}^{k} s_\alpha^i(m)\, \varphi_\alpha^{-1}(m, \underline{e}_i).$$

Allora, considerando la restrizione di s a $U_\alpha \cap U_\beta$, si ha

$$s|_{U_\alpha \cap U_\beta} = \sum_{i=1}^{k} s_\alpha^i(m)\, \varphi_\alpha^{-1}(m, \underline{e}_i) = \sum_{i=1}^{k} s_\beta^i(m)\, \varphi_\beta^{-1}(m, \underline{e}_i).$$

Applicando φ_α al secondo e terzo membro, si ha

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k} s_\alpha^i\,(m)\,\underline{e}_i &= \sum_{i=1}^{k} s_\beta^i\,(m)\left(\varphi_\alpha\circ\varphi_\beta^{-1}\right)(m,\underline{e}_i) = \\
&= \sum_{i=1}^{k} s_\beta^i\,(m)\,g_{\alpha\beta}\,(m)\,(\underline{e}_i) = \\
&= \sum_{i=1}^{k} s_\beta^i\,(m)\,(g_{\alpha\beta}\,(m))_i^j\,\left(\underline{e}_j\right).
\end{aligned}$$

dove l'indice in basso in $(g_{\alpha\beta}\,(m))_i^j$ è l'indice di colonna.

Quindi

$$s_\alpha^k\,(m) = s_\beta^i\,(m)\,(g_{\alpha\beta}\,(m))_i^k\,,$$

Allora, ponendo $s_\alpha = \left(s_\alpha^1, ..., s_\alpha^k\right)^t$, si ottiene

$$s_\alpha = g_{\alpha\beta}\,s_\beta.$$

Quindi la collezione $\{s_\alpha\}$ soddisfa le condizioni richieste nella seconda definizione.
Il viceversa è chiaro: se sono date le $\{s_\alpha\}$ e le banalizzazioni, allora possiamo definire una sezione globale s (scrivete i dettagli per esercizio).

1.6 Operazioni sui fibrati. Funtori continui.

Dati 2 fibrati su M (E, π^E, M), (F, π^F, M) si possono definire i fibrati

$$E^*\,,\quad E\otimes F\,,\quad E\oplus F\,,\quad \Lambda^n E\,,\quad \mathrm{Hom}(E,F)\equiv E\otimes F^*$$

a partire dalle corrispondenti operazioni sulle fibre. Ad esempio, poniamo

$$E\oplus F := \cup_{m\in M} E_m\oplus F_m\,;$$

rimane allora definito il fibrato $(E\oplus F, \pi^{E\oplus F}, M)$ che per costruzione ha come fibre $(\pi^{E\oplus F})^{-1}(m) = E_m \oplus F_m$. La banalità locale è ereditata da quella di E ed F: per ipotesi $\forall m\in M$ esistono aperti U^E , U^F e diffeomorfismi locali

$$\begin{aligned}
\phi^E &: (\pi^E)^{-1}(U^E)\to U^E\times\mathbb{R}^k\\
\phi^F &: (\pi^F)^{-1}(U^F)\to U^F\times\mathbb{R}^n
\end{aligned}$$

con cui si costruisce il diffeomorfismo

$$\phi^{E\oplus F} : (\pi^{E\oplus F})^{-1}(U^E\cap U^F)\to U^E\cap U^F\times\mathbb{R}^{k+n}$$

che dà la banalizzazione di $E\oplus F$. Potete produrre voi i dettagli, non è difficile.

Osservazione 1. *Consideriamo un morfismo di fibrati $f : E\to F$. È allora chiaro che f definise in maniera naturale una sezione $s_f\in C^\infty(M, \mathrm{Hom}(E,F))$: basterà porre $s_f(m) := f|_{E_m}$. Supponiamo che $m_0\in M$ sia tale che $s_f(m_0)\in \mathrm{Iso}(E_{m_0}, F_{m_0})$, allora esiste un intorno aperto di m_0, U, tale che $s_f(m)\in\mathrm{Iso}(E_m,F_m)$ $\forall m\in U$ (per la dimostrazione basterà considerare un intorno banalizzante di m_0 ed utilizzare il fatto che $GL(k,\mathbb{R})$ è aperto in $M_{k\times k}(\mathbb{R})$).*

Più in generale, sia $\mathbf{V}$ la categoria degli spazi vettoriali + applicazioni lineari e consideriamo, in generale, un funtore $\mathbf{T}$ dalla categoria $\mathbf{V}$ in se stessa. Ad esempio $\mathbf{T}(E) = E^*$, il duale, e se $\phi : E \to F$, allora $T(\phi) = \phi^*$, la trasposta di ϕ. Questo è un funtore controvariante. Possiamo anche considerare funtori covarianti, ad esempio, $T(E) = \Lambda^k E$, $T(\phi) = \Lambda^k \phi$, opppure, più in generale. funtori di più variabili

$$\mathbf{T} : \mathbf{V} \times \cdots \mathbf{V} \to \mathbf{V}$$

covarianti in alcune variabili e controvarianti in altre. Ad esempio, $T(E, F) = E \otimes F$, $T(\phi, \psi) = \phi \otimes \psi$. Per fissare le idee consideriamo un funtore covariante di una sola variabile. Diremo che questo funtore è *continuo* se la corrispondenza

$$\mathrm{Hom}(E, F) \ni \phi \longrightarrow T(\phi) \in \mathrm{Hom}(T(E), T(F))$$

è continua per ogni E, $F \in \mathbf{V}$. Questa nozione ha senso, dato che $\mathrm{Hom}(E, F)$ ha una naturale topologia per ogni coppia di spazi vettoriali.

Sia $\mathbf{T} : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ un funtore covariante continuo e sia (E, π, X) un fibrato vettoriale. Sia $T(E) := \cup_{x \in X} T(E_x)$ e sia $\pi_T : T(E) \to X$ la suriezione indotta da π. Sia $\phi : E \to F$ una mappa di fibrati su X, allora possiamo definire una mappa $T(\phi) : T(E) \to T(F)$ ponendo $T(\phi)|_{T(E_x)} := T(\phi|_{E_x})$.

Proposizione 2. *La terna $(T(E), \pi_T, X)$ ha una naturale struttura di fibrato vettoriale tale che se $\phi : E \to F$ è una mappa di fibrati, allora $T(\phi) : T(E) \to T(F)$ è anche una mappa di fibrati .*

È ovvio che $T(\phi)$ dipende in maniera funtoriale da ϕ. La proposizione si dimostra considerando prima fibrati prodotto, poi fibrati banali ed infine fibrati generali; in quest'ultimo caso si lavora sulle banalizzazioni locali. Se siete interessati ai dettagli potete trovarli in [1] oppure in [10].

1.7 Fibrato indotto da un'applicazione (pull-back).

Sia $f : N \to M$ un'applicazione tra le varietà differenziabili M ed N e sia (E, π, M) un fibrato su M. Si consideri l'insieme

$$f^*E = \{(n, v) \in N \times E | f(n) = \pi(v)\}.$$

Utilizzando il fatto che $f^*E = \Phi^{-1}(\Delta)$, con Δ la diagonale in $M \times M$ e $\Phi(n, v) := (f(n), \pi(v))$, si dimostra che f^*E è una sottovarietà di $N \times E$ e che ha, quindi, una naturale struttura di varietà differenziabile (si veda ad esempio il libro di Warner, " Foundations of Differentiable manifolds and Lie Groups", theorem 1.39). Esistono due applicazioni naturali $\hat{f}$ e π^{ind}:

$$\hat{f} : f^*E \to E \text{ con } \hat{f}(n, v) = v$$

$$\pi^{ind} : f^*E \to N \text{ con } \pi^{ind}(n, v) = n$$

(f^*E, π^{ind}, N) ha una naturale struttura di fibrato vettoriale; esso è, per definizione, il *fibrato indotto da f su N*. La fibra di f^*E su n è $E_{f(n)}$, come segue subito dalla definizione; quindi $(f^*E)_n$ ha una struttura di spazio vettoriale per ogni $n \in N$.

Facciamo vedere la banalità locale:

sia U un intorno banalizzante di M; $f^{-1}(U)$ è allora un aperto di N e si ponga $f^{-1}(U) = \tilde{U}$. Sia

$$\psi : U \times \mathbb{R}^k \to \pi^{-1}(U)$$

una banalizzazione di $\pi^{-1}(U)$. Si definisca:

$$\tilde{\psi} : \tilde{U} \times \mathbb{R}^k \to (\pi^{ind})^{-1}(\tilde{U})$$

con

$$\tilde{\psi}(n, v) = (n, \psi(f(n), v))$$

Si ha $\pi(\psi(f(n), v)) = f(n)$ come deve essere ed è facile verificare che $\tilde{\psi}$ è un diffeomorfismo, con inversa $\tilde{\psi}^{-1} : (\pi^{ind})^{-1}(\tilde{U}) \to \tilde{U} \times \mathbb{R}^k$ definita da $\tilde{\psi}^{-1}(n, w) = (n, \hat{w})$ con $\psi(n, \hat{w}) = w$.

Osservazioni.
1. Se (E, π, M) è banale e $f : N \to M$ è un'applicazione differenziabile allora il fibrato indotto su N , f^*E, è anche banale.
2. Se $g : Z \to Y$ e $f : Y \to X$ sono due mappe C^∞, allora $(f \circ g)^*E$ è isomorfo a $g^*(f^*E)$: $(f \circ g)^*E \cong g^*(f^*E)$: basterà mandare $(z, e) \in (f \circ g)^*E$ in $(z, (g(z), e)) \in g^*(f^*E)$.
3. Se $i : Y \hookrightarrow X$ è un'inclusione allora $E|_Y \cong i^*E$: basterà mandare $e \in E|_Y$ in $(\pi(e), e)$.
4. Si può dare una definizione di fibrato indotto utilizzando le funzioni di transizione: se $E = \{(U_\alpha, g_{\alpha\beta})\}$, si ponga

$$f^*E = \{(f^{-1}(U_\alpha), g_{\alpha\beta} \circ f)\}.$$

5. Se $f : N \to M$ è una mappa C^∞ allora otteniamo una mappa lineare indotta $f^* : C^\infty(M; E) \to C^\infty(N, f^*E)$ associando a s la sezione f^*s, con $(f^*s)(m) := s(f(m))$.
6. Se $f : N \to M$ è un'applicazione costante, $f(n) = m_0, \forall n \in N$, allora f^*E è banale, perché isomorfo al fibrato banale $N \times E_{m_0}$.

1.8 Il semigruppo $\mathrm{Vect}(X)$. Teorema di omotopia

In questa sottosezione lavoreremo nella categoria degli spazi topologici e funzioni continue.

Definizione 4. Sia X uno spazio topologico compatto di Hausdorff [1]. $\mathrm{Vect}_k(X)$ è per definizione l'insieme delle classi di isomorfismo di fibrati vettoriali *complessi* di rango k. Analogamente si definisce $\mathrm{Vect}_k^{\mathbb{R}}(X)$, le classi di isomorfismo di fibrati vettoriali *reali* di rango k. Poniamo $\mathrm{Vect}(X) = \cup_k \mathrm{Vect}_k(X)$.

È importante notare che $\mathrm{Vect}(X)$ è un *semigruppo* abeliano rispetto all'operazione $\oplus$, con elemento neutro uguale al fibrato banale $X \times \{0\}$. Notiamo anche che se $f : Y \to X$ è continua allora l'operazione di pull-back induce un morfismo di semigruppi $f^* : \mathrm{Vect}(X) \to \mathrm{Vect}(Y)$. Abbiamo quindi definito un funtore $\mathrm{Vect}(\;\;)$ dalla categoria degli spazi topologici compatti e applicazioni continue alla categoria dei semigruppi abeliani e morfismi di semigruppi. Questo funtore risulta essere *omotopico*: questa fatto fondamentale è conseguenza del seguente teorema

Teorema 1. *(di omotopia) Sia Y compatto e siano f_0, f_1, due applicazioni continue $Y \to X$. Sia $(E \to X)$ un fibrato vettoriale su X. Se f_0 è omotopa a f_1, $f_0 \sim f_1$, allora f_0^*E è isomorfo a f_1^*E.*

Il teorema vale nell'ipotesi più generale che Y sia paracompatto.

Dimostrazione.
Sia $\{f_t\}_{t \in [0,1]}$ l'omotopia fra f_0 e f_1. Basta dimostrare che la classe di isomorfismo di f_t^*E è localmente costante in t.
In generale sia $H \to Y \times [0, 1]$ un fibrato; utilizzeremo le notazioni

$$Y \times \{\tau\} := Y_\tau \,, \quad H|_{Y \times \{\tau\}} := H_\tau$$

Sia $s_\tau \in C(Y_\tau, H_\tau)$: allora esiste un'estensione $s \in C(Y \times [0, 1], H)$ tale che $s|_{Y_\tau} = s_\tau$. Dimostriamo questo fatto: sia $x \in Y_\tau$ ed U un intorno di x che sia banalizzante per H; la sezione s_τ ristretta a $Y_\tau \cap U$ può essere considerata come una funzione a valori vettoriali definita su un chiuso di uno spazio topologico normale; per il teorema di Tietze esiste un'estensione $t_U \in C(U, H|_U)$ di s_τ ristretta a $Y_\tau \cap U$. Dato che Y è compatto

[1] **tutti i nostri spazi topologici sono di Hausdorff se non specificato diversamente**

esiste un ricoprimento finito di Y_τ, $\{U_1, \dots, U_m\}$ con U_j aperto, ed estensioni t_j di s_τ ristretta a $Y_\tau \cap U_j$. Sia $\{\phi_j\}$ una partizione dell'unità subordinata al ricoprimento $\{U_1, \dots, U_m\}$. È chiaro che $\phi_j t_j$ ha una naturale estensione ad una sezione in $C(Y \times [0,1, H)$: concludiamo che $\sum_j \phi_j t_j$ è un'estensione cercata.
La stessa identica dimostrazione stabilisce il seguente

Lemma 2. *(di estensione) Sia X uno spazio topologico compatto di Hausdorff e $W \subseteq X$ un sottoinsieme chiuso. Sia $(E \to X)$ un fibrato vettoriale. Allora ogni sezione $s_W : W \to E|_W$ può essere estesa ad una sezione $s \in C(X, E)$.*

La dimostrazione dipende solo dall'esistenza di una partizione dell'unità ed infatti il Lemma vale nell'ipotesi più generale che X sia paracompatto di Hausdorff.
Abbiamo ora bisogno di un altro risultato preliminare:

Lemma 3. *Siano E ed F due fibrati su X, X compatto. Sia $W \subseteq X$ un chiuso e supponiamo che esista un isomorfismo di fibrati $\phi : E|_W \to F|_W$. Allora esiste un aperto $U \supseteq W$ ed un morfismo di fibrati $\Phi : E \to F$ che estende ϕ ed è un isomorfismo su U.*

Dimostrazione. Per l'osservazione 1, l'isomorfismo ϕ definisce in maniera naturale una sezione che chiameremo ancora ϕ del fibrato $\mathrm{Hom}(E, F)$ ristretto a W. Per il Lemma precedente esiste un'estensione Φ di ϕ che definisce quindi un morfismo di fibrati $E \to F$ su tutto X. Dato che $\Phi|_W = \phi$ è un isomorfismo, segue esiste un aperto U contente W tale che $\Phi|_U$ è un isomorfismo.Il lemma è dimostrato.

Possiamo ora concludere la dimostrazione del teorema. Sia $f : Y \times [0,1] \to X$ l'omotopia fra f_0 e f_1, quindi $f(y, \tau) = f_\tau$. Sia $\pi : Y \times [0,1] \to Y$ la proiezione sul primo fattore. Fissiamo $\tau \in [0,1]$ Per le proprietà funtoriali del pull-back è chiaro che i fibrati f^*E e $\pi^* f_\tau^*(E)$ sono isomorfi quando ristretti a Y_τ. Per il lemma appena enunciato sappiamo che questo isomorfismo si estende ad un intorno aperto di Y_τ: quindi, dalla compattezza di Y deduciamo che esiste un $\epsilon > 0$ tale che f^*E e $\pi^* f_\tau^*(E)$ sono isomorfi se ristretti a $Y \times (\tau - \epsilon, \tau + \epsilon)$ e ciò è sufficiente per concludere.

Corollario 1. *Se X ed Y sono due spazi compatti ed $f : Y \to X$ è un'equivalenza omotopica* [2] *allora $f^* : \mathrm{Vect}(X) \to \mathrm{Vect}(Y)$ è un isomorfismo di semigruppi*

Corollario 2. *Se X è contraibile* [3] *allora ogni fibrato E su X è banale ed esiste quindi un isomorfismo di semigruppi* $\mathrm{Vect}(X) \cong \mathbb{N}$.

Infatti, dire che X è contraibile equivale a dire che la mappa identità su X è omotopa alla mappa costante C ad un punto p_0 di X. Ma, come osservato subito prima di questa sottosezione, il pullback tramite una mappa costante è un fibrato banale; il corollario segue allora immediatamente dal teorema di omotopia $(E = (\mathrm{Id}_X)^*E \simeq X \times E_{p_0} \simeq X \times \mathbb{R}^k.)$

1.9 Incollamento di fibrati.

Siano $X = X_1 \cup X_2$ e $X_1 \cap X_2 = A$ (tutti gli spazi essendo compatti). Supponiamo di avere fibrati vettoriali (E_j, π_j, X_j) e supponiamo che esista un *isomorfismo* di fibrati $\phi : E_1|_A \to E_2|_A$.

Definizione 5. Il fibrato ottenuto per incollamento di (E_1, π_1, X) e (E_2, π_2, X) tramite ϕ è il fibrato $(E_1 \cup_\phi E_2 \to X)$ che ha come spazio totale

$$E_1 \cup_\phi E_2 = E_1 \sqcup E_2 / \sim$$

con $e_1 \sim e_2 \ \Leftrightarrow \pi_1(e_1) = \pi_2(e_2) \in A$ e $e_2 = \phi(e_1)$.

[2] esiste $g : X \to Y$ tale che $f \circ g \sim \mathrm{id}_X$ e $g \circ f \sim \mathrm{id}_Y$
[3] e cioè X è omotopicamente equivalente ad un punto

Non è difficile verificare che questa definizione produce effettivamente un fibrato vettoriale su X.

Esempio. Sia $X = S^2$ e sia $X_1 = S^2_+$, un emisfero, e $X_2 = S^2_-$, l'altro emisfero, di modo che $A = S^1$, l'equatore. Siano $E_1 = S^2_+ \times \mathbb{C}$ e $E_2 = S^2_- \times \mathbb{C}$; un isomorfismo $\phi : E_1|_A \to E_2|_A$ è semlicemente un isomorfismo di fibrati banali $\phi : S^1 \times \mathbb{C} \to S^1 \times \mathbb{C}$ ed è quindi dato da un'applicazione continua $\phi : S^1 \to GL(1, \mathbb{C}) = \mathbb{C}^*$. Considerando $\phi_\ell(z) = z^{-\ell}$, $z \in S^1$, otteniamo per incollamento un fibrato complesso di rango 1. Il fibrato dato da $\phi(z) = 1/z$ è detto *fibrato di Hopf.*

Utilizzando argomenti analoghi a quelli utilizzati per dimostrare il teorema di omotopia, si può dimostrare la seguente

Proposizione 3. *La classe di isomorfismo di* $(E_1 \cup_\phi E_2 \to X)$ *dipende solo dalla classe di omotopia di* $\phi : E_1|_A \to E_2|_A$.

Per i dettagli vedere il libro di Atiyah, "K-Theory", dopo la dimostrazione del Lemma 1.4.8.

Sia SX la sospensione (non ridotta) di X: $SX = X \times [0, 1]/\partial[0, 1] \times X$. Siano Z, W due spazi topologici; denotiamo con $[Z, W]$ le classi di omotopia delle applicazioni continue da Z a W.

Proposizione 4. *Sia X uno spazio compatto ed SX la sua sospensione. Allora esiste una biezione*

$$\mathrm{Vect}_k(SX) \leftrightarrow [X, GL(k, \mathbb{C})] \,. \tag{2}$$

Sketch della dimostrazione. È chiaro che $SX = C^+X \cup C^-X$ con

$$C^+X = [0, 1/2] \times X/\{0\} \times X \qquad \text{e} \qquad C^-X = [1/2, 1] \times X/\{1\} \times X$$

(sono due coni su X). È anche chiaro che $X = C^+X \cap C^-X$.
Un'applicazione $X \to GL(k, \mathbb{C})$ definisce un isomorfismo di fibrati $\phi : X \times \mathbb{C}^k \to X \times \mathbb{C}^k$ e quindi, per incollamento di due fibrati banali sui due coni, un fibrato su SX e quindi un elemento in $\mathrm{Vect}_k(SX)$. La proposizione precedente ci assicura che quest'applicazione è ben definita.
D'altra pate ogni fibrato E di rango k su SX definisce per restrizione un fibrato su ciascun cono. I coni sono però contraibili e quindi questi fibrati sono banali (Corollario 2 di questa lezione). Siano $\alpha^\pm$ queste due banalizzazioni; pensiamo a X come alla base dei due coni. Allora $\alpha^+|_X \circ (\alpha^-)|_X^{-1} : X \times \mathbb{C}^k \to X \times \mathbb{C}^k$ è un isomorfismo di fibrati e corrisponde ad un'applicazione $X \to GL(k, \mathbb{C})$. Associando ad E quest'applicazione $X \to GL(k, \mathbb{C})$ si definisce l'inversa dell'applicazione data dall'incollamento.

Esempio È chiaro che $S^2 = S(S^1)$ e quindi $\mathrm{Vect}_1(S^2) = [S^1, GL(1, \mathbb{C})] = \pi_1(\mathbb{C}^*) = \pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$. In particolare *esistono infiniti fibrati di rango 1 non isomorfi sulla sfera.* Analogamente si hanno le biezioni di insiemi

$$\mathrm{Vect}_k(S^2) = [S^1, GL(k, \mathbb{C})] \equiv \pi_1(GL(k, \mathbb{C})) = \pi_1(U(k)) = \mathbb{Z}$$

dove la terza uguaglianza segue dal fatto che $U(k)$ è un retratto di deformazione di $GL(k, \mathbb{C})$ [4] e la quarta uguaglianza segue dall'isomorfismo $\pi_1(U(j) \cong \pi_1(U(j + 1)) \, \forall j \geq 1$. Quest'ultimo isomorfismo segue dalla successione esatta lunga dei gruppi di omotopia associata alla fibrazione naturale $U(j) \to U(j+1) \to S^{2j+1} \subset \mathbb{R}^{2(j+1)} = \mathbb{C}^{j+1}$ con l'ultima mappa uguale all'applicazione che manda una matrice nel suo primo vettore colonna.

Vale la pena osservare che la stessa fibrazione può essere utilizzata per dimostrare più in generale che

$$\pi_i(U(j)) \simeq \pi_i(U(j + 1)) \,, \quad \pi_i(SU(j)) \simeq \pi_i(SU(j + 1)) \; \forall i \leq 2j - 1 \,. \tag{3}$$

[4] Applicare Gram-Schmidt per definire una retrazione $r : GL(k, \mathbb{C}) \to U(k)$, e cioè un'applicazione tale che $r \circ i = \mathrm{id}_{U(k)}$. Quest'applicazione è di fatto un'equivalenza omotopica: non ci soffermiamo sui dettagli ma è chiaro che basta procedere induttivamente, pensate ad esempio al caso $k = 2$ e come sia possibile deformare con continuità la mappa r che ortonormalizza due vettori all'identità su quei due vettori.

Induttivamente

$$\pi_i(U(j)) \simeq \pi_i(U(j+q))\,, \quad \pi_i(SU(j)) \simeq \pi_i(SU(j+q))\ \forall i \leq 2j-1\,, \forall q\,. \tag{4}$$

Ad esempio

$$\pi_3(SU(2)) \simeq \pi_3(SU(3)) \tag{5}$$

Sia $U(\infty) = \cup_k U(k)$. Utilizzando l'inclusione naturale $U(j) \to U(j+\ell)$,

$$U(j) \ni A \to \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I_{\ell\times\ell} \end{pmatrix} \in U(j+\ell)\,,$$

vediamo che $U(\infty)$ ha una naturale struttura di gruppo. Dotiamo $U(\infty)$ della topologia del limite induttivo. Allora, per quanto appena visto

$$\pi_i(U(j)) \simeq \pi_i(U(\infty))\,, \quad \forall i \leq 2j-1 \tag{6}$$

1.10 Collassamento di un fibrato.

Avremo bisogno di definire una ulteriore operazione su un fibrato, il collassamento.
Sia Y un chiuso in X e sia (E, π_E, X) un fibrato di rango k su X. Supponiamo di avere una banalizzazione di $E|_Y$ e cioè un isomorfismo di fibrati

$$\alpha : E|_Y \to Y \times V \tag{7}$$

con V spazio vettoriale di dimensione k. Possiamo allora definire un fibrato $(E/\alpha \longrightarrow X/Y)$ come segue: sia $p : Y \times V \to V$ la proiezione naturale, definiamo E/α come $E/\sim$ con

$$e \sim e' \Leftrightarrow e, e' \in E|_Y \ \text{ e } \ p(\alpha(e)) = p(\alpha(e'))\,.$$

Notiamo che questa relazione d'equivalenza è l'identità fuori da $E|_Y$. Otteniamo in questo modo una collezione di spazi vettoriali su X/Y e l'unica cosa da verificare e la banalità locale in un intorno di Y/Y. Ma questo è chiaro: sappiamo infatti che α può essere esteso ad un isomorfismo $\alpha_U : E|_U \to U \times V$ e questo isomorfismo induce una banalizzazione di E/α in un intorno di Y/Y.

È facile vedere, utilizzando il teorema di omotopia, che la classe d'isomorfismo di $E/\alpha \to X/Y$ dipende solo dalla classe di omotopia di α.

Inoltre, se Y è contraibile allora l'applicazione $p : X \to X/Y$ induce una *biezione*

$$p^* : \mathrm{Vect}(X/Y) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Vect}(X)$$

con inversa data proprio dal collassamento di un fibrato rispetto ad una qualsiasi banalizzazione su Y (tale banalizzazione esiste sempre dato che Y è contraibile e due banalizzazioni sono necessariamente omotope).

1.11 Il teorema di classificazione.

Consideriamo la Grassmanniana $G_k(\mathbb{C}^n)$. Ci si può giustamente domandare perché i fibrati $(E_k(\mathbb{C}^n), \pi, G_k(\mathbb{C}^n))$ sono detti *universali.* Osserviamo preliminarmente che se consideriamo l'inclusione naturale di $\mathbb{C}^n$ in $\mathbb{C}^{n+j}$, $(z_1, \ldots, z_n) \to (z_1, \ldots, z_n, 0, \ldots, 0)$, allora rimane definita in maniera naturale una mappa $j_{n,n+j} : G_k(\mathbb{C}^n) \to G_k(\mathbb{C}^{n+j})$. È chiaro che $j^*_{n,n+j}(E_k(\mathbb{C}^{n+j})) \simeq E_k(\mathbb{C}^n)$.

Si ha il seguente notevole

Teorema 2. *Sia X uno spazio compatto e sia (E, π, X) un fibrato vettoriale complesso di rango k. Allora esiste $m \geq k$ ed un'applicazione continua $f : X \to G_k(\mathbb{C}^m)$ tale che $f^*E_k(\mathbb{C}^m) \simeq E$.*
Se (E, π, X) ammette n intorni banalizzanti, allora possiamo scegliere $m = nk$.

Detto a parole, ogni fibrato vettoriale è il pull-back tramite un'applicazione continua di un fibrato universale su una Grassmanniana. L'applicazione $f : X \to G_k(\mathbb{C}^m)$ che costruiremo nel corso della dimostrazione del teorema 2 è detta *applicazione classificante* per E. Osserviamo che se $f : X \to G_k(\mathbb{C}^m)$ è classificante per E, allora $j_{m,m+j} \circ f : X \to G_k(\mathbb{C}^{m+j})$ è anche classificante per E (basta applicare le proprietà del fibrato indotto).
Come sono collegate due applicazioni classificanti ? La risposta è data dal seguente

Teorema 3. *Sia X uno spazio compatto e siano $f_0 : X \to G_k(\mathbb{C}^m)$, $f_1 : X \to G_k(\mathbb{C}^\ell)$ due applicazioni continue.*
Supponiamo che $f_0^*E_k(\mathbb{C}^m) \simeq f_1^*E_k(\mathbb{C}^\ell)$; allora $j_{m,m+\ell} \circ f_0 : X \to G_k(\mathbb{C}^{m+\ell})$ è omotopa a $j_{\ell,m+\ell} \circ f_1 : X \to G_k(\mathbb{C}^{m+\ell})$:

$$j_{m,m+\ell} \circ f_0 \sim j_{\ell,m+\ell} \circ f_1 \tag{8}$$

Corollario 3. *(Teorema di classificazione) Supponiamo che X ammetta un ricoprimento costituito da n intorni contraibili (ad esempio X è una varietà differenziabile compatta). Allora esiste una biezione*

$$\mathrm{Vect}_k(X) \leftrightarrow [X, G_k(\mathbb{C}^{2nk})] \tag{9}$$

Il corollario è una conseguenza diretta dei due teoremi: ogni fibrato su X ammette gli intorni di cui nell'enunciato come intorni banalizzanti (perché abbiamo visto che un fibrato su uno spazio contraibile è banale) . Sia $f \in [X, G_k(\mathbb{C}^{2nk})]$; allora posssiamo associare ad f la classe di isomorfismo del fibrato $f^*E_k(\mathbb{C}^{2nk})$. L'applicazione è ben definita per il Teorema di omotopia. L'inversa di quest'applicazione si ottiene assegnando ad un fibrato E l'applicazione classificante $j_{nk,2nk} \circ f$, con $f : X \to G_k(\mathbb{C}^{nk})$ l'applicazione classificante per E di cui nel teorema 2. Per il teorema 3 quest'applicazione è ben definita ed è l'inversa dell'applicazione $[X, G_k(\mathbb{C}^{2nk})] \ni f \to f^*E_k(\mathbb{C}^{2nk})$.

Per una varietà compatta X che ammetta un ricoprimento di n-intorni contraibili, la Grassmanniana $G_k(\mathbb{C}^{2nk})$ è detto uno **spazio classificante**.

1.12 Preliminari su sottofibrati, morfismi iniettivi/suriettivi, successioni di fibrati.

Per dimostrare il teorema abbiamo bisogni di alcuni **preliminari** che hanno, comunque, un loro interesse.

Definizione 6.
1) Sia (E, π, X) un fibrato vettoriale di rango k. Un sottoinsieme $G \subseteq E$ è un sottofibrato se $(G, \pi|_G, X)$ è un fibrato vettoriale.
2) Siano (E, π_E, X), (F, π_F, X) due fibrati. Un morfismo di fibrati $\phi : F \to E$ è un *monomorfismo* (*epimorfismo*) se $\forall x \in X$ $\phi_x := \phi|_{F_x}$ è iniettiva (suriettiva).

Se F è un sottofibrato di E allora $i : F \hookrightarrow E$ è un monomorfismo. Viceversa:

Proposizione 5. *Se $\phi : F \to E$ è un monomorfismo di fibrati, allora $\phi(F)$ è un sottofibrato di E.*

Dimostrazione. Il problema è locale; possiamo allora supporre che $F = X \times V'$ e $E = X \times V$. Fissiamo $x \in X$ e sia W_x un complementare di $\phi_x(V')$ in V: $V \equiv E_x = W_x \oplus \phi_x(V')$. Sia $G = X \times W_x$; questo è ovviamente un sottofibrato di $E\,(= X \times V)$; denotiamo con $i : G \to E$ l'inclusione naturale. Sia $\theta : F \oplus G \to E$ il morfismo di fibrati definito da $\theta(f \oplus g) = \phi(g) + i(g)$. È chiaro che θ_x è un isomorfismo. Esiste allora un intorno U di x in X tale che $\theta_U := \theta|_U$ è un isomorfismo. Ma allora $\theta_U(F|_U)$ è un sottofibrato di $\theta_U((F \oplus G)|_U) = E|_U$ (visto che $F|_U$ è un sottofibrato di $(F \oplus G)|_U$). D'altra parte $\theta_U(F|_U) = \phi_U(F|_U) \equiv \phi(F)|_U$. Ne segue che $\phi(F)$ è un sottofibrato.

Osservazioni.

1. Notare che l'argomento appena fornito può anche essere utilizzato per dimostrare che per ogni morfismo $\phi : F \to E$ di fibrati, l'insieme $\{x \in X \mid \phi_x$ è un monomorfismo $\}$ è aperto in X.

2. Notiamo anche che un sottofibrato F di E è localmente un addendo diretto di E; ne segue che $E/F := \cup_{x\in X} E_x/F_x$ ha una naturale struttura di fibrato vettoriale, detto *fibrato quoziente*.

Argomenti simili a quelli utilizzati per dimostrare l'ultima proposizione (congiuntamente all'Osservazione 1) mostrano anche la seguente

Proposizione 6. *Siano $(F \to X)$ e $(E \to X)$ due fibrati e $\phi : F \to E$ un morfismo di fibrati. Supponiamo che* $\dim \mathrm{Ker}(\phi_x)$ *sia costante in x. Allora*

$$\mathrm{Ker}\phi := \cup_{x\in X} \mathrm{Ker}(\phi_x)\,, \quad \mathrm{Im}\phi := \cup_{x\in X} \mathrm{Im}(\phi_x)\,, \quad \mathrm{coker}\phi := \cup_{x\in X} \mathrm{coker}(\phi_x)$$

sono fibrati vettoriali su X.

È anche importante poter parlare di una metrica su un fibrato $(E \to X)$; questa è una famiglia continua di metriche $h(x)$ su E_x. Più precisamente una metrica h su $(E \to X)$ è una sezione continua del fibrato $\mathrm{Herm}(E)$ delle forme hermitiane su E tale che $h(x)$ sia definita positiva $\forall x \in X$. Localmente una metrica esiste sempre; basta utilizzare una banalizzazione. Per mezzo di una partizione dell'unità possiamo mettere insieme queste metriche locali e definire una metrica h su tutto il fibrato $(E \to X)$. I dettagli sono classici e potete trovarli nel libro di Atiyah.

Sia F un sottofibrato di E e sia h una metrica su E. Definiamo

$$F^\perp := \cup_{x\in X} (F_x)^\perp\,.$$

Non è difficile dimostrare che $F^\perp$ è un sottofibrato di E.

Definizione 7. Siano $(E^j \to X)$ fibrati su X e $\alpha^j : E^j \to E^{j-1}$ morfismi di fibrati. La successione di fibrati e morfismi

$$\cdots \to E^{j-1} \xrightarrow{\alpha_{j-1}} E^j \xrightarrow{\alpha_j} E^{j+1} \to \cdots$$

è esatta se $\forall x \in X$ la successione indotta sulle fibre su x

$$\cdots \to E_x^{j-1} \to E_x^j \to E_x^{j+1} \to \cdots$$

è esatta.

Proposizione 7. *Sia*

$$0 \to E^0 \xrightarrow{\alpha^0} E \xrightarrow{\alpha} E^1 \xrightarrow{\alpha^1} 0$$

una successione esatta corta di fibrati. Allora $E \simeq E^0 \oplus E^1$.

Dimostrazione. E^0 è isomorfo a $\alpha^0(E^0)$ dato che α^0 è un monomorfismo. D'altra parte, sia h una metrica in E; allora $E \simeq \alpha^0(E^0) \oplus (\alpha^0(E^0))^\perp$ e, chiaramente, $(\alpha^0(E^0))^\perp \simeq E/\alpha^0(E^0)$ che per l'esattezza è uguale a $E/\mathrm{Ker}\alpha$ che è isomorfo a E^1, di nuovo per l'esattezza. Segue la tesi.

Esempio. Sia (E, π, X) un fibrato di rango k su X. Supponiamo che esista un epimorfismo di fibrati $\phi : X \times \mathbb{C}^m \to E$ per $m \geq k$. La dimensione di $\mathrm{Ker}(\phi_x)$ è allora costante e quindi, per la Proposizione 6, $\mathrm{Ker}\phi$ è un sottofibrato. Abbiamo una ovvia successione corta di fibrati

$$0 \to \mathrm{Ker}\phi \hookrightarrow X \times \mathbb{C}^m \xrightarrow{\phi} E \to 0$$

e quindi, per quanto appena visto, un isomorfismo

$$X \times \mathbb{C}^m \simeq E \oplus \mathrm{Ker}\phi \tag{10}$$

Una tale suriezione esiste sempre se X è compatto:

Lemma 4. *Sia (E, π, X) un fibrato di rango k su X e supponiamo che esistano n intorni banalizzanti. Allora esiste un epimorfismo di fibrati*

$$\phi : X \times \mathbb{C}^{kn} \to E\,.$$

Dimostrazione. Basta vedere che esiste un sottospazio V di $C(X, E)$ di dimensione kn tale che l'applicazione naturale $X \times V \to E$ definita da

$$X \times V \ni (x, s) \to s(x) \in E_x$$

sia suriettiva per ogni $x \in X$. Su un fissato intorno banalizzante U_j possiamo risolvere il problema dato che esistono k sezioni linearmente indipendenti. Sia $\{f_i\}$ una partizione dell'unità subordinata a $\{U_i\}_{i=1}^n$. Estendiamo queste k sezioni utilizzando f_j e otteniamo un sottospazio di dimensione k, sia esso V_j, in $C(X, E)$. Ora consideriamo $V = V_1 \oplus \cdots V_n \subset C(X, E)$. Non è difficile verificare che V ha la proprietà richiesta.

Questo lemma ha delle notevoli conseguenze. Innanzitutto otteniamo la seguente

Proposizione 8. *Sia X compatto e sia (E, π, X) un fibrato su X. Supponiamo che E ammetta n intorni banalizzanti. Allora esiste un fibrato F tale che $E \oplus F = X \times \mathbb{C}^{kn}$.*

Una seconda importante applicazione è la dimostrazione del teorema di classificazione, che vediamo nella prossima sottosezione.

1.13 Dimostrazione teorema di classificazione.

Il Lemma 4 ci consente di fatto di costruire la mappa classificante. Infatti se $\phi : X \times \mathbb{C}^{kn} \to E$ è la suriezione di cui nel Lemma 4, allora $\mathrm{Ker}\phi$ è un sottofibrato di rango $nk - k$, con $k = \mathrm{rango}E$. L'applicazione

$$X \ni x \xrightarrow{f} (\mathrm{Ker}\phi_x)^\perp \in G_k(\mathbb{C}^{kn}) \tag{11}$$

è allora continua e $f^*(E_k(\mathbb{C}^{kn})) \simeq E$. Per dimostrare quest'ultimo punto ricordiamo che

$$f^*(E_k(\mathbb{C}^{nk})) = \{(x, (V, \underline{v})) \in X \times E_k(\mathbb{C}^{nk})\,,\ \underline{v} \in V \mid f(x) = V\}$$

Sia $e \in E$ ed $x = \pi_E(x)$. Sappiamo che esiste $\underline{v} \in \mathbb{C}^{kn}$ tale che $\phi(x, \underline{v}) = e$ Definiamo

$$\beta : E \to f^*(E_k(\mathbb{C}^{nk}))$$

associando a $e \in E$ l'elemento $(x, ((\ker \phi_x)^\perp, \underline{v}))$. Questo è l'isomorfismo cercato. Lo sketch della dimostrazione del Teorema 2 è ora completo. La dimostrazione del Teorema 3 non è difficile ma la omettiamo. Si veda il libro di Atiyah (nelle pieghe della dimostrazione del teorema di classificazione si dimostra anche il Teorema 3).

1.14 Il teorema di classificazione per spazi paracompatti.

Se X è paracompatto non sarà possibile in generale trovare un numero finito di intorni banalizzanti. In questo caso più generale si può ancora trovare uno spazio classificante.

Sia $\mathbb{C}^\infty$ lo spazio vettoriale delle successioni di numeri complessi

$$(z_1, \dots, z_n, \dots)$$

con $z_j \neq 0$ soltanto per un numero finito di indici. C'è un'inclusione naturale di $\mathbb{C}^j$ in $\mathbb{C}^\infty$ e una successione di inclusioni $\cdots \subset \mathbb{C}^k \subset \mathbb{C}^{k+1} \subset \cdots$.
Possiamo dotare $\mathbb{C}^\infty$ di una topologia: U è aperto in $\mathbb{C}^\infty$ se e solo se $U \cap \mathbb{C}^k$ è aperto in $\mathbb{C}^k$ $\forall k$. Si dice in questo caso che $\mathbb{C}^\infty$ ha la topologia del limite diretto.

Definizione 8. La Grassmanniana $G_k(\mathbb{C}^\infty)$ è l'insieme dei k-sottospazi vettoriali di $\mathbb{C}^\infty$ con la topologia del limite diretto indotta dalle inclusioni

$$\cdots \subset G_k(\mathbb{C}^j) \subset G_k(\mathbb{C}^{j+1}) \subset \dots$$

Il fibrato universale $E_k(\mathbb{C}^\infty)$ è uguale a

$$E_k(\mathbb{C}^\infty) := \{(V, \underline{v}) \in G_k(\mathbb{C}^\infty) \times \mathbb{C}^\infty \mid \underline{v} \in V\}$$

dotato della topologia indotta dalla topologia prodotto.

Proposizione 9. *$(E_k(\mathbb{C}^\infty) \to G_k(\mathbb{C}^\infty))$ è un fibrato vettoriale di rango k.*

La dimostrazione non è difficile, modulo qualche risultato tecnico sugli spazi paracompatti. Il seguente teorema si dimostra in maniera analoga ai teoremi 2, 3 della lezione precedente:

Teorema 4. *Sia X uno spazio paracompatto e (E, π, X) un fibrato di rango k su X. Allora esiste un'applicazione continua*

$$f : X \to G_k(\mathbb{C}^\infty)$$

tale che $E \simeq f^* E_k(\mathbb{C}^\infty)$.
Se $g : X \to G_k(\mathbb{C}^\infty)$ è un'altra applicazione con questa proprietà allora $f \sim g$.

Corollario 4. *Sia X uno spazio paracompatto. Allora esiste una biezione*

$$\mathrm{Vect}_k(X) \leftrightarrow [X, G_k(\mathbb{C}^\infty)]$$

Per ulteriori dettagli si consulti [10] oppure [8].

2 Capitolo 2: K-Teoria

2.1 Definizione del gruppo di K-teoria e prime proprietà.

La corrispondenza $X \to \text{Vect}(X)$ definisce un *funtore omotopico controvariante* dalla categoria degli spazi topologici compatti + applicazioni continue [5] alla categoria dei semigruppi abeliani + morfismi di semigruppi.

Dato un semigruppo A è possibile definire in maniera naturale un gruppo $K(A)$ ed un omomorfismo di semigruppi

$$\alpha : A \to K(A)$$

in modo tale che se G è un gruppo e $\gamma : A \to G$ è un morfismo di semigruppi *allora* esiste un'unico morfismo di gruppi

$$\kappa : K(A) \to G$$

tale che $\kappa \circ \alpha = \gamma$. Il gruppo $K(A)$ è detto gruppo di Grothendieck associato al semigruppo.

Essendo la soluzione di un problema universale, se un tale gruppo esiste allora deve essere unico. Per quel che concerne l'esistenza consideriamo $A \times A$ ed introduciamo la seguente relazione di equivalenza:

$$(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow \exists u \in A \,|\, a + d + u = b + c + u \tag{12}$$

È facile verificare che trattasi effettivamente di una relazione di equivalenza.

$A \times A/\sim$ è un gruppo abeliano con l' operazione di somma indotta da quella di A; l'elemento neutro è uguale alla classe di equivalenza di (a, a), denotata $[a, a]$, e l'inverso di $[a, b]$ è semplicemente $[b, a]$. Definiamo

$$K(A) := A \times A/\sim \quad \text{e} \quad \alpha : A \to K(A)\ ,\ \alpha(a) = [a, 0].$$

Se G è un gruppo e $\gamma : A \to G$ un morfismo di semigruppi allora definiamo $\kappa : K(A) \to G$ tramite $\kappa[a, b] = \gamma(a) - \gamma(b)$. κ è ben definito ed è l'unico omomorfismo di gruppi tale che $\kappa \circ \alpha = \gamma$

Notiamo che la corrispondenza appena definita è funtoriale covariante: se B è un semigruppo, $K(B)$ il suo gruppo di Grothendieck con morfismo $\beta : B \to K(B)$ e se $h : A \to B$ è un morfismo di semigruppi allora possiamo definire un'applicazione $k(h) : K(A) \to K(B)$ tramite $k(h)[a, b] = [h(a), h(b)]$. Questo è un morfismo di gruppi ed è tale che $\beta \circ h = k(h) \circ \alpha$.

Definizione 9. Sia X uno spazio topologico compatto. Il gruppo di K-teoria associato a X è il gruppo abeliano $K(X) := K(\text{Vect}(X))$.

Abbiamo definito un **funtore omotopico controvariante** *dalla categoria degli spazi topologici compatti + applicazioni continue alla categoria dei gruppi abeliani + morfismi di gruppi.*

Denotiamo la classe di equivalenza $[E, F]$ di una coppia (di classi di isomorfismo) di fibrati tramite la differenza formale $[E] - [F]$.

Osservazioni.

0. È chiaro che se X è un punto p allora $K(p) = \mathbb{Z}$ (infatti $\text{Vect}(p) = \mathbb{N}$ e $K(\mathbb{N}) = \mathbb{Z}$).

1. $K(X)$ è di fatto un **anello commutativo unitario**, con operazione indotta dal prodotto tensoriale di due fibrati e unità uguale a $[X \times \mathbb{C}]$. In generale denotiamo il fibrato prodotto $X \times \mathbb{C}^N$ con il simbolo $\mathbf{I}^N$.

2. Ogni $\lambda = [E] - [F] \in K(X)$ può essere scritto nella forma $\lambda = [H] - [\mathbf{I}^m]$ per un opportuno $m \in \mathbb{N}$. Infatti, come conseguenza del Lemma 4, abbiamo visto che per ogni fibrato F su X esiste un fibrato F' tale che $F \oplus F' \simeq X \times \mathbb{C}^m := \mathbf{I}^m$. Si ha allora

$$\lambda = [E] - [F] = [E \oplus F'] - [F \oplus F'] = [H] - [\mathbf{I}^m] \text{ con } H = E \oplus F'.$$

[5] oppure, più in generale, la categoria degli spazi paracompatti

3. Notiamo che $\lambda = [E] - [F] = 0$ in $K(X)$ allora esiste G tale che $E \oplus G = F \oplus G$ in $\mathrm{Vect}(X)$. Se G' è tale che $G \oplus G' = \mathbf{I}^m$ allora $E \oplus \mathbf{I}^m = F \oplus \mathbf{I}^m$.

Definizione 10. Due fibrati E ed F sono *stabilmente equivalenti* se esistono fibrati banali $\mathbf{I}^n$, $\mathbf{I}^m$ tali che

$$E \oplus \mathbf{I}^m \simeq F \oplus \mathbf{I}^n .$$

Quindi se $[E] = [F]$ in $K(X)$ allora E ed F sono stabilmente equivalenti.

Definizione 11. Sia X uno spazio con punto base p e sia $i : p \hookrightarrow X$ l'inclusione: definiamo $\widetilde{K}(X) = \mathrm{Ker}(i^* : K(X) \to K(p))$. Il sottogruppo $\widetilde{K}(X)$ è per definizione il gruppo di K-teoria *ridotta* di X.

$\widetilde{K}(X)$ è costituito dalle differenze formali $[E] - [F]$ di fibrati che hanno lo stesso rango su p [6]; infatti tramite l'isomorfismo $K(p) = \mathbb{Z}$ è chiaro che $i^*([E] - [F]) = \dim(E_p) - \dim(F_p)$. È ovvio che la mappa di proiezione $c : X \to p$ induce un morfismo $c^* : K(p) \to K(X)$ tale che $i^* \circ c^* = \mathrm{id}_{K(p)}$. Ne segue che i^* è suriettiva e che c^* è iniettiva. Otteniamo una successione esatta corta

$$0 \to \widetilde{K}(X) \to K(X) \to K(p) \to 0 \ ,$$

e l'applicazione iniettiva c^* induce un isomorfismo $K(X) \simeq \widetilde{K}(X) \oplus K(p) \simeq \widetilde{K}(X) \oplus \mathbb{Z}$.

2.2 Equivalenza stabile.

Sia X compatto. Consideriamo il semigruppo $\mathrm{Vect}(X)$ ed introduciamo la seguente relazione di equivalenza: $E \sim_s F \Leftrightarrow E$ è stabilmente equivalente a F; più esplicitamente

$$E \sim_s F \ \Leftrightarrow \ \exists\, \mathbf{I}^n , \mathbf{I}^m \mid E \oplus \mathbf{I}^m \simeq F \oplus \mathbf{I}^n .$$

Proposizione 10. $\mathrm{Vect}(X)/\sim_s$ *è un gruppo abeliano ed è isomorfo a* $\widetilde{K}(X)$.

Dimostrazione. Denotiamo con $\{E\}_s$ la classe di equivalenza stabile di un fibrato. L'operazione di somma è sempre data dalla somma diretta di due fibrati. L'elemento neutro è $\{X \times \{0\}\}_s = \{\mathbf{I}^\ell\}_s$ e l'inverso di $\{E\}_s$ è $\{E'\}_s$ tale che $E \oplus E' \simeq \mathbf{I}^m$. È ora immediato verificare che $\mathrm{Vect}(X)/\sim_s$ è un gruppo abeliano.
Verifichiamo che è isomorfo a $\widetilde{K}(X)$. Possiamo supporre che X sia connesso (altrimenti lavoriamo separatamente su ogni componente connessa).
C'è un morfismo naturale di semigruppi $\gamma : \mathrm{Vect}(X) \to \mathrm{Vect}(X)/\sim_s$; dato che $\mathrm{Vect}(X)/\sim_s$ è un gruppo ne segue, per universalità, che esiste un unico morfismo di gruppi $\kappa : \widetilde{K}(X) \to \mathrm{Vect}(X)/\sim_s$ tale che $\kappa \circ \alpha = \gamma$, con $\alpha : \mathrm{Vect}(X) \to K(X)$, $\alpha(E) = [E]$. Ogni elemento $[E] - [F] \in K(X)$ può essere scritto come $[H] - [\mathbf{I}^n]$ e κ è dato esplicitamente da $\kappa([H] - [\mathbf{I}^n]) = \{H\}_s$, come subito si verifica. Basta allora dimostrare che la restrizione di κ a $\widetilde{K}(X)$ è un isomomorfismo. La suriettività è ovvia: se $\{E\}_s$ è un elemento di $\mathrm{Vect}(X)/\sim_s$ allora $\{E\}_s = \kappa([E] - \mathbf{I}^{\mathrm{rg}E})$ ed è chiaro che $[E] - \mathbf{I}^{\mathrm{rgE}})$ è un elemento di $\widetilde{K}(X)$. Supponiamo ora che $\kappa([H] - [\mathbf{I}^{\mathrm{rg}H}]) = \{X \times \{0\}\}$. Ciò vuol dire che $\{H\}_s$ è stabilmente equivalente al fibrato nullo e quindi esistono $\mathbf{I}^\ell$, $\mathbf{I}^m$ tali che $H \oplus \mathbf{I}^\ell \simeq \mathbf{I}^m$ e sarà necessariamente $m = \mathrm{rg}H + \ell$. Ma allora $([H] - [\mathbf{I}^{\mathrm{rg}H}]) = ([H \oplus \mathbf{I}^\ell] - [\mathbf{I}^{\mathrm{rg}H} \oplus \mathbf{I}^\ell]) = [\mathbf{I}^m] - [\mathbf{I}^m] = 0$ come volevasi dimostrare.

Osservazione. Notare che l'inversa di κ è l'applicazione $\mathrm{Vect}(X)/\sim_s \to \widetilde{K}(X)$ che associa ad $\{E\}_s$ la classe $[E] - [\mathbf{I}^{\mathrm{rg}E}]$.

[6] Se X è connesso allora $\widetilde{K}(X)$ è costituito dalle differenze formali $[E] - [F]$ di fibrati che hanno lo stesso rango.

2.3 Successione esatta in K-teoria.

Consideriamo le seguenti categorie

- **Com** := spazi topologici compatti e applicazioni continue.
- **Com2** := coppie di spazi compatti (X, Y), $Y \subset X$, e applicazioni continue $f : X \to X'$ tali che $f(Y) \subset Y'$.
- **Com+** := spazi compatti con punto base e applicazioni continue che preservano i punti base.

Sono definiti i seguenti funtori naturali:

- **Com2** $\longrightarrow$ **Com+**
- **Com** $\longrightarrow$ **Com2**

Il primo funtore associa alla coppia (X, Y) lo spazio X/Y con punto base Y/Y. Se $Y = \emptyset$ definiamo $X/Y = X^+$, con X^+ che denota l'unione disgiunta di X e di un punto.
Il secondo funtore associa a X la coppia $(X, \emptyset)$

Osserviamo innanzitutto che se $X \in$ **Com+**, con punto base p, allora $\widetilde{K}(X) := \mathrm{Ker}(i^* : K(X) \to K(p))$ definisce un funtore su **Com+** a valori nei gruppi abeliani.

Definizione 12. Se $(X, Y) \in$ **Com2** poniamo $K(X, Y) := \widetilde{K}(X/Y)$.

Notiamo che se $Y = \emptyset$ allora, per definizione, $K(X, Y) = \widetilde{K}(X^+) = K(X)$. La nostra definizione è quindi un'estensione di quella data per elementi in **Com**.

Sia (X, Y) una coppia di spazi compatti. Le inclusioni $i : Y \to X$ (o, equivalentemente, $i : (Y, \emptyset) \to (X, \emptyset)$) e $j : (X, \emptyset) \to (X, Y)$ inducono omomorfismi:

$$j^* : K(X, Y) \to K(X)\,, \quad i^* : K(Y) \to K(X)\,.$$

Proposizione 11. *La successione*

$$K(X, Y) \to K(X) \to K(Y) \tag{13}$$

è esatta

Dimostrazione della Proposizione 11. Utilizzeremo l'operazione di collassamento. Il fatto che $\mathrm{Im} j^* \subset \mathrm{Ker} i^*$ è chiaro. Infatti $i^* j^* = (j \circ i)^*$ e $j \circ i = g \circ f$ con $f : (Y, \emptyset) \to (Y, Y)$ e $g : (Y, Y) \to (X, Y)$; dato che $K(Y, Y)$ è banale segue che $i^* j^* = 0$
Sia ora $\zeta \in \mathrm{Ker} i^*$, $\zeta = [E] - [\mathbf{1}^n]$ per qualche n. Dato che per ipotesi $i^* \zeta = 0$ ne segue che esiste $m \in \mathbb{N}$ ed un isomorfismo

$$\alpha : E|_Y \oplus \mathbf{1}^m \longrightarrow Y \times \mathbb{C}^{n+m}\,.$$

Consideriamo $(E \oplus \mathbf{1}^m \longrightarrow X)$; allora è ben definito il collassato di questo fibrato tramite α, $E \oplus \mathbf{1}^m/\alpha \longrightarrow X/Y$. La classe $\eta := [E \oplus \mathbf{1}^m/\alpha] - [\mathbf{1}^{n+m}] \in \widetilde{K}(X/Y) = K(X, Y)$ ed ha immagine ζ tramite j^*. Quindi $\mathrm{Im} j^* = \mathrm{Ker} i^*$ e la proposizione è dimostrata.
La dimostrazione del seguente corollario è classica:

Corollario 5. *Sia Y un sottospazio chiuso di uno spazio compatto X, sia $i : Y \hookrightarrow X$ l'inclusione e sia $r : X \to Y$ una retrazione: $r \circ i = \mathrm{id}_Y$. Allora esiste una successione esatta corta:*

$$0 \longrightarrow K(X, Y) \to K(X) \to K(Y) \to 0$$

indotta da $j : (X, \emptyset) \to (X, Y)$ e $i : Y \hookrightarrow X$. Tale successione esatta corta spezza; in particolare $K(X) \simeq K(X, Y) \oplus K(Y)$.

Notiamo anche che se $(X,Y) \in \mathbf{Com2}$ e $Y \in \mathbf{Com+}$ (e quindi anche $X \in \mathbf{Com+}$) allora la successione

$$K(X,Y) \to \widetilde{K}(X) \to \widetilde{K}(Y) \tag{14}$$

è esatta.

Vi faccio osservare infine che se $Y \subset X$ è contraibile allora

$$\widetilde{K}(X) \simeq K(X,Y),.$$

2.4 Sospensione

Sia X uno spazio compatto e sia SX la sua sospensione. Consideriamo il gruppo $[X, U(\infty)]$, dove la struttura di gruppo è indotta da quella del gruppo $U(\infty)$. C'è una naturale mappa di insiemi

$$[X, U(\infty)] \to \widetilde{K}(SX) \tag{15}$$

ottenuta associando a $A \in [X, U(N)]$ la classe $[E_A] - [\mathbf{1}^N] \in \widetilde{K}(SX)$, con E_A l'incollamento definito da A. Vi rimando alla Proposizione 4 per la definizione di questa mappa. Non è difficile dimostrare, e ve lo lascio come esercizio, che questa mappa è ben definita ed è un *isomorfismo di gruppi*. Suggerimento: utilizzate la seguente osservazione:
se $A, B \in GL(k,\mathbb{C})$ allora la curva di matrici in $GL(2k,\mathbb{C})$ definita da

$$C_t := \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1_k & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

per $t \in [0, \pi/2]$, unisce

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \begin{pmatrix} AB & 0 \\ 0 & 1_k \end{pmatrix}.$$

In particolare, ricordando che $\pi_0(U(\infty)) = 0$ e $\pi_1(U(\infty)) = \mathbb{Z}$ otteniamo

$$\widetilde{K}(S^1) = 0 \qquad \widetilde{K}(S^2) = \mathbb{Z}.$$

2.5 Successione esatta lunga.

Abbiamo definito la sospensione non ridotta di un elemento $X \in \mathbf{Com}$, SX, come il quoziente $(I \times X)/(\partial I \times X)$. Se $X \in \mathbf{Com+}$ si può definire la sospensione ridotta $\Sigma X \in \mathbf{Com+}$, è lo spazio ottenuto da SX collassando ad un punto $I \times \{x_0\}$. Equivalentemente

$$\Sigma X := (S^1 \times X)/(S^1 \vee X) =: S^1 \wedge X$$

dove in S^1 fissiamo un qualsiasi punto base. A destra c' è la definizione di *smash product* di S^1 e X; il prodotto *smash* è un'operazione che può essere definita per ogni coppia di spazi $X, Y \in \mathbf{Com+}$.
È ovvio che si può definire la sospensione (ridotta) k-ma, $k \in \mathbb{N}$, iterando k volte questa operazione; denotiamo lo spazio risultante con $\Sigma^k X$.

Sia ora $(X,Y) \in \mathbf{Com2}$. Cominciamo con l'osservare che essendo il cono CY contraibile, si ha un isomorfismo $\gamma : \widetilde{K}(X \cup CY) \to K(X,Y)$. Inoltre esiste un isomorfismo $\lambda : \widetilde{K}(\Sigma Y) \to \widetilde{K}(CY/Y) = \widetilde{K}(SY)$, percheé ΣY è ottenuto da SY contraendo un intervallo. Infine, c' è un isomorfismo $\nu : K(CY,Y) \to K(X \cup CY, X)$ perché esiste un omeomorfismo $(X \cup CY)/Y \simeq CY/Y$. Consideriamo quindi $\eta : \widetilde{K}(\Sigma Y) \to$

$K(X \cup CY, X)$, $\eta = \nu \circ \lambda$. La mappa quoziente $X \cup CY \to (X \cup CY)/X$ induce un omomorfismo δ' : $K(X \cup CY, X) \to \widetilde{K}(X \cup CY)$. Definiamo

$$\delta : \widetilde{K}(\Sigma Y) \to K(X,Y)\,, \quad \delta := \gamma \circ \delta' \circ \eta\,.$$

Definizione 13. Per $k \in \mathbb{N}$ poniamo

$$\widetilde{K}^{-k}(X) := \widetilde{K}(\Sigma^k X)\,, \quad \widetilde{K}^{-k}(X,Y) := \widetilde{K}(\Sigma^k(X/Y))$$

dove $X \in \mathbf{Com+}$ e $(X,Y) \in \mathbf{Com2}$. Se $X \in \mathbf{Com}$ poniamo $K^{-k}(X) := \widetilde{K}(\Sigma^k(X^+))$.

Proposizione 12. *Sia* $(X,Y) \in \mathbf{Com2}$. *Si ha una successione esatta, infinita verso sinistra,*

$$\cdots K^{-k}(Y) \xrightarrow{\delta} K^{-k+1}(X,Y) \xrightarrow{j^*} K^{-k+1}(X) \xrightarrow{i^*} K^{-k+1}(Y) \cdots$$

$$\cdots K^{-1}(Y) \xrightarrow{\delta} K^{0}(X,Y) \xrightarrow{j^*} K^{0}(X) \xrightarrow{i^*} K^{0}(Y)$$

Per la dimostrazione vi rimando al libro di Atiyah, Prop. 2.4.4, oppure al libro di Hatcher ("Vector bundles and K-theory").

3 Capitolo 3 : Operatori di Fredholm e K-teoria. Teorema di Atiyah-Jänich.

3.1 Operatori di Fredholm.

Sia H uno spazio di Hilbert complesso separabile. Denotiamo con $\mathcal{L}(H)$ l'algebra di Banach delle applicazioni lineari continue con la norma operatoriale. Gli elementi invertibili in quest'algebra formano un insieme aperto $\mathcal{L}^\times(H)$ in $\mathcal{L}(H)$ che è, ovviamente, un gruppo. Il teorema dell'applicazione aperta implica che se $T \in \mathcal{L}(H)$ è una biezione allora $T^{-1} \in \mathcal{L}(H)$ e quindi $T \in \mathcal{L}^\times(H)$.
Analogamente possiamo definire $\mathcal{L}(H_1, H_2)$ per una coppia di spazi di Hilbert e $\mathcal{L}^\times(H_1, H_2)$ che risulta, anche in questa caso, aperto.

Definizione 14. Un operatore $T \in \mathcal{L}(H)$ è di Fredholm se $\operatorname{Ker} T$ e $\operatorname{coker} T := H/\operatorname{Im} T$ sono di dimensione finita. In tal caso si definisce l'indice di T come

$$\operatorname{ind} T = \dim \operatorname{Ker} T - \dim \operatorname{coker} T\,.$$

Denotiamo con $\mathcal{F}(H) \equiv \mathcal{F}$ l'insieme degli operatori di Fredholm in $\mathcal{L}(H)$. Dato che $\dim \ker(ST) \leq \dim \operatorname{Ker} S + \dim \operatorname{Ker} T$ e dato che $\dim \operatorname{coker}(ST) \leq \dim \operatorname{coker} S + \dim \operatorname{coker} T$, vediamo che $\mathcal{F}$ è un semi-gruppo, con elemento neutro uguale all'identità.

3.2 Proprietà degli operatori di Fredholm.

1. $\operatorname{Im} T$ è chiuso. Infatti T induce un'applicazione lineare continua iniettiva

$$H/\operatorname{Ker} T \longrightarrow \operatorname{Im} T.$$

Sia W un complementare di codimensione finita per Im T: $W \oplus \operatorname{Im} T = H$. Possiamo definire un operatore

$$\psi_T : H/\operatorname{Ker} T \oplus W \to H$$

associando a $[h] \oplus w$ l'elemento $Th + w$. Quest'applicazione ψ_T è un isomorfismo di spazi vettoriali ed è continua. Per il teorema dell'applicazione aperta ne segue che porta chiusi in chiusi, in particolare $\psi_T(H/\operatorname{Ker} T) = T(H)$ è chiuso in H. Quindi Im T è chiuso.
Essendo $(\text{Im } T)^{\perp} = \operatorname{Ker} T^*$ ne segue che Im $T = (\operatorname{Ker} T^*)^{\perp}$ e quindi

$$\operatorname{ind} T = \dim \operatorname{Ker} T - \dim \operatorname{Ker} T^* \tag{16}$$

In particolare, un operatore autoaggiunto di Fredholm ha indice uguale a zero.

2. $\operatorname{ind}(ST) = \operatorname{ind}(S) + \operatorname{ind}(T)$

3. Sia $\mathcal{K}(H)$ l'ideale degli operatori compatti. Se $C \in \mathcal{K}(H)$ allora $\operatorname{Id}_H + C$ è di Fredholm e $\operatorname{ind}(\operatorname{Id}_H + C) = 0$ [7].

4. $T \in \mathcal{F} \Leftrightarrow T$ è invertibile modulo $\mathcal{K}$ (e cioè esiste $S \in \mathcal{L}(H)$ tale che $(TS - \operatorname{Id}_H) \in \mathcal{K}$ e $(ST - \operatorname{Id}_H) \in \mathcal{K}$). [8]

5. Se $C \in \mathcal{K}$ e $T \in \mathcal{F}$ allora $T + C \in \mathcal{F}$ e $\operatorname{ind}(T + C) = \operatorname{ind}(T)$

6. $\mathcal{F}$ è aperto in $\mathcal{H}$; $\operatorname{ind} : \mathcal{F} \to \mathbb{Z}$ è localmente costante ed induce una biezione

$$\operatorname{ind} : \pi_0(\mathcal{F}) \to \mathbb{Z}\,.$$

In particolare $\operatorname{ind} T_0 = \operatorname{ind} T_1$ se e solo se esiste un cammino continuo $(T(t))_{t\in[0,1]} \in \mathcal{F}$, tale che $T(0) = T_0$ e $T(1) = T_1$
Il fatto che $T_0 \sim T_1$ (T_0 omotopo a T_1 in $\mathcal{F}$) implichi che $\operatorname{ind} T_0 = \operatorname{ind} T_1$ è noto come *invarianza pe omotopia dell'indice.*

3.3 Il Teorema di Atiyah-Jänich.

Consideriamo uno spazio topologico compatto X ed un'applicazione continua $T : X \to \mathcal{F}$. L'applicazione T è anche chiamata una *famiglia continua di operatori di Fredholm parametrizzata da* X. Si scrive anche $T = \{T_x\}_{x\in X}$, con $T_x := T(x)$.
Famiglie continue di operatori di Fredholm appaiono in maniera naturale in molti campi della Matematica e della Fisica Teorica.
Consideriamo il semigruppo $[X, \mathcal{F}]$ delle classi di omotopia di applicazioni continue da X in $\mathcal{F}$. L'elemento neutro di questo semigruppo è rappresentato l'applicazione costante $x \to \operatorname{Id}_H$.
Il nostro obiettivo è illustrare il seguente notevole **Teorema di Atiyah-Jänich**:

[7] C è compatto se l'immagine tramite C di una successione limitata ammette una sottosucessione convergente.

[8] Questa proprietà è anche nota come teorema di Atkinson. Ci dice che $\mathcal{F} = \pi^{-1}\left((\mathcal{L}(H)/\mathcal{K}(H))^{\times}\right)$ con $\pi{:}\mathcal{L}(H) \to (\mathcal{L}(H)/\mathcal{K}(H))$ la proiezione canonica. L'algebra $\mathcal{L}(H)/\mathcal{K}(H)$ è detta algebra di Calkin e la conclusione è che gli operatori di Fredholm sono l'immagine inversa, tramite la proiezione canonica, degli invertibili dell'algebra di Calkin.

Teorema 5. *Esiste un morfismo di semigruppi*

$$\text{Ind} : [X, \mathcal{F}] \to K(X) \tag{17}$$

che è una biezione. Inoltre se $f : Y \to X$ *è continua allora* $\text{Ind}\,(T \circ f) = f^*\text{Ind}\,T \in K(Y)$.

In particolare $[X, \mathcal{F}]$ è un gruppo abeliano e $\mathcal{F}$ è uno *spazio classificante* per la K-teoria. Il teorema ci dice anche che l'ostruzione a deformare una famiglia continua di operatori di Fredholm nella famiglia banale $\{(\text{Id}_H)_x\}$ è misurata da una classe di K-teoria associata alla famiglia $T = \{T_x\}$.

Sketch della dimostrazione.

Vogliamo definire la *classe indice* $\text{Ind}\,T \in K(X)$ di un'applicazione continua $T : X \to \mathcal{F}$ di cui nell'enunciato del teorema.

Preambolo euristico. Se T_x fosse iniettiva $\forall x$, e quindi ker $T_x = \{0\}$, allora necessariamente $\text{coker}\,T_x$ avrebbe dimensione costante [9] e potremmo quindi considerare

$$\text{coker}\,T = \cup_{x \in X} \text{coker} T_x := \cup_{x \in X} H/T_x(H)\,.$$

Una volta dimostrato che questo è effettivamente un fibrato vettoriale, potremmo definire $\text{Ind}\,T = -[\text{coker}T] \in K(X)$. Questa definizione è del tutto naturale ma ha, ovviamente, lo svantaggio di fare una richiesta irragionevole, i.e. che $\text{Ker}\,T_x = \{0\}\ \forall x$. L'idea alla base della definizione di classe indice è la seguente: a patto di prendere la restrizione di T_x ad un sottospazio $V \subset H$ "un pó più piccolo" di H, e cioè ad un sottospazio V di codimensione finita, possiamo sempre ridurci al caso iniettivo. Vediamo come si possa realizzare quest'idea.

Lemma 5. *Sia* $T_0 \in \mathcal{F}$ *e sia* $V \subset H$ *chiuso di codimensione finita tale che* $V \cap \text{Ker}T_0 = \{0\}$ [10].
Allora esiste un intorno $\mathcal{U}$ *di* T_0 *in* $\mathcal{L}(H)$ *tale che* $\forall T \in \mathcal{U}$
(i) $V \cap \text{Ker}\,T = \{0\}$
(ii) $H/T(H) \simeq (T_0V)^\perp\ \forall T \in \mathcal{U}$.
(iii) $\cup_{T \in \mathcal{U}} H/T(V)$ *è isomorfo al fibrato banale* $\mathcal{U} \times W$ *con* $W = (T_0V)^\perp$.

Dimostrazione del lemma. Consideriamo $W = (T_0V)^\perp$. È chiaro che $\dim W < \infty$ [11]. Definiamo

$$\phi_T : V \oplus W \to H$$

mandando $v \oplus w$ nel vettore $Tv + w \in H$. La corrispondenza

$$\mathcal{L}(H) \ni T \longrightarrow \phi_T \in \mathcal{L}(V \oplus W, H)$$

è continua (ma non è lineare). Inoltre ϕ_{T_0} è un isomorfismo. Ma allora esiste un intorno $\mathcal{U}$ di T_0 in $\mathcal{L}(H)$ tale che ϕ_T è un isomorfismo $\forall T \in \mathcal{U}$. Le proprietà (i), (ii), (iii) sono allora chiare.

Come corollario di questo Lemma vediamo che $\mathcal{F}$ *è aperto* in $\mathcal{L}(H)$ (si veda la proprietà **6** del paragrafo precedente).

Torniamo alla costruzione della classe di indice. Il passo fondamentale è dato dal seguente

Lemma 6. *Sia* $T : X \to \mathcal{F}$ *continua. Allora esiste* $V \subset H$ *chiuso di codimensione finita tale che*
(i) ker $T_x \cap V = \{0\}\ \forall x \in X$.
(ii) $\cup_{x \in X} H/T_x(V)$ *è un fibrato vettoriale su* X.

[9] Infatti T_x è di Fredholm $\forall x$ e dalla proprietà **6** degli operatori di Fredholm segue che $\text{ind}\,T_x = \dim \text{Ker}\,T_x - \dim \text{coker}\,T_x = 0 - \dim \text{coker}\,T_x$ è costante. Quindi $\dim \text{coker}\,T_x$ ha dimensione costante

[10] Ad esempio $V = (\text{Ker}T_0)^\perp$.

[11] infatti per come abbiamo scelto V sappiamo che $T_0 : V \to T_0(V)$ è una biezione; quindi $\dim W \equiv \dim (T_0V)^\perp = \dim\, H/T_0(V) = \dim H/V$ che è finito per come è stato scelto V

Dimostrazione. Per ogni $x \in X$ consideriamo $V_x := (\operatorname{Ker} T_x)^{\perp}$. Sia $\mathcal{U}_x \subset \mathcal{F}$ l'intorno di cui al precedente lemma. Sia $U_x \subset X$, $U_x = T^{-1}(\mathcal{U}_x)$. Dalla compattezza di X segue che esiste un sottoricoprimento finito $U_1, U_2, \ldots, U_n$ corrispondente ad intorni $\mathcal{U}_{x_1}, \ldots, \mathcal{U}_{x_n}$ in $\mathcal{F}$. Sia $V = V_{x_1} \cap \ldots \cap V_{x_n}$. Utilizzando il Lemma precedente è chiar che V soddisfa le due proprietà dell'enunciato.

Denotiamo il fibrato $\cup_{x \in X} H/T_x(V)$ con il simbolo H/TV. Denotiamo con H/V il fibrato banale $X \times (H/V)$ di rango uguale alla codimensione di V. Potremmo essere tentati di definire la classe indice come $-[H/TV]$; occorre però tener conto del fatto che ci siamo restritti ad un sottospazio V di H. La seguente definizione è quindi molto naturale:

Definizione 15. Sia $T : X \to \mathcal{F}$ continua. Allora

$$\operatorname{Ind} T := [H/V] - [H/TV] \in K(X)$$

La dimostrazione del Teorema di Atiyah-Jänich segue allora dalle seguenti 5 proprietà:

1. $\operatorname{Ind} T$ non dipende dalla scelta di V. (Questa proprietà è stata vista a lezione.)
2. Se T è omotopa a S allora $\operatorname{Ind} T = \operatorname{Ind} S$ in $K(X)$. (Questa proprietà è chiara dall'invarianza per omotopia del gruppo di K-teoria.)
3. $\operatorname{Ind}(TS) = \operatorname{Ind} T + \operatorname{Ind} S$
4. la successione di semigruppi $[X, \mathcal{L}^{\times}(H)] \to [X, \mathcal{F}] \to K(X) \to 0$ è esatta. (La prima applicazione è indotta dall'inclusione $\mathcal{L}^{\times}(H) \subset \mathcal{F}$.)
5. Il gruppo $[X, \mathcal{L}^{\times}(H)]$ è banale (Teorema di Kuiper).

Osservazioni.
1. La funtorialità rispetto alle applicazioni continue $f : Y \to X$ è chiara: una scelta di sottospazio V per T va bene anche per $T \circ f$.
2. Se $x \in X$ e $i : x \to X$ è l'inclusione, allora è facile vedere che $i^*(\operatorname{Ind} T) = \operatorname{ind} T_x$. D'altra parte $i^*(\operatorname{Ind} T)$ è il rango virtuale di $[H/V] - [H/TV]$, e cioè la differenza dei ranghi dei fibrati H/V e H/TV. Gli operatori T_x hanno quindi tutti lo stesso indice *numerico*. Questo era chiaro dalla proprietà **6** enunciata nel paragrafo precedente che qui però non abbiamo utilizzato.
3. Le proprietà (2) e (3) qui sopra eneunciate dimostrano in particolare l'invarianza per omotopia dell'indice numerico degli operatori di Fredholm e il fatto che $\operatorname{ind}(TS) = \operatorname{ind} T + \operatorname{ind} S$.

4 Capitolo 4 : Teorema di periodicità di Bott e sue conseguenze.

4.1 Spazi localmente compatti. Prodotti in K-teoria.

Abbiamo dato la definizione del gruppo $K(X)$ per X uno spazio compatto (di Hausdorff). Possiamo estendere questa definizione come segue:

Definizione 16. Sia X *localmente compatto*. Il gruppo di K-teoria a supporto compatto di X è definito come
$$K_c(X) := \widetilde{K}(X^+)$$
con $X^+ = (X \sqcup +)$ che denota la compattificazione ad un punto di X.

Esempio. Si ha chiaramente
$$K_c(\mathbb{R}^n) = \widetilde{K}(S^n)$$

Notazione: spesso utilizzeremo un'unica notazione, $K(\ )$, per la K-teoria di uno spazio topologico, con l'intesa che se X è localmente compatto, allora $K(X)$ denota la K-teoria a supporto compatto di X e cioè $\widetilde{K}(X^+)$

Se Y ed X sono due spazi compatti, allora esiste un prodotto esterno
$$\mu : K(X) \otimes K(Y) \longrightarrow K(X \times Y) \tag{18}$$
definito da $\mu([E_X] \otimes [F_Y]) := [\pi_1^*(E_X) \otimes \pi_2^*(F_Y)]$ con π_i le ovvie proiezioni di $X \times Y$ su X e Y. μ è di fatto un **omomorfismo di anelli**. Poniamo $E_X \boxtimes F_Y := \pi_1^*(E_X) \otimes \pi_2^*(F_Y)$.

Sia ora Y compatto e X localmente compatto. Possiamo ancora definire un prodotto esterno
$$K_c(X) \otimes K(Y) \longrightarrow K_c(X \times Y) \tag{19}$$
Infatti, sia $X^+ = (X \sqcup +)$ la compattificazione ad un punto di X. Esistono due applicazioni naturali: $i : Y \hookrightarrow X^+ \times Y$, $i(y) = (+, y)$ e $r : X^+ \times Y \to Y$, $r(x, y) = y$. È chiaro che $r \circ i = \mathrm{Id}_Y$; r è quindi una retrazione. Abbiamo anche l'applicazione $s^+ : X^+ \times Y \to X^+$, $s^+(x, y) = x$. Siano ora $\xi \in K(X) \equiv \widetilde{K}(X^+)$ e $\eta \in K(Y)$. Ne segue che
$$\xi = [E] - [1^m]\,, \text{ con rango}(E) = m\,,$$
E essendo, ovviamente, un fibrato su X^+. Analogamente $\eta = [F] - [1^n]$ e possiamo prendere $n = m$. Utilizzando le due proiezioni r ed s^+ possiamo definire il prodotto esterno $E \boxtimes F$, un fibrato su $X^+ \times Y$. Definiamo allora il prodotto esterno di ξ e η come segue
$$\xi \boxtimes \eta := [E \boxtimes F] - [E \boxtimes 1^m] - [1^m \boxtimes F] + [1^m \boxtimes 1^m]\,.$$
A priori questa è semplicemente una classe in $K(X^+ \times Y)$. D'altra parte abbiamo la successione esatta corta indotta dalla retrazione r:
$$0 \longrightarrow K(X^+ \times Y, Y) \longrightarrow K(X^+ \times Y) \xrightarrow{i^*} K(Y) \longrightarrow 0$$
È facile verificare che $i^*(\xi \boxtimes \eta) = 0$ e quindi, dalla sucessione esatta corta, che $\xi \boxtimes \eta \in K(X^+ \times Y, Y)$. Dato che
$$K(X^+ \times Y, Y) = \widetilde{K}(X^+ \times Y/Y) = \widetilde{K}((X \times Y)^+) = K(X \times Y)$$
concludiamo che il prodotto esterno $\xi \boxtimes \eta$ è ben definito in $K(X \times Y)$.

4.2 Omomorfismo di Bott e teorema di periodicità.

Sia X uno spazio compatto. Consideriamo il prodotto esterno

$$K(\mathbb{R}^2) \otimes K(X) \longrightarrow K(\mathbb{R}^2 \times X) \tag{20}$$

Sappiamo che $K(\mathbb{R}^2) = \mathbb{Z}$; $K(\mathbb{R}^2)$ è quindi generato da un elemento b. Sappiamo anzi descrivere questo elemento: se $f : S^1 \to \mathbb{C}$ è la funzione $f(z) = 1/z$ e se $S^2 = B^2_+ \cup B^2_-$ allora

$$b = [H] - [1] \in \widetilde{K}(S^2) = K(\mathbb{R}^2)$$

con

$$H = B^2_+ \times \mathbb{C} \cup_f B^2_- \times \mathbb{C}\,.$$

Riassumendo: il prodotto per il generatore b di $K(\mathbb{R}^2)$ induce un omomorfismo

$$\beta : K(X) \longrightarrow K(\mathbb{R}^2 \times X)$$

che è detto *omomorfismo di Bott*. Il seguente teorema è noto come *Teorema di periodicità di Bott in K-Teoria*; è uno dei risultati cruciali in K-Teoria.

Teorema 6. *L'omorfismo di Bott $\beta : K(X) \longrightarrow K(\mathbb{R}^2 \times X)$ è un* **isomorfismo**.

Dimostreremo questa teorema costruendo esplicitamente l'inversa $\alpha : K(\mathbb{R}^2 \times X) \longrightarrow K(X)$ di β.

4.3 Dimostrazione teorema di periodicità: preliminari analitico-funzionali.

Consideriamo $S^1 \subset \mathbb{C}$ e $L^2(S^1)$. Una base ortonormale di $L^2(S^1)$ è data da $\{e_j := z^j\}$ con $j \in \mathbb{Z}$, $z = e^{i\theta}$. Sia $H_+ \subset L^2(S^1)$, $H_+ := \mathrm{Span}\{e_j\,,\, j \geq 0\}$ e sia Π_+ la proiezione ortogonale su H_+ in $L^2(S^1)$. Se $f \in C(S^1)$ allora l'operatore di moltiplicazione per f, che denotiamo con M_f, appartiene a $\mathcal{L}(L^2(S^1))$. Consideriamo infine l'operatore

$$T_f = (\Pi_+ \circ M_f)_{|H_+} \in \mathcal{L}(H_+)\,.$$

Proposizione 13. *Se $f(z) \neq 0\ \forall z \in S^1$ allora $T_f \in \mathcal{L}(H_+)$ è di Fredholm. Inoltre* $\mathrm{ind}\,(T_f) = -W(f, 0)$ *con $W(f, 0)$ che denota l'indice di allacciamento (winding number) di f in $0 \in \mathbb{C}$.*

Se $E \simeq \mathbb{C}^n$ è uno spazio vettoriale complesso di dimensione n allora ha senso considerare $L^2(S^1) \otimes E$ che è isomorfo a $L^2(S^1) \oplus \cdots \oplus L^2(S^1)$ n-volte. Se $f : S^1 \to GL(E) \simeq GL(n, \mathbb{C})$ è continua allora possiamo considerare l'operatore di moltiplicazione

$$M_f : L^2(S^1) \otimes E \longrightarrow L^2(S^1) \otimes E$$

che è ovviamente limitato. Possiamo infine far agire diagonalmente Π_+ su $L^2(S^1) \otimes E$ ottenendo un operatore $\Pi_+ : L^2(S^1) \otimes E \to H_+ \otimes E$

Proposizione 14. *Sia $T_f := (\Pi_+ \circ M_f)_{|H_+ \otimes E}$. Allora $T_f \in \mathcal{L}(H_+ \otimes E)$. Inoltre T_f è di Fredholm e* $\inf(T_f) = -W(\det f, 0)$.

L'operatore T_f è detto *l'operatore di Wiener-Hopf associato a f*.
Supponiamo ora di avere uno spazio di parametri X e sia E un fibrato vettoriale su X di rango n. Consideriamo $S^1 \times X$ e sia $s : S^1 \times X \to X$ la proiezione sul secondo fattore. Se è data una sezione $\sigma \in C(S^1 \times X, \mathrm{Iso}(s^*E))$ allora $\sigma(z, x) \in GL(E_x) \simeq GL(n, \mathbb{C})$. Fissato $x \in X$ la funzione $S^1 \ni z \to \sigma(z, x)$ è

una funzione continua $\sigma(\cdot, x)$ su S^1 a valori in $GL(E_x) \simeq GL(n, \mathbb{C})$. Per ogni fissato $x \in X$ ha allora senso considerare l'operatore di Wiener-Hopf

$$T_x := T_{\sigma(\cdot,x)} \in \mathcal{L}(H_+ \otimes E_x)\,.$$

Per quanto appena visto questo è un operatore di Fredholm sullo spazio di Hilbert $H_x := H_+ \otimes E_x$. Consideriamo il fibrato di spazi di Hilbert $\mathcal{H} \to X$ con $(\mathcal{H})_x = H_+ \otimes E_x$. Nella dimostrazione del teorema di Atiyah-Janich abbiamo utilizzato il Teorema di Kuiper ; nel suo articolo Kuiper dimostra di fatto un risultato molto più forte e cioè che *$\mathcal{L}^+$ è uno spazio contraibile.* Questo risultato implica in particolare che un fibrato di spazi di Hilbert è sempre banale. (Questo è un fatto del tutto generale; se il gruppo di struttura di una fibrazione è contraibile allora la fibrazione è banale.) Ne segue in particolare che esiste una banalizzazione del nostro fibrato $\mathcal{H} \to X$; fissiamo tale banalizzazione $\mathcal{H} \simeq H \times X$. La famiglia di operatori $\{T_x\}$ diventa allora una *famiglia di operatori di Fredholm sullo spazio di Hilbert H*. Questa famiglia, che denotiamo brevemente con T_σ, è chiaramente continua, dato che σ era una sezione continua; ne segue allora che la famiglia $T_\sigma = \{T_x\}$ definisce una classe indice $\mathrm{Ind}\,(T_\sigma) \in K(X)$.
Conclusione: una sezione continua $\sigma \in C(S^1 \times X, \mathrm{Iso}(s^*E))$ definisce una classe di K-Teoria $\mathrm{Ind}\,(T_\sigma) \in K(X)$.

4.4 Sketch dimostrazione teorema di periodicità.

Siano $E \to X$ e $\sigma \in C(S^1 \times X, \mathrm{Iso}(s^*E))$ come nella sezione precedente. Esprimiamo la 1-sfera S^1 e la 2-sfera S^2 come

$$S^1 = B^2_+ \cap B^2_- \;, \quad S^2 = B^2_+ \cup_{S^1} B^2_-$$

Se $s_\pm : B^2_\pm \times X \to X$ sono le due ovvie proiezioni e $F^\pm = s^*_\pm E$ allora, per incollamento, otteniamo un fibrato

$$F^+ \cup_\sigma F^- \longrightarrow S^2 \times X$$

che dipende solo dalla classe di omotopia di σ a meno di isomorfismi. Vale una sorta di viceversa di questa osservazione: *se $F \in \mathrm{Vect}(S^2 \times X)$ allora esiste un fibrato $E \to X$ e $\sigma \in C(S^1 \times X, \mathrm{Iso}(s^*E))$ tale che $F \simeq (s^*_+E) \cup_\sigma (s^*_-E)$.* Ma allora, per la sezione precedente esiste una classe indice $\mathrm{Ind}\,(T_\sigma) \in K(X)$ ottenuta considerando la famiglia di operatori di Wiener-Hopf associata a σ. In definitiva abbiamo definito un'applicazione $\mathrm{Vect}(S^2 \times X) \longrightarrow K(X)$ ed è chiaro che quest'applicazione induce un morfismo di gruppi

$$\alpha' : K(S^2 \times X) \longrightarrow K(X)$$

che per restrizione induce

$$\alpha : K(\mathbb{R}^2 \times X) \longrightarrow K(X).$$

Si può dimostrare che

$$\alpha \circ \beta = \mathrm{Id}_{K(X)}\,, \qquad \beta \circ \alpha = \mathrm{Id}_{K(\mathbb{R}^2 \times X)}$$

il che conclude lo sketch della dimostrazione del teorema di periodicità.

4.5 Il caso localmente compatto.

Siano X ed Y spazi localmente compatti. È ancora possibile definire il prodotto esterno

$$K_c(X) \otimes K_c(Y) \to K_c(X \times Y)$$

Il punto è che per spazi compatti con punto base $Z, W \in$ **Com+** è possibile definire un prodotto esterno per i gruppi ridotti ma a valori nella K-teoria ridotta del prodotto *smash*:

$$\widetilde{K}(Z) \otimes \widetilde{K}(W) \to \widetilde{K}(Z \wedge W)$$

Vedere il libro di Hatcher "Vector bundles and K-Theory", p. 58. Applicando questo prodotto esterno a X^+ e Y^+ e osservando che $(X \times Y)^+ = X^+ \wedge Y^+$ otteniamo il desiderato prodotto esterno. $K_c(X) \otimes K_c(Y) \to K_c(X \times Y)$ che riscriviamo semplicemente come $K(X) \otimes K(Y) \to K(X \times Y)$.

Teorema 7. *Sia X localmente compatto e sia $\beta : K(X) \longrightarrow K(\mathbb{R}^2 \times X)$ il prodotto esterno per il generatore di $K(\mathbb{R}^2)$ (omorfismo di Bott). Alora $\beta : K(X) \longrightarrow K(\mathbb{R}^2 \times X)$ è un* **isomorfismo***.*

Per dettagli potete consultare: B. Booss, B. e D. Bleecker: "Topology and analysis. The Atiyah-Singer index formula and gauge-theoretic physics" che ha ora una seconda edizione con titolo "Index theory with applications to mathematics and physics".

Otteniamo, ovviamente, il seguente Corollario:

$$K(\mathbb{R}^{2n}) = \mathbb{Z}\,, \quad K(\mathbb{R}^{2n-1}) = 0$$

o, equivalentemente,

$$\widetilde{K}(S^{2n}) = \mathbb{Z}\,, \quad \widetilde{K}(S^{2n-1}) = 0$$

Tenendo presente l'isomorfismo di gruppi $[X, U(\infty)] \simeq \widetilde{K}(SX)$, valido per ogni spazio compatto X, è facile collegare questo risultato all'originale risultato di Bott:

Teorema 8. *(Teorema di periodicità di Bott) Per i gruppi di omotopia del gruppo unitario $U(\infty)$ vale il seguente risultato:*

$$\pi_j(U(\infty)) \simeq \pi_{j+2}(U(\infty)) = \begin{cases} \mathbb{Z} & se\ j\ è\ dispari \\ 0 & se\ j\ è\ pari \end{cases} \tag{21}$$

4.6 Successione esatta periodica

Dato che $(\mathbb{R}^k \times X)^+ = S^k \wedge X^+ = \Sigma^k(X^+)$ vediamo che

$$K^{-\ell}(X) = K(\mathbb{R}^\ell \times X)\,, \quad K^{-\ell}(X, Y) = K(\mathbb{R}^\ell \times (X/Y))\,.$$

La successione esatta lunga, infinita a sinistra, induce allora infinite successioni isomorfe costituite da 6 termini:

$$\begin{array}{ccccc} K^0(X,Y) & \longrightarrow & K^0(X) & \longrightarrow & K^0(Y) \\ \uparrow{\scriptstyle\delta} & & & & \downarrow{\scriptstyle\delta\circ\beta} \\ K^{-1}(Y) & \leftarrow & K^{-1}(X) & \leftarrow & K^{-1}(X,Y) \end{array} \tag{22}$$

4.7 Proprietà coomologiche

Poniamo $K^\ell(X) := K^{-\ell}(X)$ e similmente per (X, Y). Abbiamo allora definito un gruppo $\mathbb{Z}$-graduato 2-periodico. Si può dimostrare, si veda ad esempio il libro di Karoubi, che questo gruppo graduato soddisfa l'escissione; sappiamo che esso definisce un funtore omotopico dalle coppie di spazi topologici compatti ai gruppi abeliani; grazie alla sottosezione precedente e a Karoubi (escissione) vediamo allora che questo funtore soddisfa tutti gli assiomi di una teoria coomologica, tranne l'ultimo, quello sulla coomologia di un punto. La K-teoria è quindi un esempio di teoria coomologica generalizzata.

5 Successioni di fibrati e K-teoria. Isomorfismo di Thom.

In questa sezione daremo ulteriori descrizioni del gruppo di K-teoria ed enunceremo il teorema di isomorfismo di Thom.

5.1 Il gruppo $L_1(X, Y)$.

Consideriamo $D_1(X, Y)$, l'insieme delle triple $(E^1, E^0; \alpha^Y)$ con E_0, E_1 fibrati su X e $\alpha^Y : E^1|_Y \to E^0|_Y$ un *isomorfismo* su Y. C'è una naturale operazione di somma diretta fra gli elementi di $D_1(X, Y)$. Definiamo due triple $(E^1, E^0; \alpha^Y)$, $(F^1, F^0; \beta^Y)$ *isomorfe*, e scriveremo

$$(E^1, E^0; \alpha^Y) \simeq (F^1, F^0; \beta^Y)\,,$$

se esistono isomorfismi $\psi_j : E_j \to F_j$ tali che

$$\beta^Y \circ \psi_1|_Y = \psi_0|_Y \circ \alpha^Y$$

Le classi di isomorfismo vengono denotate con $C_1(X, Y)$; $C_1(X, Y)$ eredita un'operazione di somma diretta rispetto alla quale ha una naturale struttura di semigruppo abeliano. Definiamo una relazione di equivalenza $\sim_L$ nel semigruppo $C_1(X, Y)$ dichiarando

$$(E_1, E_0; \alpha^Y) \sim_L (F_1, F_0; \beta^Y) \tag{23}$$

se esistono *triple elementari* $(G, G; \mathrm{Id})$, $(H, H; \mathrm{Id})$ tali che

$$(E^1 \oplus G, E^0 \oplus G; \alpha^Y \oplus \mathrm{Id}) \simeq (F^1 \oplus H, F^0 \oplus H; \beta^Y \oplus \mathrm{Id}) \tag{24}$$

Questa relazione di equivalenza è compatibile con l'operazione di somma diretta e possiamo quindi definire il semigruppo abeliano

$$L_1(X, Y) = C_1(X, Y)/\sim_L\ .$$

Denotiamo la classe di $(E^1, E^0; \alpha^Y)$ tramite $[E^1, E^0; \alpha^Y]$; l'elemento neutro in $L_1(X, Y)$ è dato da $[\mathbf{1}^m, \mathbf{1}^m; \mathrm{Id}]$ per un qualsiasi $m \in \mathbb{N}$.
È chiaro che $(X, Y) \to L_1(X, Y)$ definisce un funtore controvariante da **Com2** alla categoria dei semigruppi abeliani e morfismi di semigruppi (con f^* indotta dal pull-back se $f : (X, Y) \to (X'Y')$).

Osservazioni.
1. Segue facilmente dalla definizione che $[E^1, E^0; \alpha^Y] = 0$ in $L_1(X, Y)$ se e solo se esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che

$$\alpha^Y \oplus \mathrm{Id} : E^1|_Y \oplus \mathbf{1}^N \longrightarrow E^0|_Y \oplus \mathbf{1}^N$$

si *estende* ad un *isomorfismo globale su tutto* X.
2. È anche molto facile vedere che $L(X, \emptyset)$ si identifica a $K(X)$ tramite l'applicazione $[E^1, E^0] \to [E^1] - [E^0]$.

Proposizione 15. *$L(X, Y)$ è un gruppo abeliano, l'inverso di $[E^1, E^0; \alpha^Y]$ essendo uguale a $[E^0, E^1; (\alpha^Y)^{-1}]$.*

Abbiamo in definitiva definito un funtore $L_1(,)$ dalla categoria **Com2** delle coppie di spazi compatti alla categoria dei gruppi abeliani.

Osservazione. Possiamo anche definire $L_1(X, Y)$ come il semigruppo $C_1(X, Y)$ modulo il sottosemigruppo generato dalle terne elementari.

Definizione 17. Una caratteristica di Eulero è una trasformazione di funtori $\chi : L_1(X,Y) \longrightarrow K(X,Y)$ con la seguente proprietà:
se $Y = \emptyset$ allora $\chi[E^1, E^0] = [E^1] - [E^0]$

Vale il seguente notevole

Teorema 9. *Esiste un'unica caratteristica di Eulero $\chi : L_1(X,Y) \longrightarrow K(X,Y)$ ed è sempre un isomorfismo.*

Per una dimostrazione completa vi rimando al libro di Atiyah. Vediamo semplicemente che esiste una caratteristica di Eulero. Sia $[E^1, E^0; \alpha^Y] \in L_1(X,Y)$. Poniamo $X_0 = X$, $X_1 = X$, $Z = X_0 \cup_Y X_1$. Per quanto visto esiste il fibrato incollato $E^1 \cup_{\alpha^Y} E^0 \longrightarrow Z$. Notiamo che esiste una retrazione naturale $r_1 : Z \to X_1$ e quindi, per il Corollario 5 una successione esatta corta

$$0 \to K(Z, X_1) \to K(Z) \longrightarrow K(X_1) \longrightarrow 0\,.$$

È ovvio che $K(X,Y) \simeq K(Z, X_1)$. Definiamo $\eta = [E^1 \cup_{\alpha^Y} E^0] - r_1^*[E^1] \in K(Z)$. Si ha, per costruzione, $\eta \in \mathrm{Ker} i^*$. Ma allora per la successione esatta corta esiste un unico elemento in $K(Z, X_1) = K(X,Y)$ che ha η come immagine. Per definizione $\chi[E^1, E^0; \alpha^Y]$ è questo elemento in $K(X,Y)$; l'elemento costruito è detto il *fibrato differenza* associato a $[E^1, E^0; \alpha^Y] \in L_1(X,Y)$. (Per controllare che l'applicazione $[E^1, E^0; \alpha^Y] \longrightarrow \chi[E^1, E^0; \alpha^Y]$ definisce effettivamente un morfismo di gruppi dobbiamo fare uso di alcune proprietà di naturalità che ha l'operazione di incollamento di due fibrati; omettiamo i dettagli) .

5.2 Classi di omotopia di successioni di fibrati di lunghezza 1.

Abbiamo dimostrato che esiste un isomorfismo di gruppi abeliani

$$\chi : L_1(X,Y) \to K(X,Y).$$

Grazie a questo isomorfismo e all'invarianza per omotopia della K-teoria otteniamo immediatamente che la classe $[E^1, E^0; \alpha^Y]$ associata ad una terna $(E^1, E^0; \alpha^Y)$ dipende solo dalla classe di omotopia dell'isomorfismo $\alpha^Y : E^1|_Y \to E^0|_Y$. Più in generale, se le terne $(E^1, E^0; \alpha^Y)$ e $(F^1, F^0; \beta^Y)$ sono omotope [12], allora $[E^1, E^0; \alpha^Y] = [F^1, F^0; \beta^Y]$ in $L_1(X,Y)$.

Consideriamo l'insieme delle terne (E^1, E^0, α), con $\alpha : E^1 \to E^0$ morfismo di fibrati, tale che la sua restrizione a Y, $\alpha|_Y : E^1|_Y \to E^0|_Y$ sia *un isomorfismo.* È ovvio che è del tutto equivalente considerare le *successioni di fibrati di lunghezza 1*

$$0 \to E^1 \xrightarrow{\alpha} E^0 \longrightarrow 0$$

tali che la loro restrizione a Y

$$0 \to E^1|_Y \xrightarrow{\alpha|_Y} E^0 \longrightarrow 0$$

sia **esatta**.

Sia $C_1^o(X,Y)$ il semigruppo delle classi di omotopia delle successioni di fibrati di lunghezza 1 che sono esatti su Y. Sia $C_1^o(X,X)$ il sottosemigruppo generato dalle successioni di fibrati che sono esatte ovunque. Tenendo presente l'osservazione dopo la Proposizione 15, siamo portati a considerare il semigruppo quoziente $\Theta_1(X,Y) = C_1^o(X,Y)/C_1^o(X,X)$.

Proposizione 16. *Il semigruppo $\Theta_1(X,Y)$ è un gruppo abeliano e l'applicazione $\Theta_1(X,Y) \to L_1(X,Y)$ definita dalla restrizione*

$$[0 \to E^1 \xrightarrow{\alpha} E^0 \longrightarrow 0] \longrightarrow [E^1, E^0; \alpha|_Y]$$

è un isomorfismo di gruppi abeliani.

[12] e cioè esistono fibrati vettoriali H^1, H^0 su $X \times [0,1]$ ed un isomorfismo $h^{Y\times[0,1]} : H^1|_{Y\times[0,1]} \to H^0|_{Y\times[0,1]}$ tali che le restrizioni di $(H^1, H^0; h^{Y\times[0,1]})$ a $t = 0$ e $t = 1$ sono isomorfe alle terne $(E^1, E^0; \alpha^Y)$ e $(F^1, F^0; \beta^Y)$ rispettivamente

Sketch della dimostrazione. Per dimostrare che $\Theta_1(X,Y)$ è un gruppo, occorre verificare che ogni elemento ha un inverso. Consideriamo

$$[0 \to E^1 \xrightarrow{\alpha} E^0 \longrightarrow 0] \in \Theta_1(X,Y).$$

Estendiamo $(\alpha|_Y)^{-1}$ ad un morfismo $\beta : E^0 \to E^1$ e consideriamo la classe

$$[0 \to E^0 \xrightarrow{\beta} E^1 \longrightarrow 0] \,.$$

È facile vedere che questa classe è ben definita, indipendente dalla particolare estensione scelta; si dimostra poi che la classe della successione somma

$$[0 \longrightarrow E^1 \oplus E^0 \xrightarrow{\alpha\oplus\beta} E^0 \oplus E^1 \longrightarrow 0]$$

è omotopa ad una successione esatta su X.

5.3 Classi di omotopia di complessi di fibrati di lunghezza n

Consideriamo $D_n(X,Y)$, l'insieme delle $((n+1)+n)$-ple

$$(E^n,\dots,E^0;\alpha_n^Y,\dots,\alpha_1^Y)$$

con E^j fibrati su X e $\alpha_j^Y : E^j|_Y \to E^{j-1}|_Y$ *morfismi* di fibrati su Y tali che la successione

$$\cdots \to E^j|_Y \xrightarrow{\alpha_j^Y} E^{j-1}|_Y \to \cdots \tag{25}$$

sia esatta. C'è una naturale operazione di somma diretta fra gli elementi di $D_n(X,Y)$ e una naturale nozione di isomorfismo (si veda la lezione precedente). Le classi di isomorfismo vengono denotate con $C_n(X,Y)$; $C_n(X,Y)$ eredita un'operazione di somma diretta rispetto alla quale ha una naturale struttura di semigruppo abeliano. Un elemento $(E^n,\dots,E^0;\alpha_n^Y,\dots,\alpha_1^Y)$ è detto *elementare* se esiste k tale che $E^k = E^{k-1}$, $E^j = 0$ se $j \notin \{k,k-1\}$ e $\alpha_k^Y = \mathrm{Id}$. Definiamo un semigruppo $L_n(X,Y)$ considerando $C_n(X,Y)$ modulo il sottosemigruppo generato dagli elementi elementari. Dato un elemento in $L_n(X,Y)$, sia esso $[E^n,\dots,E^0;\alpha_n^Y,\dots,\alpha_1^Y]$, possiamo definire un elemento in $L_{n+1}(X,Y)$ semplicemente considerando

$$[0,E^n,\dots,E^0;0,\alpha_n^Y,\dots,\alpha_1^Y]\,;$$

otteniamo in questo modo un'applicazione di semigruppi $j : L_n(X,Y) \to L_{n+1}(X,Y)$.

Proposizione 17. *$\forall n \geq 1$ $L_n(X,Y)$ è un gruppo e l'omomorfismo di inclusione j definisce un isomorfismo*

$$L_1(X,Y) \simeq L_n(X,Y) \tag{26}$$

La dimostrazione non è difficile. Qui notiamo semplicemente che l'inverso dell'isomorfismo di inclusione $L_1(X,Y) \to L_n(X,Y)$ è definito come segue. Sia $[E^n,\dots,E^0;\alpha_n^Y,\dots,\alpha_1^Y] \in L_n(X,Y)$. Consideriamo una metrica hermitiana su ogni fibrato; possiamo allora definire i morfismi aggiunti dei morfismi α_k^Y.
Definiamo $F^1 = \oplus E^{2k+1}$, $F^0 = \oplus E^{2k}$,

$$\beta^Y = \left(\oplus\alpha_{2k+1}^Y\right) \oplus \left(\oplus(\alpha_{2k}^Y)^*\right)\,.$$

La terna $(F^1,F^0;\beta^Y)$ definisce un elemento in $C_1(X,Y)$ e la sua classe in $L_1(X,Y)$ è ben definita, indipendente dalla scelta delle metriche hermitiane (cambiando le metriche si ottiene un morfismo omotopo a β). L'applicazione $R : L_n(X,Y) \to L_1(X,Y)$ definita da

$$[E^n,\dots,E^0;\alpha_n^Y,\dots,\alpha_1^Y] \longrightarrow [F^1,F^0;\beta^Y]$$

è l'inversa dell'omomorfismo di inclusione.

Definizione 18. Un complesso di fibrati di lunghezza n è una successione di fibrati di fibrati di lunghezza n

$$0 \to E^n \to \cdots \to E^{j+1} \stackrel{\alpha_{j+1}}{\longrightarrow} E^j \stackrel{\alpha_j}{\longrightarrow} E^{j-1} \to \cdots \to E^0 \to 0$$

tali che $\alpha_j \circ \alpha_{j+1} = 0 \; \forall j$.

Osserviamo che le successioni di lunghezza 1 considerate nel paragrafo precedente sono automaticamente dei complessi.
Possiamo considerare le classi di omotopia $C_n^o(X,Y)$ dei complessi di fibrati di lunghezza n che sono *esatti* quando ristretti ad Y ed il sottosemigruppo $C_n^o(X,X)$ dei complessi che sono esatti su tutto X. Il semigruppo quoziente è denotato con $\Theta_n(X,Y)$. Si può far vedere, ispirandosi al caso $n=1$, che questo semigruppo abeliano è un gruppo.
Non è difficile dimostrare, per induzione su n, che data una $((n+1)+n)$-pla $(E^n,\ldots,E^0;\alpha_n^Y,\ldots,\alpha_1^Y)$ esiste sempre un complesso di fibrati su X

$$\cdots \to E^{j+1} \stackrel{\alpha_{j+1}}{\longrightarrow} E^j \stackrel{\alpha_j}{\longrightarrow} E^{j-1} \to \cdots$$

la cui restrizione a Y è proprio $(E^n,\ldots,E^0;\alpha_n^Y,\ldots,\alpha_1^Y)$. Considerando nuovamente l'applicazione restrizione e procedendo come per il caso $n=1$ si dimostra quanto segue:

Proposizione 18. *La restrizione di un complesso in $\Theta_n(X,Y)$ ad Y definisce un isomorfismo di gruppi*

$$\Theta_n(X,Y) \longrightarrow L_n(X,Y).$$

Riassumendo: per ogni coppia di spazi compatti (X,Y)
- la caratteristica di Eulero $\chi : L_1(X,Y) \longrightarrow K(X,Y)$ è un isomorfismo.
- l'inclusione naturale $i : L_1(X,Y) \longrightarrow L_n(X,Y)$ è un isomorfismo $\forall n$.
- l'omomorfismo restrizione $\Theta_n(X,Y) \longrightarrow L_n(X,Y)$ è un isomorfismo $\forall n$.

Concludiamo questa sezione dando la seguente

Definizione 19. Il supporto di un complesso di fibrati su X

$$0 \to E^n \to \cdots \to E^{j+1} \stackrel{\alpha_{j+1}}{\longrightarrow} E^j \stackrel{\alpha_j}{\longrightarrow} E^{j-1} \to \cdots \to E^0 \to 0$$

è l'insieme degli $x \in X$ tali che

$$0 \to E_x^n \to \cdots \to E_x^{j+1} \stackrel{\alpha_{j+1}}{\longrightarrow} E_x^j \stackrel{\alpha_j}{\longrightarrow} E_x^{j-1} \to \cdots \to E_x^0 \to 0$$

non è esatta.

5.4 Fibrati e prodotti.

Sia X uno spazio localmente compatto. Per quanto visto sopra:

$$K_c(X) = K(X^+,+) = L_n(X^+,+) = \Theta_n(X^+,+) \quad \forall n \geq 1 \tag{27}$$

In particolare, grazie all'ultima identificazione, vediamo che $K_c(X)$ è uguale al gruppo abeliano ottenuto quozientando il semigruppo costituito dalle *classi di omotopia di complessi di lunghezza n che sono esatti fuori di un compatto* (o, equivalentemente, *a supporto compatto*) per il sottosemigruppo costituito da quelle *classi di omotopia di complessi che sono esatti ovunque*

Notazione. Abbandoniamo (nuovamente !) la notazione K_c ed utilizziamo sempre K. Inoltre utilizziamo liberamente le identificazioni $K(X) \equiv K(X^+,+) = L_n(X^+,+) = \Theta_n(X^+,+) \quad \forall n \geq 1$.

Sia X uno spazio compatto e V, W due fibrati vettoriali su X. Sono allora ben definiti i gruppi $K(V), K(W)$. Sia $i : X \to X \times X$ l'applicazione diagonale $i(x) = (x, x)$. Componendo il prodotto esterno

$$K(V) \otimes K(W) \xrightarrow{\boxtimes} K(V \times W)$$

con l'applicazione $i^* : K(V \times W) \longrightarrow K(V \oplus W)$ indotta da i, otteniamo un'applicazione

$$K(V) \otimes K(W) \longrightarrow K(V \oplus W).$$

In particolare, se $V = X \times \{\underline{0}\}$ allora abbiamo un'applicazione naturale

$$K(X) \otimes K(W) \longrightarrow K(W) \tag{28}$$

per ogni fibrato vettoriale W.

Vediamo quindi che $K(W)$ ha una naturale struttura di $K(X)$-modulo per ogni fibrato vettoriale $W \to X$.

5.5 Complesso di Koszul.

Consideriamo un fibrato complesso $V \to Z$ con Z localmente compatto. Sia $s \in C(Z, V)$, $s : Z \to V$, una sezione continua e sia $\Lambda^k V \to Z$ la k-ma potenza esterna di V. Il complesso di fibrati vettoriali

$$\cdots \longrightarrow \Lambda^k V \xrightarrow{d_s} \Lambda^{k+1} V \longrightarrow \cdots$$

con $(d_s)_z(\omega_z) := \omega_z \wedge s(z)$, è detto *complesso di Koszul*. È elementare verificare che se $s(z) \neq 0$ allora il complesso di Koszul è esatto in z.

Consideriamo in particolare uno spazio compatto X ed un fibrato $\pi : V \to X$. Abbiamo allora il fibrato indotto $\pi^* V$ su V. Questo fibrato ammette una sezione naturale $s : V \to \pi^* V$ definita da $s(v) = (v, v)$ (per definizione $\pi^* V = \{(v, w) \in V \times V \mid \pi(v) = \pi(w)\}$). È ovvio che $s(v) = 0 \Leftrightarrow v = \underline{0}$. Segue quindi che il complesso di Koszul associato a $\pi^* V \to V$ e s,

$$\cdots \longrightarrow \Lambda^k \pi^* V \xrightarrow{d_s} \Lambda^{k+1} \pi^* V \longrightarrow \cdots$$

è esatto fuori dalla sezione nulla. Ne segue che il complesso di Koszul ha supporto compatto e definisce quindi una classe $\lambda_V \in K(V)$.

5.6 Enunciato teorema di Thom.

Sia $\lambda_V \in K(V)$ la classe definita dal complesso di Koszul di un fibrato complesso V su X, X compatto. Consideriamo il prodotto esterno (28) e più precisamente

$$K(X) \ni \xi \longrightarrow \pi^* \xi \boxtimes \lambda_V \in K(V). \tag{29}$$

Otteniamo un omomorfismo

$$\phi : K(X) \longrightarrow K(V) \tag{30}$$

Non è difficile verificare che (30) si riduce all'omomorfismo di Bott se V è il fibrato banale di rango 1. L'omomorfismo appena definito è detto *omomorfismo di Thom*.

Teorema 10. *L'omomorfismo* $\phi : K(X) \longrightarrow K(V)$ *è un* **isomorfismo**.

Osservazione. Il teorema appena enunciato, il *Teorema di isomorfismo di Thom in K-Teoria*, vale anche se X è localmente compatto. Occorre chiarire il fatto che anche in questo caso più generale la classe $\pi^*\alpha \boxtimes \lambda_V \in K(V)$ è ben definita.
La classe α che compare in (29) è definita da un complesso (F^j, α^j) a supporto compatto K in X. È chiaro che $\pi^*\alpha$ è rappresentato dal complesso $(\pi^*F^j, \pi^*\alpha^j)$ con supporto uguale quindi a $\pi^{-1}(K)$ e quindi non-compatto nella direzione delle fibre di V. D'altra parte il complesso di Koszul ha supporto uguale alla sezione nulla di $V \to X$, quindi non compatto solo nella direzione orizzontale del fibrato $V \to X$. Ne segue che l'intersezione dei due supporti è compatta in V e quindi $\pi^*\alpha \boxtimes \lambda_V \in K(V)$ è ben definita.

Per una dimostrazione del teorema di Thom vi rimando al libro di Lawson e Michelson "Spin Geometry". L'idea è simile a quella utilizzata per il teorema di Thom in coomologia: usare Mayer-Vietoris, il lemma dei cinque ed il teorema di Thom per fibrati banali, i.e. il teorema di Bott per dare un argomento induttivo sul numero degli intorni banalizzanti.

References

[1] M. Atiyah. *K-Theory*, Benjamin, New York, 1967.

[2] M. Atiyah e F. Hirzebruch.

[3] M. Atiyah e I. Singer. Bulletin of AMS

[4] M. Atiyah e I. Singer. The index of elliptic operators I. *Annals of Mathematics*

[5] M. Atiyah e I. Singer. The index of elliptic operators III. *Annals of Mathematics*

[6] P. Hilton.

[7] F. Hirzebruch. *Topological methods in Algebraic Geometry.* Springer-Verlag etc.

[8] D. Husemmoler. *Fibre bundles*, GTM Vol. 20, Springer-Verlag, 1975.

[9] J. Milnor. *Morse theory*, Ann. Math. Studies 51, Princeton University Press, Princeton 1963.

[10] J. Milnor e J.D. Stasheff. *Characteristic classes*, Ann. Math. Studies 51, Princeton University Press, Princeton 1974.

[11] N. Reed e B. Simon. *Methods of Modern Mathematical Physics I.* Acad. Press.